سلسلة ملخصات
شوم

الطرق الرياضية
للإدارة والاقتصاد

الطبعة العربية الأولى
2003

إدوارد ت.دولينج

- يغطى جميع أساسيات المنهج ويكمل أى منهج دراسى.
- يعلم الطرق الفعالة لحل المسائل.
- يحتوى على 1066 مسألة محلولة حلاً وافياً.
- يشمل أيضاً 676 مسألة إضافية مع إجابتها.

سلسلة شوم بيعت
منها أكثر من 30
مليون نسخة فى
العالم

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية
مصر

حقوق النشر

* **الطبعة الانجليزية** حقوق التأليف © 1993 دار ماكجروهيل للنشر . جميع الحقوق محفوظة

Mathematical Methods For Business and Economics

by

Edward T. Dowling, Ph.D.

* **الطبعة العربية الأولى** حقوق الطبع والنشر © 2003 ، جميع الحقوق محفوظة

للدار الدولية للاستثمارات الثقافية
8 إبراهيم العرابى ـ النزهة الجديدة ـ مصر الجديدة ـ القاهـرة ـ ج . م . ع .
ص . ب: 5599 هليوبوليس غرب/ القاهرة ـ تليفون: 6222105/6221944 فاكس : 6221944 (00202)

لا يجوز نشر أى جزء من هذا الكتاب
أو اختزان مادته بطريقة الاسترجاع أو نقله على أى وجه أو بأى طريقة سواء كانت اليكترونية أو ميكانيكية
أو بالتصوير أو خلاف ذلك إلا بموافقة الناشر على هذا كتابة ومقدماً

رقم الإيداع : 2003/3607
I.S.B.N: 977-282-141-9

المقدمة

يحتاج الطلبة الدارسون للإدارة والاقتصاد سواء فى مرحلة البكالوريوس أو الماجستير إلى الكثير من المهارات المتنوعة فى الرياضيات وذلك حتى يمكنهم بنجاح إتمام متطلبات الدرجة الجامعية وحتى يمكنهم المنافسة بصورة مؤثرة فى مجالات اختيارهم فى العمل . ولسوء الحظ فإن الأمر ليس موضوع مقرر منفرد فى الرياضيات مثل التفاضل والتكامل أو الجبر الخطى حتى تتحقق المنافسة المطلوبة ، خاصة وأن الكثير من طلبة الإدارة والاقتصاد ليس لديهم الاستعداد الكافى لدراسة سلسلة من المقررات الرياضية فى الجداول الدراسية الخاصة بهم . ولقد صمم كتاب الطرق الرياضية للإدارة والاقتصاد بحيث يحقق الأدوات والمفاهيم والأساليب الرياضية الأساسية من أجل النجاح فى الإدارة والاقتصاد . والكتاب مناسب لفصل واحد ـ فصلين دراسيين فى مقرر رياضيات الإدارة وذلك اعتماداً على الخلفية العلمية السابقة للطلاب . كما يمكن أيضًا استخدام الكتاب وتحقيق فوائد كثيرة منه فى مقرر دراسى أولى فى الجبر الخطى أو التفاضل والتكامل وذلك للأساتذة والطلبة المهتمين بالاتصالات والتطبيقات الإدارية.

ويتضح فى كل فصل من الكتاب النظرية ومسائل محلولة مدعومة بأمثلة مختلفة بالإضافة إلى مسائل متعددة كثيرة مع الحل النهائى لها . ولا يتطلب الكتاب أى مستوى رياضى للطلاب بخلاف مستوى الثانوى العام . ويمكن للطلاب تطويع الكتاب طبقًا لاحتياجاتهم الخاصة مما يحقق للطالب التقدم بالمعدل الخاص به .

ويمكن استخدام كتاب الطرق الرياضية للإدارة والاقتصاد فقط أو يستخدم كمكمل لتدعيم المراجع الأخرى لطلاب البكالوريوس والدراسات العليا فى الإدارة والاقتصاد . ويبدأ الكتاب فى الفصل الأول بمراجعة أساسية للجبر فى الدراسة الثانوية ، حيث يشرح الكتاب باتساق كامل جميع الأساليب والمفاهيم الرياضية الأساسية المطلوبة فى الموضوعات المختلفة للكتاب . ويحتوى هذا الكتاب على 1066 مسألة ، وقد تم حل كل منها بالتفصيل المناسب . وحتى يحصل الطالب على أكثر ما يمكنه من الكتاب فإنه يجب أن يعمل جاهدًا على العمل بصورة مستقلة عن الحلول ، ويمكن أن يتحقق ذلك بحل المسائل فى أوراق خارجية مع ترك الكتاب مقفلاً ، فإذا ما نشأت صعوبات فإنه يمكن التحقق من الحل بالكتاب حينئذ . ولأفضل النتائج فإنه يجب على الطالب ألا يرضى ويكتفى بمجرد المعرفة السريعة ولكن يجب العمل على فهم ومتابعة ومقارنة مختلف الخطوات المقدمة فى الكتاب . فاستيعاب الموضوعات والأداء الجيد فى الاختبارات يتطلب ويستلزم معلومات حاضرة نشطة حتى يمكن حل أى مسألة على أى مستوى بدون الاستعانة بالكتاب .

وقد أثبتت التجربة أن الطلاب وعلى اختلاف مستوياتهم وقدراتهم وخلفياتهم يمكنهم بنجاح فهم مختلف موضوعات هذا المرجع حينما يتم عرض وتقديم موضوعات هذا الكتاب بنفس الصورة الحالية . وأود أن أعبر عن امتنانى لكل من ساعد فى إخراج هذا الكتاب .

إدوارد ت. دولينج

المحتويات

الموضوعات	الصفحة
الفصل الأول : مراجعة	**9**
1.1 الأسس	9
1.2 كثيرات الحدود	10
1.3 تحليل العوامل	11
1.4 الكسور	12
1.5 الجذور	13
1.6 ترتيب العمليات الرياضية	14
1.7 استخدام حاسبة الجيب	14
الفصل الثانى : المعادلات والرسوم البيانية	**41**
2.1 المعادلات	41
2.2 نظام الإحداثيات الكارتيزى	42
2.3 المعادلات الخطية والرسوم البيانية	43
2.4 الميول	44
2.5 الحدود القاطعة	44
2.6 صيغة الميل ـ الحد القاطع	45
2.7 تحديد معادلة الخط المستقيم	46
2.8 تطبيقات المعادلات الخطية فى الإدارة والاقتصاد	48
الفصل الثالث : الدوال	**75**
3.1 مفاهيم وتعريفات	75
3.2 التمثيل البيانى للدوال	76
3.3 جبر الدوال	77
3.4 تطبيقات الدوال الخطية فى الإدارة والاقتصاد	78
3.5 حل المعادلات من الدرجة الثانية	79
3.6 تيسير التمثيل البيانى غير الخطى	80
3.7 تطبيقات الدوال غير الخطية فى الإدارة والاقتصاد	81
الفصل الرابع : نظم المعادلات	**113**
4.1 مفاهيم وتعريفات	113
4.2 الحلول البيانية	113

4.3 تحليل العرض والطلب 115
4.4 تحليل نقطة التعادل 116
4.5 طرق الحذف والتعويض 118
4.6 نماذج تحديد الدخل 120
4.7 تحليل IS-LM 121
4.8 النمذجة الرياضية والاقتصادية (اختيارى) 122
4.9 الدوال الضمنية والدوال العكسية (اختيارى) 123

الفصل الخامس : الجبر الخطى (المصفوفة) 157

5.1 مقدمة 157
5.2 تعريفات ومصطلحات 157
5.3 جمع وطرح المصفوفات 158
5.4 ضرب العددى 159
5.5 ضرب المتجه 159
5.6 ضرب المصفوفات 160
5.7 المصفوفة ونظام المعادلات الخطية 162
5.8 المصفوفة الممددة 163
5.9 عمليات الصف 164
5.10 طريقة جاوس لحل المعادلات الخطية 165

الفصل السادس : حل المعادلات الخطية بجبر المصفوفات 183

6.1 المحددات والاستقلال الخطى 183
6.2 محددات الدرجة الثالثة 184
6.3 قاعدة كرامر لحل المعادلات الخطية 185
6.4 المصفوفات المعكوسة 187
6.5 طريقة جاوس لإيجاد المصفوفة المعكوسة 187
6.6 حل المعادلات الخطية بالمصفوفة المعكوسة 189
6.7 تطبيقات اقتصادية وإدارية 190
6.8 محددات خاصة 191

الفصل السابع : البرمجة الخطية ـ الحل البيانى 211

7.1 الحل البيانى للبرمجة الخطية 211
7.2 التعظيم باستخدام الرسوم البيانية 211
7.3 نظرية النقطة المتطرفة 212
7.4 التدنية باستخدام الرسوم البيانية 213
7.5 المتغيرات الخاملة والفائضة 214
7.6 نظرية الأساس 215

الفصل الثامن : البرمجة الخطية ـ حساب السمبلكس والثنائى 235

8.1 طريقة السمبلكس 235

8.2 التعظيم 235

8.3 القيمة الحدية أو تسعير الظل 238

8.4 التدنية 239

8.5 الثنائى 239

8.6 قواعد التحويل للحصول على الثنائى (المرافق) 240

8.7 نظريات الثنائى 241

8.8 أسعار الظل فى الثنائى 242

8.9 البرمجة العددية 243

8.10 البرمجة صفر ـ واحد 244

الفصل التاسع : حساب التفاضل : المشتقة وقواعد التفاضل 261

9.1 النهايات 261

9.2 الاستمرارية 263

9.3 ميل دالة الخط المنحنى 263

9.4 المشتقة 265

9.5 القابلية للتفاضل والاستمرارية 266

9.6 رموز المشتقة 266

9.7 قواعد التفاضل 267

9.8 المشتقات من درجات عليا 270

9.9 الدوال الضمنية 271

الفصل العاشر : حساب التفاضل : استخدامات المشتقة 293

10.1 الدوال المتزايدة والمتناقصة 293

10.2 التقعر والتحدب 293

10.3 النهايات النسبية 294

10.4 نقاط التحول 295

10.5 مخطط المنحنى 296

10.6 أمثلية الدوال 297

10.7 اختبار المشتقة المتتالى 298

10.8 المفاهيم الحدية فى الاقتصاد 298

10.9 أمثلية الدوال الاقتصادية للإدارة 299

10.10 العلاقات بين الدوال الكلية والحدية والمتوسطة 300

الفصل الحادى عشر : الدوال الأسية واللوغاريتمية 327

11.1 الدوال الأسية 327

11.2 الدوال اللوغاريتمية 328

11.3 خصائص الأسس واللوغاريتمات 330

11.4 الدوال الأسية واللوغاريتمية الطبيعية 331

11.5 حل الدوال الأسية واللوغاريتمية الطبيعية 331

11.6 التحويل اللوغاريتمى للدوال غير الخطية 332

11.7 مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية الطبيعية 333

11.8 الفائدة المركبة 334

11.9 تقدير معدلات النمو من نقاط البيانات 336

الفصل الثانى عشر : حساب التكامل 361

12.1 التكامل 361

12.2 قواعد التكامل غير المحدد 361

12.3 المساحة تحت المنحنى 364

12.4 التكامل المحدد 364

12.5 النظرية الأساسية للتكامل 365

12.6 خصائص التكامل المحدد 366

12.7 المساحة بين المنحنيات 367

12.8 التكامل بالتعويض 368

12.9 التكامل بالتجزئة 369

12.10 القيمة الحالية لتدفق نقدى 370

12.11 فائض المستهلك وفائض المنتج 371

الفصل الثالث عشر : تفاضل الدوال متعددة المتغيرات 395

13.1 الدوال عديدة المتغيرات المستقلة 395

13.2 المشتقات الجزئية 395

13.3 قواعد التفاضل الجزئى 397

13.4 المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية 399

13.5 أمثلية الدوال متعددة المتغيرات 400

13.6 الأمثلية المقيدة ومضاعفات لاجرانج 403

13.7 مضاعفات تحديد الدخل 404

13.8 أمثلية الدوال متعددة المتغيرات فى الإدارة والاقتصاد 405

13.9 الأمثلية المقيدة للدوال الاقتصادية متعددة المتغيرات 406

13.10 الأمثلية المقيدة لدوال كوب ـ دوجلاس للإنتاج 406

13.11 قواعد الدوال الضمنية والعكسية 407

الفصل الأول

مراجعة Review

1.1 الأسس Exponents

إذا أعطيت عدداً موجبًا n ، فإن x^n تعنى أن x مضروبة فى نفسها n من المرات . ونشير هنا إلى x بالأساس و n تسمى الأس . وطبقًا لما تعارف عليه فإن أس الواحد لا يعبر عنه : أى $x^{(1)} = x$ ، $8^{(1)} = 8$. وبالتعريف فإن أى عدد صفرى أو متغير مدفوع للقوى صفر يساوى 1 : $x^0 = 1$ ، $3^0 = 1$ ، 0^0 غير محدد . وبافتراض أن a ، b أعداد موجبة و y ، x أعداد حقيقية فإن قواعد الأسس تكون على النحو التالى :

1. $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$
2. $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$
3. $(x^a)^b = x^{ab}$
4. $(xy)^a = x^a y^a$
5. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^a = \dfrac{x^a}{y^a}$
6. $\dfrac{1}{x^a} = x^{-a}$
7. $\sqrt{x} = x^{1/2}$
8. $\sqrt[a]{x} = x^{1/a}$
9. $x^0 = 1 \qquad (x \neq 0)$

مثال 1 : عند الضرب نجمع الأسس لنفس المتغير . وفى القسمة نطرح الأسس لنفس المتغير . وحينما يكون المتغير مرفوعًا لقوى معينة فإننا نضرب أسس المتغير كما تحدد بالقواعد السابقة والموضح بالأمثلة التالية .

EXAMPLE 1. In multiplication, exponents of the same variable are added; in division, exponents of the same variable are subtracted; when raised to a power, the exponents of a variable are multiplied, as indicated by the rules above and shown in the examples below followed by illustrations.

(*a*) $x^2 \cdot x^5 = x^{2+5} = x^7 \neq x^{10}$ القاعدة (1)

$$x^2 \cdot x^5 = (x \cdot x)(x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x) = x^7$$

(*b*) $\dfrac{x^8}{x^2} = x^{8-2} = x^6 \neq x^4$ القاعدة (2)

$$\frac{x^8}{x^2} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x} = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^6$$

(*c*) $(x^3)^2 = x^{3\cdot 2} = x^6 \neq x^9$ or x^5 القاعدة (3)

$$(x^3)^2 = (x \cdot x \cdot x)(x \cdot x \cdot x) = x^6$$

(*d*) $(xy)^3 = x^3y^3 \neq xy^3$ or x^3y القاعدة (4)

$$(xy)^3 = (xy)(xy)(xy) = (x \cdot x \cdot x)(y \cdot y \cdot y) = x^3y^3$$

(*e*) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^5 = \dfrac{x^5}{y^5} \neq \dfrac{x^5}{y}$ or $\dfrac{x}{y^5}$ القاعدة (5)

$$\left(\frac{x}{y}\right)^5 = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y} = \frac{x^5}{y^5}$$

القاعدة (6،2)

(*f*) $\frac{x^2}{x^3} = x^{2-3} = x^{-1} = \frac{1}{x} \neq x^{2/3}$

$$\frac{x^2}{x^3} = \frac{x \cdot x}{x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x}$$

القاعدة (7)

(*g*) $\sqrt{x} = x^{1/2}$

وطالما أن $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$ ومن القاعدة (1) حيث نجمع الأسس فى حالة الضرب فإن أس $\sqrt{x}$ عندما نضيفه إلى نفسه فيجب أن يساوى 1 . وحيث أن أس $\sqrt{x}$ يساوى $\frac{1}{2}$ لذلك :

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x^{1/2} \cdot x^{1/2} = x^{1/2+1/2} = x^1 = x$$

(*h*) $\sqrt[4]{x} = x^{1/4}$

القاعدة (8)

وبالمثل فإن : $\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x} = x$ حيث $x^{1/4} \cdot x^{1/4} \cdot x^{1/4} \cdot x^{1/4} = x^{1/4+1/4+1/4+1/4} = x^1 = x$

انظر تمارين 1.1 ، 1.24 ، 1.26 ، 1.27

مثال 2 : من القاعدة (2) فإنه يمكن بسهولة أن نرى لماذا أى متغير أو عدد غير صفرى مرفوع للقوى صفر يساوى 1 . فمثلاً :

$$x^3/x^3 = x^{3-3} = x^0 = 1; \; 8^5/8^5 = 8^{5-5} = 8^0 = 1$$

1.2 كثيرات الحدود Polynomials

إذا أعطيت المقدار الجبرى $9x^n$ فإن x تسمى متغير لأنه يمكن أن نفترض أى عدد من القيم المختلفة ، وتشير 9 إلى معامل المتغير x . والمقادير الجبرية المتمثلة بصورة بسيطة من عدد حقيقى أو معامل مضروبًا فى متغير أو أكثر مرفوعًا لقوى عدد موجب تسمى مقادير أحادية الحد Monomials . وهذه المقادير الأحادية الحد تجمع وتطرح من كثيرات الحدود . ويسمى كل مقدار أحادى الحد ـ مكونًا كثيرة حدود ـ حدًا (term) ، وتسمى الحدود (terms) التى لها نفس المتغيرات والأسس بالحدود المتشابهة . ودرجة مقدار أحادى الحد هى عبارة عن مجموع أسس متغيراته . أما درجة كثيرة الحدود فهى عبارة عن درجة حدها الأعلى . وقواعد جمع وطرح وضرب وقسمة كثيرات الحدود موضحة أدناه فى الأمثلة 3 إلى 5 وأيضًا فى المسائل 1.3 ، 1.4 .

1.2.1 جمع وطرح كثيرات الحدود Addition and subtraction of Polynomials

الحدود المتشابهة فى كثيرات الحدود يمكن أن تجمع وتطرح من خلال جمع وطرح معاملاتها . أما الحدود غير المتشابهة فلا يمكن أن تجمع أو تطرح .

مثال 3 :

(*a*) $6x^3 + 15x^3 = 21x^3$

(*b*) $18xy - 7xy = 11xy$

(*c*) $(4x^3 + 13x^2 - 7x) + (11x^3 - 8x^2 - 9x) = 15x^3 + 5x^2 - 16x$

(*d*) $(22x - 19y) + (7x + 6z) = 29x - 19y + 6z$

انظر أيضًا المسألة 1.3

1.2.2 ضرب وقسمة الحدود Multiplication and Division of Terms

الحدود المتشابهة وغير المتشابهة تضرب وتقسم من خلال ضرب وقسمة المعاملات والمتغيرات .

مثال 4 : (*)

(a) $20x^4 \cdot 7y^6 = 140x^4y^6$

(b) $6x^2y^3 \cdot 8x^4y^6 = 48x^6y^9$

(c) $12x^3y^2 \cdot 5y^4z^5 = 60x^3y^6z^5$

(d) $3x^3y^2z^5 \cdot 15x^4y^3z^4 = 45x^7y^5z^9$

(e) $\dfrac{24x^5y^3z^7}{6x^3y^2z^4} = 4x^2yz^3$

(f) $\dfrac{35x^2y^7z^5}{5x^6y^4z^8} = 7x^{-4}y^3z^{-3} = \dfrac{7y^3}{x^4z^3}$

1.2.3 ضرب كثيرات الحدود Multiplication of Polynomials

يمكن ضرب كثيرتى الحدود بأن نضرب كل حد من كثيرة الحدود الأولى فى كل حد من كثيرة الحدود الثانية ثم نجمع تلك النواتج معًا .

مثال 5 :

$$(a)\quad (5x+8y)(3x+7y) = 15x^2 + 35xy + 24xy + 56y^2$$
$$= 15x^2 + 59xy + 56y^2$$

$$(b)\quad (4x+5y)(2x-7y-3z) = 8x^2 - 28xy - 12xz + 10xy - 35y^2 - 15yz$$
$$= 8x^2 - 18xy - 12xz - 15yz - 35y^2$$

انظر أيضًا المسألة 1.4 .

1.3 تحليل العوامل Factoring

يعكس تحليل العوامل عملية ضرب لكثيرة الحدود ، حيث يعبر عن كثيرة حدود معينة كناتج لكثيرات حدود مبسطة تسمى عوامل Factors . فالمقدار أحادى الحد مثل العدد 14 يحلل بسهولة بالتعبير عنه كناتج لعوامله العددية مثل : 1.14 ، (2).(7) ، (−1).(−14) ، (−2).(−7) . المقدار الثنائى binomial مثل $5x^4 - 45x^3$ يحلل بالقسمة أو بأخذ العامل المشترك الأكبر $5x^3$ لنحصل على $5x^3(x - 9)$. وتحليل المقدار الثلاثى مثل : $mx^2 + nx + p$ يتطلب القواعد التالية :

1. إذا أعطيت $(mx^2 + nx + p)$. فالعوامل هى $(ax + c)(bx + d)$ حيث (1) $ab = m$ ، (2) $cd = p$ ، (3) $ad + bc = n$.
2. إذا أعطيت $(mx^2 + nxy + py^2)$. فالعوامل هى $(ax + cy)(bx + dy)$ حيث (1) $ab = m$ ، (2) $cd = p$ ، (3) $ad + bc = n$.

وهذا بالضبط مثل السابق أعلاه ومن أجل إثبات مثل هذه القواعد . انظر المسائل 1.28 ، 1.29 .

مثال 6 : لتحليل $(x^2 + 11x + 24)$ بالقاعدة (1) فإن $m = 1$ ، $n = 11$ ، $p = 24$ ونبحث عن العوامل العددية مثل :

1. $a.b = 1$ والعوامل العددية هى : 1.1 ، (−1).(−1) . وللتبسيط فقط سنأخذ فى الاعتبار المجموعات الموجبة للعوامل العددية فى مثل هذه الخطوة وفى الخطوة الثانية أيضًا .

(*) يجب على القارئ أن يعرف أن العلامة (.) تعنى علامة الضرب (×) وأنه لا فرق فى استخدام أيًا منهما أى أن (8.5) تعنى (8×5) . (المترجم)

2. $c.d = 24$ والعوامل العددية هى : 1 . 24 ، 2 . 12 ، 3 . 8 ، 4 . 6 ، 6 . 4 ، 8 . 3 ، 12 . 2 ، 24 . 1 .

3. $ab + bc = 11$ ومع $a = b = 1$ فإن $c + d$ يجب أن تساوى 11 .

وبمجموع التوليفات المختلفة للعوامل العددية من الخطوة الثانية نحصل على $1 + 24 = 25$ ، $2 + 12 = 14$ ، $3 + 8 = 11$ ، $4 + 6 = 10$ ، $6 + 4 = 10$ ، $8 + 3 = 11$ ، $12 + 2 = 14$ ، $24 + 1 = 25$. وطالما أن $3 + 8 = 11$ ، $8 + 3 = 11$. من الخطوة الثالثة فإن 3 ، 8 هى فقط القيم المرشحة لـ d , c من الخطوة الثانية ـ عندما تكون $a = b = 1$ من الخطوة الأولى ـ يحقق جميع المتطلبات أعلاه ، والترتيب لا يشير أى اهتمام ومن ثم :

$$(x^2 + 11x + 24) = (x + 3)(x + 8) \quad \text{or} \quad (x + 8)(x + 3)$$

انظر المسائل 1.5 إلى 1.13 ومن أجل اشتقاق القواعد انظر المسائل 1.28 ، 1.29 .

1.4 الكسور Fractions

الكسور أو الأعداد المنطقية (rational numbers) تتكون من كثيرات الحدود فى كل من البسط والمقام مفترضًا دائمًا أن المقام لا يساوى صفرًا . واختصار الكسر إلى الحدود الدنيا يتطلب إلغاء العوامل المشتركة من البسط والمقام . ورفع الكسر إلى الحدود العليا يعنى ضرب البسط والمقام بنفس كثيرة الحدود غير الصفرية ، وبافتراض أن A ، B ، C ، D كثيرات حدود وأن C ، D لا تساوى صفرًا فإن الكسور تحكم بالقواعد التالية :

1. $\frac{A}{C}\cdot\frac{D}{D}=\frac{A}{C}$
2. $\frac{A}{C}\cdot\frac{B}{D}=\frac{AB}{CD}$
3. $\frac{A}{C}\div\frac{B}{D}=\frac{A}{C}\cdot\frac{D}{B} \quad . \quad B\neq 0$
4. $\frac{A}{C}\pm\frac{B}{C}=\frac{A\pm B}{C}$
5. $\frac{A}{C}\pm\frac{B}{D}=\left(\frac{A}{C}\cdot\frac{D}{D}\right)\pm\left(\frac{B}{D}\cdot\frac{C}{C}\right)=\frac{AD\pm BC}{CD}$

خصائص الكسور موضحة بالمثال 6 والمسائل 1.14 إلى 1.21 .

مثال 7 :

(*a*) إذا ضرب أو قسم كل من البسط والمقام لكسر ما بنفس العدد غير الصفرى أو بكثيرة حدود فإن قيمة الكسر لا تتغير .

القاعدة (1) $$\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{x}=\frac{2x}{3x}=\frac{2\cancel{x}}{3\cancel{x}}=\frac{2}{3}$$

تمدنا القاعدة (1) بالأساس لاختصار الكسر إلى حدوده الدنيا أو رفعه إلى حدوده العليا .

(*b*) عند ضرب الكسور فإنه يتعين علينا أن نضرب البسطات والمقامات بشكل منفصل . وحاصل ضرب البسطات يشكل البسط الناتج وحاصل ضرب المقامات يشكل المقام الناتج .

القاعدة (2) $$\frac{5}{x+6}\cdot\frac{x-9}{x-4}=\frac{5(x-9)}{(x+6)(x-4)}=\frac{5x-45}{x^2+2x-24}$$

(*c*) فى حالة قسمة الكسور ، نحول المقسوم عليه ونضرب

القاعدة (3)

$$\frac{16}{y} \div \frac{7}{y^2-3} = \frac{16}{y} \cdot \frac{y^2-3}{7} = \frac{16y^2-48}{7y}$$

(*d*) نستطيع أن نجمع أو نطرح الكسور إذا كان لها فقط نفس المقام والذى يسمى المقام المشترك . فإذا وجد المقام المشترك فإنه ببساطة نجمع أو نطرح البسطات ونضع النتيجة على المقام المشترك . ونتذكر دائمًا أن كل الحدود تطرح من المجموعات المعطاة بين الأقواس .

القاعدة (4)

$$\frac{6z}{z+5} - \frac{4z+9}{z+5} = \frac{6z-(4z+9)}{z+5} = \frac{2z-9}{z+5}$$

(*e*) فى حالة جمع أو طرح الكسور التى لها مقامات مختلفة فإنه يجب أولاً إيجاد المقام المشترك . ونحصل على المقام المشترك عند ضرب أحد المقامات فى المقام الآخر . ونستطيع إعادة تحديد كل كسر بالمقام المشترك مستخدمين القاعدة (1) ثم تجمع البسطات كما هو الوضع (د) .

القاعدة (5)

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{3}\right) = \frac{4}{12} + \frac{9}{12} = \frac{4+9}{12} = \frac{13}{12}$$

(*f*) وبالمثل

القاعدة (5)

$$\frac{x}{5} - \frac{3}{7x} = \frac{x(7x)-3(5)}{5(7x)} = \frac{7x^2-15}{35x}$$

المقام المشترك الأصغر لكسرين أو أكثر عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة الأقل وذى معامل أصغر والذى يكون قابل للقسمة بالضبط على مقامات الكسور الأصلية. واستخدام المقام المشترك الأصغر يمكننا من توضيح المجموع النهائى والفروق . انظر المسائل 1.19 إلى 1.21 وقد أعيدت مراجعة الكسور فى المسائل 1.14 إلى 1.21 .

1.5 الجذور Radicals

إذا كانت $b^n = a$ حيث $b > 0$ فإنه عند أخذ الجذر n لكل من طرفى المعادلة $b = \sqrt[n]{a}$ حيث ترمز $\sqrt{\ }$ إلى إلى علامة الجذر و a إلى المجذور ، أى المقدار الموجود تحت علامة الجذر و n إلى الرمز ، وفى الجذور المربعة لا نعبر عن الرمز 2 . ولذلك $\sqrt[2]{\ } = \sqrt{\ }$. ومن القواعد (7) ، (8) فى القسم 1.1 فإنه ينبغى أن نكون مدركين لأن $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ و $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

وبافتراض أن y, x أعداد حقيقية غير سالبة وأن n ، m أعداد موجبة مثل $\sqrt[m]{x}$ و $\sqrt[n]{y}$ فإن قواعد الجذور هى :

1. $(\sqrt[n]{x})^n = x$
2. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$
3. $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$
4. $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}, \qquad y \neq 0$

انظر فى إثبات القاعدة (1) المسألة 1.30 .

مثال 8 : يمكن استخدام قوانين الجذور لتبسيط المقادير الجبرية التالية . ولاحظ أنه للجذور العددية الزوجية فإن الحلول الموجبة والسالبة متساوية وصحيحة فى الحالتين .

EXAMPLE 8. The laws of radicals are used to simplify the following expressions. Note that for even-numbered roots, positive and negative answers are equally valid.

(a) $(\sqrt[3]{27})^3 = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{27} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ القاعدة (1)

(b) $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = \pm 2,$ حيث $\sqrt{\ } = \sqrt[2]{\ }$ القاعدة (2)
مع $\sqrt[3]{64} = 4, \sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt{4} = \pm 2$

(c) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{144} = \pm 12$ القاعدة (3)

(d) $\dfrac{\sqrt[4]{1782}}{\sqrt[4]{22}} = \sqrt[4]{\dfrac{1782}{22}} = \sqrt[4]{81} = \pm 3$ القاعدة (4)

انظر أيضًا المسائل 1.22 ، 1.23 والمسائل 1.25 إلى 1.27 .

1.6 ترتيب العمليات الرياضية Order of Mathematical Operations

إذا أعطيت مقدارًا جبريًا يتطلب عمليات ضرب رياضية فإنه ينبغى أن ننجز أولاً الحسابات فيما بين الأقواس . فإذا كانت هناك أقواس داخل الأقواس فإن الأقواس الداخلية يجب أن تحسب أولاً . وفى نطاق الأقواس نرفع أولاً الثوابت والمتغيرات إلى قوى الأسس الخاصة بها . وننجز الضرب والقسمة قبل الجمع والطرح . وعند تنفيذ العمليات لنفس الأولوية فإن الإجراء يكون من اليسار إلى اليمين . والخلاصة هى :

1. نبدأ بالأقواس وبخاصة من الأعمق .
2. نرفع كل الحدود لقوى الأسس الخاصة بها .
3. نضرب ونقسم قبل الجمع والطرح .
4. للأولويات المتشابهة تتحرك من اليسار إلى اليمين .

مثال 9 : تم تنفيذ الخطوات التالية لحل المسألة الآتية :

EXAMPLE 9. The following steps are performed to solve

$$\frac{(5^2 \cdot 6)}{10} - 8$$

1. $5^2 = 25$
2. $25 \cdot 6 = 150$
3. $\dfrac{150}{10} = 15$
4. $15 - 8 = 7$

$$\frac{(5^2 \cdot 6)}{10} - 8 = 7$$

1.7 استخدام حاسبة الجيب Use of a Pocket Calculator

حاسبات الجيب مفيدة للتحقيق من الحسابات العادية ومن العمليات المهدرة للوقت . والقواعد المختلفة للعملية الرياضية مبينة وموضحة أدناه وتتضمن بعض القواعد التى قد لا نحتاج إليها إلا فى الأجزاء الأخيرة من هذا الكتاب .

1.7.1 جمع عددين Addition of Two Numbers

لجمع عددين ، ندخل العدد الأول ، ونضغط المفتاح $\boxed{+}$ ثم ندخل العدد الثانى ومن ثم نضغط المفتاح $\boxed{=}$ لنحصل على المجموع الكلى .

مثال 10 :

(*a*) للحصول على 139 + 216 ، ندخل 139 ، نضغط على المفتاح $\boxed{+}$ ثم ندخل 216 ، ونضغط على المفتاح $\boxed{=}$ لنحصل على 355 = 216 + 139 .

(*b*) للحصول على 38.75 + 1025 ، ندخل 1025 ، نضغط على المفتاح $\boxed{+}$ ثم ندخل 38.75 ، ونضغط على $\boxed{=}$ لنحصل على 1063.75 = 38.75 + 1025 . تدرب على هذا المثال والأمثلة اللاحقة مستخدماً أعداداً بسيطة لكى تتعرف على الحلول ولكى ترى ما إذا كنت تقوم بالإجراء بصورة صحيحة .

1.7.2 جمع أكثر من عددين Addition of More Than Two Numbers

لجمع أكثر من عددين ، فإن أى عدد يدخل ، يتبع بالضغط على المفتاح $\boxed{+}$ حتى يتم إدخال كل الأعداد ، ومن ثم نضغط على المفتاح $\boxed{=}$ لنحصل المجموع الكلى . والضغط على المفتاح $\boxed{=}$ عند أى لحظة زمنية بعد العدد سوف يعطى المجموع الجزئى عند تلك النقطة .

مثال 11 : للحصول على 187 + 216 + 139 ، ندخل 139 ، ثم نضغط على المفتاح $\boxed{+}$ ، ندخل 216 ، نضغط على المفتاح $\boxed{+}$ مرة ثانية ، ندخل 187 ونضغط على المفتاح $\boxed{=}$ لنحصل على 542 = 187 + 216 + 139 . والضغط المفتاح $\boxed{=}$ بعد 216 سوف يبين المجموع الجزئى لـ 216 + 139 والذى يساوى 355 مثلما الحال فى المثال السابق .

1.7.3 الطرح Subtraction

للحصول على الفرق *A* – *B* ، ندخل *A* ، نضغط المفتاح $\boxed{-}$ وندخل *B* ، ومن ثم نضغط المفتاح $\boxed{=}$ لنحصل على الباقى ، والطرح المتعدد شبيه بالجمع المتعدد فى 1.7.2 مع المفتاح $\boxed{-}$ بدلاً من المفتاح $\boxed{+}$.

مثال 12 :

(*a*) للحصول على 708 – 315 ، ندخل 315 ، ونضغط المفتاح $\boxed{-}$ ثم ندخل 708 ، ونضغط على المفتاح $\boxed{=}$ لنحصل على 393 = 708 – 315 .

(*b*) للحصول على 79.62 – 528 ، ندخل 528 ، نضرب المفتاح $\boxed{-}$ ثم ندخل 79.62 ونضغط على المفتاح $\boxed{=}$ لنحصل على 448.38 = 79.62 – 528 .

1.7.4 الضرب Multiplication

لضرب عددين ، ندخل العدد الأول ، نضغط المفتاح $\boxed{\times}$ ، ندخل العدد الثانى ، ونضغط على المفتاح $\boxed{=}$ لنحصل على الناتج . والضرب المتسلسل شبيه بالجمع المتعدد فى 1.7.2 مع المفتاح $\boxed{\times}$ بدلاً من المفتاح $\boxed{+}$.

مثال 13 :

(*a*) للحصول على $486 . 27$ ، ندخل 486 ، نضغط المفتاح $\boxed{\times}$ ثم ندخل 27 ونضغط المفتاح $\boxed{=}$ لنعلم أن $486 . 27 = 13,122$.

(*b*) للحصول على $-35 . 149$ ، ندخل 149 ، نضغط المفتاح $\boxed{\times}$ ثم ندخل 35 ونضغط المفتاح $\boxed{\pm}$ لنجعله سالبًا ثم نضغط المفتاح $\boxed{=}$ لنعلم أن $-35 . 149 = -5215$.

ملاحظة : يجب أن ندرك الاختلاف بين المفتاح $\boxed{-}$ والمفتاح $\boxed{\pm}$. فالمفتاح $\boxed{-}$ يلقن عملية الطرح . والمفتاح $\boxed{\pm}$ يغير قيمة القيد السابق من موجب إلى سالب أو من سالب إلى موجب .

1.7.5 القسمة Division

قسمة *A* على *B* تنجز بإدخال *A* ثم نضغط المفتاح $\boxed{\div}$ ومن ثم ندخل *B* ونضغط المفتاح $\boxed{=}$.

مثال 14 :

(*a*) للحصول على $6715 \div 79$ ، ندخل 6715 ، نضغط على المفتاح $\boxed{\div}$ ثم ندخل 79 ، ونضغط المفتاح $\boxed{=}$ فيظهر من العرض أنه يساوى 85 محدداً أن $6715 \div 79 = 85$.

(*b*) للحصول على $-279 = 9.36 \div 72.128$ ، ندخل 279.36 ثم نضغط المفتاح $\boxed{\pm}$ لنجعله سالبًا ثم نضغط المفتاح $\boxed{\div}$ وندخل 72.128 ثم نضغط المفتاح $\boxed{=}$ لنحصل على $-297.36 \div 72.128 = -4.1226708$.

1.7.6 المرفوع للقوى Raising to a Power

لكى نرفع عدد ما لقوى معينة ، ندخل العدد ثم نضغط المفتاح $\boxed{y^x}$ ثم ندخل الأس ونضغط المفتاح $\boxed{=}$.

مثال 15 :

(*a*) للحصول على 8^5 ، ندخل 8 ، نضغط على المفتاح $\boxed{y^x}$ ثم ندخل 5 ، ونضغط على المفتاح $\boxed{=}$ لنعلم أن $8^5 = 32,768$ تدرب على هذا المثال والأمثلة اللاحقة باستخدام أعداد بسيطة حتى يمكن أن نتعرف على الإجابات .

(*b*) للحصول على $36^{0.25}$ ، ندخل 36 ، نضغط المفتاح $\boxed{y^x}$ ندخل 0.25 ، ونضغط المفتاح $\boxed{=}$ لنرى أن $36^{0.25} = 2.4494897$.

(*c*) للحصول على 2^{-3} ، ندخل 2 ، نضغط على المفتاح $\boxed{y^x}$ ندخل 3 ونضغط على المفتاح $\boxed{\pm}$ لنجعل القيمة سالبة ثم نضغط على المفتاح $\boxed{=}$ لنكتشف أن $2^{-3} = 0.125$.

1.7.7 إيجاد الجذر التربيعى Finding a Square Root

للحصول على الجذر التربيعى لعدد ما ، ندخل العدد ثم نضغط المفتاح $\boxed{\sqrt{x}}$ لنحصل مباشرة على الجذر التربيعى دون الحاجة إلى الضغط على المفتاح $\boxed{=}$. ويلاحظ أن المفتاح $\boxed{\sqrt{x}}$ فى معظم الحاسبات يكون عكسيًا (انتقال أو الوظيفة الثانية) للمفتاح $\boxed{x^2}$. ولكى نجهز المفتاح $\boxed{\sqrt{x}}$ للعمل ، يجب أولاً أن نضغط المفتاح

$\boxed{\text{INV}}$ (shift أو 2df) ثم نضغط بعد ذلك مباشرة على المفتاح $\boxed{x^2}$.

مثال 16 : للحصول على $\sqrt{529}$ ، ندخل 529 ، ثم نضغط على المفتاح $\boxed{\sqrt{x}}$ لنرى فى الحال أن ± 23 هـى الجذر التربيعى 529 .

إذا كـان المفتاح $\boxed{\sqrt{x}}$ عكسيًا (انتقال أو الوظيفة الثانية) للمفتـاح $\boxed{x^2}$ ندخل 529 ثم نضغط المفتاح $\boxed{\text{INV}}$ ($\boxed{\text{Shift}}$ أو $\boxed{\text{2dF}}$) متبوعـًا بالضغط على المفتـاح $\boxed{x^2}$. لكـى ننشـط المفتاح $\boxed{\sqrt{x}}$ وسـوف نـرى حالاً أن $\sqrt{529} = 23$ دون الحاجة إلى الضغط على المفتاح $\boxed{=}$.

1.7.8 إيجاد الجذر n Finding the nth Root

للحصول على الجذر n لعدد ما ، ندخل العدد ، نضغط المفتاح $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ ثم ندخل قيمة الجذر n ونضغط المفتاح $\boxed{=}$ لنحصل على الجذر . إذا كان المفتاح $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ عكسيًا (انتقال أو وظيفة ثانية) للمفتاح $\boxed{y^x}$، ندخل العدد ، نضغط المفتاح $\boxed{\text{INV}}$ ($\boxed{\text{Shift}}$ أو $\boxed{\text{2dF}}$) متبوعًا بالضغط على المفتاح $\boxed{g^x}$ ثم ندخل قيمة الجذر n ونضغط المفتاح $\boxed{=}$ لنحصل على الحل .

مثال 17 :

(*a*) للحصول على $\sqrt[3]{17{,}576}$ ، ندخل 17,576 ، نضغط المفتاح $\boxed{\text{INV}}$ متبوعًا بالضغط على المفتاح $\boxed{y^x}$ ، وندخل 3 ثم نضغط على المفتاح $\boxed{=}$ لنعلم أن $\sqrt[3]{17{,}576} = 26$.

(*b*) للحصول على $\sqrt[5]{32{,}768}$ ، ندخل 32,768 ، نضغط المفتاح $\boxed{\text{INV}}$ متبوعًا بالضغط على المفتاح $\boxed{y^x}$ ، وندخل 5 ثم نضغط على المفتاح $\boxed{=}$ لنعلم أن $\sqrt[5]{32{,}768} = 8$.

(*c*) من القاعدة (8) فى القسم 1.1 ، $\sqrt[5]{32{,}768} = 32768^{1/5} = 32768^{0.2}$ ولكى نستخدم هـذه الصيغة الأخيرة ، ندخـل 32768 ، ونضغط المفتاح $\boxed{y^x}$ ، ندخـل 0.2 ، ونضغط المفتاح $\boxed{=}$ لنجـد أن $32768^{0.2} = 8$ ، ولكى نستعمل التحويلات المتشابهة نعيد إلى الأذهان أن :

$\sqrt[4]{x} = x^{1/4} = x^{0.25}$ ، $\sqrt[3]{x} = x^{1/3} = x^{0.33}$ ، $\sqrt{x} = x^{1/2} = x^{0.5}$. وهـكذا . انظـر المسائـل 1.25 إلى 1.27 .

1.7.9 اللوغاريتمات Logarithms

لإيجاد قيمة اللوغاريتم العام $\log_{10} x$ ، ندخل قيمـة x ثم نضغط المفتاح $\boxed{\text{log}}$ ويظهر الحـل دون الحاجة إلى الضغط على المفتاح $\boxed{=}$.

مثال 18 :

(*a*) للحصول على قيمة log 24 ، ندخل 24 ثم نضغط المفتاح $\boxed{\text{log}}$ ويعرض على الشاشة الرقم 1.3802112 محدداً أن $\log 24 = 1.3802112$.

(*b*) لإيجاد log 175 ، ندخل 175 ، ونضغط المفتاح $\boxed{\text{log}}$ وسوف نرى 2.243038 وهى قيمة log 175 .

1.7.10 اللوغاريتمات الطبيعية Nature Logarithms

لإيجاد قيمة اللوغاريتم الطبيعى $\ln x$ ، ندخل قيمة x ثم نضغط المفتاح $\boxed{\ln x}$ ويظهر الحل دون الحاجة إلى الضغط على المفتاح $\boxed{=}$.

مثال 19 :

(*a*) لإيجاد $\ln 20$ ، ندخل 20 ، ونضغط المفتاح $\boxed{\ln x}$ لنرى أن $2.9957323 = \ln 20$.

(*b*) لإيجاد $\ln 0.75$ ، ندخل 0.75 ونضغط المفتاح $\boxed{\ln x}$ لنجد أن $\ln 0.75 = -0.2876821$.

1.7.11 الدوال الأسية Exponential Functions

للحصول على قيمة الدالة الأسية $y = a^x$ ، ندخل قيمة a ونضغط المفتاح $\boxed{y^x}$ ثم ندخل قيمة x ونضغط على المفتاح $\boxed{=}$. وهذا شبيه بما تم عمله فى القسم 1.7.6 .

مثال 20 :

(*a*) إذا أعطيت $y = 1.5^{3.2}$ ، ندخل 1.5 ، ونضغط المفتاح $\boxed{y^x}$ ثم ندخل 3.2 ونضغط المفتاح $\boxed{=}$ لنحصل على $1.5^{3.2} = 3.6600922$.

(*b*) إذا كانت $y = 256^{-1.25}$ ، ندخل 256 ، نضغط المفتاح $\boxed{y^x}$ ثم لندخل 1.25 متبوعًا بالضغط على المفتاح $\boxed{\pm}$ لنجعله سالبًا ثم نضغط على المفتاح $\boxed{=}$ لنعلم أن $256^{-1.5} = 0.0009766$.

1.7.12 الدوال الأسية الطبيعية Natural Exponential Functions

لإيجاد قيمة الدالة الأسية الطبيعية $y = e^x$ ، ندخل قيمة x ، نضغط على المفتاح $\boxed{e^x}$ ويظهر الحل فى الحال دون الحاجة إلى الضغط على المفتاح $\boxed{=}$. إذا كان المفتاح $\boxed{e^x}$ عكسيًا (انتقال أو الوظيفة الثانية) للمفتاح $\boxed{\ln x}$ ، ندخل القيمة x ونضغط المفتاح $\boxed{\text{INV}}$ متبوعًا بالضغط على المفتاح $\boxed{\ln x}$ ويظهر الحل مباشرة .

مثال 21 :

(*a*) إذا أعطيت $y = e^{1.4}$ ، ندخل 1.4 ، نضغط على المفتاح $\boxed{\text{INV}}$ متبوعًا بالضغط على المفتاح $\boxed{\ln x}$ وسوف نرى أن $e^{1.4} = 4.0552$.

(*b*) إذا كانت $y = e^{-0.65}$ ، ندخل 0.65 ونضغط على المفتاح $\boxed{\pm}$ لنجعله سالبًا ثم نضغط المفتاح $\boxed{\text{INV}}$ متبوعًا بالضغط على المفتاح $\boxed{\ln x}$ لنجد أن $e^{-0.65} = 0.5220458$. انظر أيضًا المسائل 1.24 إلى 1.27 .

مسائل محلولة

Exponents الأسس

1.1. استخدم قواعد الأسس من القسم 1.1 لتبسيط المقادير التالية .

1.1. Simplify the following expressions using the rules of exponents from Section 1.1.

(*a*) $x^3 \cdot x^4 \cdot$

$$x^3 \cdot x^4 = x^{3+4} = x^7$$ القاعدة (1)

(*b*) $x^5 \cdot x^{-3}$

$$x^5 \cdot x^{-3} = x^{5+(-3)} = x^2$$ القاعدة (1)

$$\left[x^5 \cdot x^{-3} = x^5 \cdot \frac{1}{x^3} = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \frac{1}{x \cdot x \cdot x} = x^2\right]$$

(*c*) $x^{-2} \cdot x^{-4}$

$$x^{-2} \cdot x^{-4} = x^{-2+(-4)} = x^{-6} = \frac{1}{x^6}$$ القاعدة (1)

$$\left[x^{-2} \cdot x^{-4} = \frac{1}{x \cdot x} \cdot \frac{1}{x \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x^6}\right]$$

(*d*) $x^{1/2} \cdot x^3$

$$x^{1/2} \cdot x^3 = x^{(1/2)+3} = x^{3\frac{1}{2}} = x^{7/2} = \sqrt{x^7}$$ القاعدة (7) و (1)

$$[x^{1/2} \cdot x^3 = (\sqrt{x})(x \cdot x \cdot x) = (\sqrt{x})(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) = (x^{1/2})^7 = x^{7/2}]$$

(*e*) $\dfrac{x^{10}}{x^6}$

$$\frac{x^{10}}{x^6} = x^{10-6} = x^4$$ القاعدة (2)

(*f*) $\dfrac{x^4}{x^6}$

$$\frac{x^4}{x^6} = x^{4-6} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$ القاعدة (2) و (6)

$$\left[\frac{x^4}{x^6} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x^2}\right]$$

(*g*) $\dfrac{x^5}{x^{-6}}$

$$\frac{x^5}{x^{-6}} = x^{5-(-6)} = x^{5+6} = x^{11}$$ القاعدة (2)

$$\left[\frac{x^5}{x^{-6}} = \frac{x^5}{(1/x^6)} = x^5 \cdot x^6 = x^{11}\right]$$

(*h*) $\dfrac{x^5}{\sqrt{x}}$

$$\frac{x^5}{\sqrt{x}} = \frac{x^5}{x^{1/2}} = x^{5-(1/2)} = x^{4\frac{1}{2}} = x^{9/2} = \sqrt{x^9}$$ القاعدة (2) و (7)

(*i*) $(x^4)^{-3}$

القاعدة (3) و (6)

$$(x^4)^{-3} = x^{4(-3)} = x^{-12} = \frac{1}{x^{12}}$$

(*j*) $(\sqrt[3]{x})^4$

القاعدة (3) و (8)

$$(\sqrt[3]{x})^4 = (x^{1/3})^4 = x^{(1/3)(4)} = x^{4/3}$$

(*k*) $\frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{y^3}$

القاعدة (6) و (4)

$$\frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{y^3} = x^{-3} \cdot y^{-3} = (xy)^{-3} = \frac{1}{(xy)^3}$$

(*l*) $\left(\frac{x^5}{y^7}\right)^2$

القاعدة (5) و (3)

$$\left(\frac{x^5}{y^7}\right)^2 = \frac{x^{5\cdot 2}}{y^{7\cdot 2}} = \frac{x^{10}}{y^{14}}$$

انظر أيضًا المسائل 1.24 ، 1.26 ، 1.27 .

كثيرات الحدود Polynomials

1.2. أجرى العمليات الرياضية المحددة سابقًا بفاعل كثيرات الحدود التالية :

1.2. Perform the indicated arithmetic operations on the following polynomials:

(*a*) $35xy + 52xy$

$35xy + 52xy = 87xy$

(*b*) $22yz^2 - 46yz^2$

$22yz^2 - 46yz^2 = -24yz^2$

(*c*) $79x^2y^3 - 46x^2y^3$

$79x^2y^3 - 46x^2y^3 = 33x^2y^3$

(*d*) $16x_1x_2 + 62x_1x_2$

$16x_1x_2 + 62x_1x_2 = 78x_1x_2$

(*e*) $57y_1y_2 - 70y_1y_2$

$57y_1y_2 - 70y_1y_2 = -13y_1y_2$

(*f*) $0.5x^2y^3z^5 + 0.9x^2y^3z^5$

$0.5x^2y^3z^5 + 0.9x^2y^3z^5 = 1.4x^2y^3z^5$

1.3. اجمع أو اطرح كثيرات الحدود التالية كما تحدد سابقًا . ولاحظ أنه فى حالة الطرح فإن إشارة كل حد فيما بين الأقواس يجب أن تتغير قبل جمع العناصر المتماثلة :

1.3. Add or subtract the following polynomials as indicated. Note that in subtraction the sign of every term within the parentheses must be changed before corresponding elements are added.

(*a*) $(25x - 9y) + (32x + 16y)$

$$(25x - 9y) + (32x + 16y) = 57x + 7y$$

(*b*) $(84x - 31y) - (76x + 43y)$

اضرب كل حد فى المجموعة الثانية التى بين القوسين بـ (-1) والذى يؤدى بالفعل إلى تغيير الإشارة للحدود المذكورة ومن ثم نقوم بعملية الجمع لنحصل على :

$$(84x - 31y) - (76x + 43y) = 84x - 31y - 76x - 43y = 8x - 74y$$

(*c*) $(9x^2 + 7x) - (3x^2 - 4x)$

نغير الإشارات لكل حد من حدود المجموعة الثانية فيما بين القوسين ثم نقوم بعملية الجمع لنحصل على

$$(9x^2+7x)-(3x^2-4x)=9x^2+7x-3x^2+4x=6x^2+11x$$

(*d*) $(42x^2+23x)-(5x^2+11x-82)$

$$(42x^2+23x)-(5x^2+11x-82)=42x^2+23x-5x^2-11x+82$$
$$=37x^2+12x+82$$

1.4. أجرى العمليات المحددة سابقًا وتذكر أنّ كل حد فى كثيرة الحدود الأولى يجب أن يضرب فى كل حد فى كثيرة الحدود الثانية ثم نجمع النواتج .

1.4. Perform the indicated operations, recalling that each term in the first polynomial must be multiplied by each term in the second and their products summed.

(*a*) $(2x+7)(4x-5)$

$$(2x+7)(4x-5)=8x^2-10x+28x-35=8x^2+18x-35$$

(*b*) $(5x-6y)(4x-3y)$

$$(5x-6y)(4x-3y)=20x^2-15xy-24xy+18y^2=20x^2-39xy+18y^2$$

(*c*) $(2x-9)^2$

$$(2x-9)^2=(2x-9)(2x-9)=4x^2-18x-18x+81=4x^2-36x+81$$

(*d*) $(2x+3y)(2x-3y)$

$$(2x+3y)(2x-3y)=4x^2-6xy+6xy-9y^2=4x^2-9y^2$$

(*e*) $(4x+3y)(5x^2-2xy+6y^2)$

$$(4x+3y)(5x^2-2xy+6y^2)=20x^3-8x^2y+24xy^2+15x^2y-6xy^2+18y^3$$
$$=20x^3+7x^2y+18xy^2+18y^3$$

(*f*) $(3x^3-5x^2y^2-2y^3)(7x-4y)$

$$(3x^3-5x^2y^2-2y^3)(7x-4y)=21x^4-12x^3y-35x^3y^2+20x^2y^3-14xy^3+8y^4$$

تحليل العوامل Factoring

1.5. حلل كل من كثيرات الحدود التالية بأخذ العامل المشترك الأكبر .

1.5. Simplify each of the following polynomials by factoring out the greatest common factor:

(*a*) $32x-8$
$32x-8=8(4x-1)$

(*b*) $18x^2+27x$
$18x^2+27x=9x(2x+3)$

(*c*) $14x^5-35x^4$
$14x^5-35x^4=7x^4(2x-5)$

(*d*) $45x^2y^5-75x^4y^3$
$45x^2y^5-75x^4y^3=15x^2y^3(3y^2-5x^2)$

(*e*) $55x^8y^9-22x^6y^4-99x^5y^7$

$$55x^8y^9-22x^6y^4-99x^5y^7=11x^5y^4(5x^3y^5-2x-9y^3)$$

1.6. حلل كل ما يلى مستخدمًا المعاملات العددية :

1.6. Factor each of the following using integer coefficients:

(*a*) $x^2+10x+21$

استخدمنا هنا الرموز من القاعدة (1) فى القسم 1.3 حيث $m=1$ ، $n=10$ ، $p=21$.

وللتبسيط نحدد مجال البحث هنا عن الأعداد الموجبة مثل :

(1) $a . b = 1$ $[1, 1]$ ومن الآن فصاعداً فعندما $a = b = 1$ فإن هذه الخطوة سوف تحذف ونأخذ فى الاعتبار فقط ترتيب واحد :

(2) $c . d = 21$ والعوامل العددية هى : $[1, 21; 3, 7; 7, 3; 21, 1]$.

(3) $ab + bc = 10$ ، وحيث $a = 1 = b$ فإن $(c + d)$ يجب أن تساوى 10 وطالما فقط $3 + 7$ و $7 + 3$ تساوى 10 . إذاً

$$x^2 + 10x + 21 = (x + 3)(x + 7) \quad \text{أو} \quad (x + 7)(x + 3)$$

وكلما $a . b = 1$ فإن ترتيب العوامل غير مهم وأن ترتيب واحد سوف يذكر فقط

(*b*) $x^2 + 8x + 16$

(1) $c \cdot d = 16$ $[1, 16; 2, 8; 4, 4]$
(2) $c + d = 8$ $[1 + 16 \neq 8; 2 + 8 \neq 8; 4 + 4 = 8]$

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)(x + 4)$$

(*c*) $x^2 + 13x + 36$

(1) $c \cdot d = 36$ $[1, 36; 2, 18; 3, 12; 4, 9; 6, 6]$
(2) $c + d = 13$ [only $4 + 9 = 13$]

$$x^2 + 13x + 36 = (x + 4)(x + 9)$$

1.7. حلل كل مما يلى . ولاحظ أن معامل الحد x سالب فى حين أن الحد الثابت موجب .

1.7. Factor each of the following, noting that the coefficient of the x term is negative while the constant term is positive.

(*a*) $x^2 - 13x + 30$

حيث إن $(c . d)$ موجب و $(c + d)$ سالب فإن العاملين العدديين يجب أن يكون كلاهما سالبين . ولا نستطيع أن نحدد أنفسنا فقط بالعوامل الموجبة لـ c و d .

(1) $c \cdot d = 30$ $[-1, -30; -2, -15; -3, -10; -5, -6]$
(2) $c + d = -13$ [فقط $-3 + (-10) = -13$]

$$x^2 - 13x + 30 = (x - 3)(x - 10)$$

(*b*) $x^2 - 15x + 36$

(1) $c \cdot d = 36$ $[-1, -36; -2, -18; -3, -12; -4, -9; -6, -6]$
(2) $c + d = -15$ $[-3 + (-12) = -15]$

$$x^2 - 15x + 36 = (x - 3)(x - 12)$$

1.8. حلل كل مما يلى . ولاحظ أن معامل الحد x الآن موجب والحد الثابت سالب .

1.8. Factor each of the following, noting that the coefficient of the x term is now positive and the constant term is negative.

(*a*) $x^2 + 19x - 42$

حيث إن $(c . d)$ سالب فإن العاملين العددين يجب أن يكونا لهما إشارات عكسية . وحينما يكون $(c + d)$ موجب فإن العامل ذى القيمة المطلق الكبرى يجب أن يكون موجبًا .

(1) $c \cdot d = -42$ $[-1, 42; -2, 21; -3, 14; -6, 7]$
(2) $c + d = 19$ [فقط $-2 + 21 = 19$]

$$x^2 + 19x - 42 = (x - 2)(x + 21)$$

(*b*) $x^2 + 18x - 63$

(1) $c \cdot d = -63$ $[-1, 63; -3, 21; -7, 9]$
(2) $c + d = 18$ $[-3 + 21 = 18]$

$$x^2 + 18x - 63 = (x - 3)(x + 21)$$

1.9. حلل المقادير الجبرية التالية ولاحظ أن كل من معامل الحد x والحد الثابت لهما إشارات سالبة .

1.9. Factor each of the following expressions, in which both the coefficient of the x term and the constant term are now negative.

(*a*) $x^2 - 8x - 48$

حيث إن $(c . d)$ و $(c + d)$ سالبان ، فإن العاملين يجب أن يكون لهما إشارات مختلفة وأن العامل ذا القيمة المطلقة الكبرى يجب أن يكون سالبًا .

(1) $c \cdot d = -48$ $[1, -48; 2, -24; 3, -16; 4, -12; 6, -8]$
(2) $c + d = -8$ $[4 + (-12) = -8]$

$$x^2 - 8x - 48 = (x + 4)(x - 12)$$

(*b*) $x^2 - 26x - 56$

(1) $c \cdot d = -56$ $[1, -56; 2, -28; 4, -14; 7, -8]$
(2) $c + d = -26$ $[2 + (-28) = -26]$

$$x^2 - 26x - 56 = (x + 2)(x - 28)$$

1.10. حلل ما يلى ولاحظ أنه لا يوجد الحد x والحد الثابت سالب .

1.10. Factor each of the following, noting that there is no x term and the constant term is negative.

(*a*) $x^2 - 81$

وهنا $(c . d)$ سالب وأن $c + d = 0$. ولكى يكون هذا صحيح فإن العوامل يجب أن يكون لها إشارات مختلفة ونفس القيمة المطلقة .

(1) $c \cdot d = -81$ $[9, -9]$
(2) $c + d = 0$ $[9 + (-9) = 0]$

$$x^2 - 81 = (x + 9)(x - 9)$$

(*b*) $x^2 - 169$

(1) $c \cdot d = -169$ $[13, -13]$
(2) $c + d = 0$ $[13 + (-13) = 0]$

$$x^2 - 169 = (x + 13)(x - 13)$$

1.11. استخدم الطرق والإجراءات الموضحة فى المسائل 1.5 إلى 1.10 لتحليل المقادير الجبرية التى يكون فيها معامل الحد x^2 لا يعادل 1 .

1.11. Use the techniques and procedures developed in Problems 1.5 to 1.10 to factor the following expressions in which the coefficient of the x^2 term is no longer limited to 1.

(*a*) $5x^2 + 47x + 18$

(1) $a . b = 5$ والعوامل هى : $[5, 1]$ وتعطى $(5x + ?)(x + ?)$.

(2) $c . d = 18$ والعوامل هى : $[1, 18; 2, 9; 3, 6]$.

(3) $ad + bc = 47$ وهنا يجب أن نجرب كل الأزواج للعوامل المحتملة من الخطوة (2) فى كلا الترتيبين

فى الخطوة (1) أى [5, 1] مع [1, 18; 18, 1; 2, 9; 9, 2; 3, 6; 6, 3] .

ومن كل التوليفات المحتملة للعوامل السابقة نجد فقط أن $(5 . 9) + (1 . 2) = 47$ نرتب العوامل بحذر ونتأكد بأن 5 تضرب فى 9 وأن 1 يضرب فى 2 . ولذلك نحصل على :

$$5x^2 + 47x + 18 = (5x + 2)(x + 9)$$

(*b*) $3x^2 + 22x + 24$

(1) $a . b = 3$ العوامل هى : [3, 1] وتعطى $(3x + ?)(x + ?)$.

(2) $c . d = 24$ والعوامل [1, 24; 24, 1; 2, 12; 12, 2; 3, 8; 8, 3; 4, 6; 6, 4] .

(3) $ad + bc = 22$ $[(3 . b) + (1 . 4) = 22]$ ونرتب العوامل لنتأكد من أن 3 تضرب فى 6 وأن 1 يضرب فى 4 ولنحصل على :

$$3x^2 + 22x + 24 = (3x + 4)(x + 6)$$

(*c*) $3x^2 - 35x + 22$

(1) $a . b = 3$ ، [3, 1] .

(2) $c . d = 22$ والعوامل هى : [−1, −22; −22, −1; −2, −11; −11, −2] كما فى المسألة 1.7 .

(3) $ad + bc = -35$ $[(3 . -11) + (1 . -2) = -35]$ ونعيد ترتيب العوامل بحيث نضرب 3 فى −11 ونضرب 1 فى −2 لنحصل على :

$$3x^2 - 35x + 22 = (3x - 2)(x - 11)$$

(*d*) $7x^2 - 32x + 16$

(1) $a . b = 7$ ، [7, 1] .

(2) $c . d = 16$ والعوامل هى : [−1, −16; −16, −1; −2, −8; −8, −2; −4, −4] .

(3) $ad + bc = -32$ $[(7 . -4) + (1 . -4) = -32]$

$$7x^2 - 32x + 16 = (7x - 4)(x - 4)$$

(*e*) $5x^2 + 7x - 52$

(1) $a . b = 5$ ، [5, 1] .

(2) $c . d = -52$ [1, 52; 2, 26; 4, 13] كل توليفة يجب أن تدرس فى كلا الترتيبين مع تغيير الإشارة .

(3) $ad + bc = 7$ $[(5 . 4) + (1 . -13) = 7]$

$$5x^2 + 7x - 52 = (5x - 13)(x + 4)$$

(*f*) $3x^2 - 13x - 56$

(1) $a . b = 3$ ، [3, 1] .

(2) $c . d = -56$ [1, 56; 2, 28; 4, 14; 7, 8] تدرس كما فى (*e*) .

(3) $ad + bc = -13$ $[(3 . -7) + (1 . 8) = -13]$

$$3x^2 - 13x - 56 = (3x + 8)(x - 7)$$

(*g*) $11x^2 + 12x - 20$

(1) $a . b = 11$ ، [11, 1] .

(2) $c . d = -20$ [1, 20; 2, 10, 4; 5] تدرس كما ذكر أعلاه .

(3) $ad + bc = 12$ [(11 . 2) + (1 . −10) = −32]

$$11x^2 + 12x - 20 = (11x - 10)(x + 2)$$

(*h*) $7x^2 - 39x - 18$

(1) $a . b = 7$ ، [7, 1] .

(2) $c . d = -18$ [1, 18; 2, 9; 3, 6] تدرس كما ذكر أعلاه .

(3) $ad + bc = -39$ [(7 . −6) + (1 . 3) = −39]

$$7x^2 - 39x - 18 = (7x + 3)(x - 6)$$

1.12. أعد حل المسألة 1.11 لتحليل المقادير الجبرية التالية حيث تتعدد عوامل معامل الحد x^2 .

1.12. Redo Problem 1.11 to factor the following expressions in which the coefficient of the x^2 term now has multiple factors.

(*a*) $6x^2 + 23x + 20$

(1) $a . b = 7$ والعوامل هى : [1, 6; 2, 3; 3, 2; 6, 1] .

(2) $c . d = 20$ والعوامل هى : [1, 20; 2, 10; 4, 5; 5, 4;10, 2; 20; 1] .

(3) $ad + bc = 23$.

يجب أن نجرب كل الأزواج للعوامل المحتملة من الخطوة (2) مع كل العوامل المحتملة من الخطوة (1) ومن كل التوليفات المحتملة للعوامل المشار إليها أعلاه نجد فقط أن (2 . 4) + (3 . 5) = 23 ونرتب العوامل بحذر حتى نتأكد من أن 2 تضرب فى 4 وأن 3 تضرب فى 5 لنحصل على :

$$6x^2 + 23x + 20 = (2x + 5)(3x + 4)$$

(*b*) $4x^2 + 15x + 14$

(1) $a . b = 4$ [1, 4; 2, 2; 4, 1] .

(2) $c . d = 14$ [1, 14; 2, 7; 7, 2; 14; 1]

(3) $ad + bc = 15$ [(4 . 2) + (1 . 7) = 15] نرتب العوامل لنتأكد من أن 4 تضرب فى 2 وأن 1 تضرب فى 7 ونحصل على :

$$4x^2 + 15x + 14 = (4x + 7)(x + 2)$$

(*c*) $8x^2 + 34x + 21$

(1) $a . b = 8$ [1, 8; 2, 4; 4, 2; 8, 1] .

(2) $c . d = 21$ [1, 21; 3, 7; 7, 3; 21; 1]

(3) $ad + bc = 34$ [(2 . 3) + (4 . 7) = 34] نرتب العوامل بحيث نضرب 2 فى 3 ونضرب 4 فى 7 لنحصل على :

$$8x^2 + 34x + 21 = (2x + 7)(4x + 3)$$

(*d*) $6x^2 - 17x + 10$

ونظراً للحد $-17x$ ، وإذا رغبنا بتحديد a ، b بعوامل موجبة فإن c ، d يجب أن يكونا بالسالب .

(1) $a \cdot b = 6$ $[1, 6; 2, 3; 3, 2; 6, 1]$.

(2) $c \cdot d = 10$ $[-1, -10; -2, -5; -5, -2; -10, -1]$.

(3) $ad + bc = -17$ $[(6 \cdot -2) + (1 \cdot -5) = -17]$ نرتب العوامل بحيث نضرب 6 فى -2 ونضرب 1 فى -5

$$6x^2 - 17x + 10 = (6x - 5)(x - 2)$$

(*e*) $9x^2 - 30x + 16$

(1) $a \cdot b = 9$ $[1, 9; 3, 3; 9, 1]$.

(2) $c \cdot d = 16$ $[-1, -16; -2, -8; -4, -4; -8, -2; -16, -1]$.

(3) $ad + bc = -30$ $[(3 \cdot -8) + (3 \cdot -2) = -30]$

$$9x^2 - 30x + 16 = (3x - 2)(3x - 8)$$

ملاحظة : معادلات الدرجة الثانية الأكثر تعقيدًا نادراً ما تحلل . فإذا كانت العوامل مطلوبة للحل فإن المعادلة التربيعية تستخدم بشكل عام انظر قسم 3.5 .

1.13. استخدم القاعدة (2) من القسم 1.3 والطرق التى درست فى المسائل من 1.5 إلى 1.11 فى تحليل كثيرات الحدود التالية :

1.13. Using Rule 2 from Section 1.3 and the techniques developed in Problems 1.5 to 1.11, factor the following polynomials:

(*a*) $x^2 + 11xy + 28y^2$

(1) $c \cdot d = 28$ $[1, 28; 2, 14; 4, 7]$

(2) $c + d = 11$ $[4 + 7 = 11]$

$$x^2 + 11xy + 28y^2 = (x + 4y)(x + 7y)$$

(*b*) $x^2 - 19xy + 60y^2$

(1) $c \cdot d = 60$ $[-1, -60; -2, -30; -3, -20; -4, -15; -5, -12; -6, -10]$

وهذه العوامل العددية عائدة لنفس الأسباب فى المسألة 1.7 .

(2) $c + d = -19$ $[-4 + (-15) = -19]$

$$x^2 - 19xy + 60y^2 = (x - 4y)(x - 15y)$$

(*c*) $x^2 - 13xy - 48y^2$

(1) $c \cdot d = -48$ $[1, -48; 2, -24; 3, -16; 4, -12; 6, -8]$

وهذه العوامل العددية عائدة لنفس الأسباب فى المسألة 1.9 .

(2) $c + d = -13$ $[3 + (-16) = -13]$

$$x^2 - 13xy - 48y^2 = (x + 3y)(x - 16y)$$

(*d*) $x^2 + 11xy - 42y^2$

(1) $c \cdot d = -42$ $[-1, 42; -2, 21; -3, 14; -6, 7]$

وهذه عائدة لنفس الأسباب فى المسألة 1.8 .

(2) $c + d = 11$ $[-3 + 14 = 11]$

$$x^2 + 11xy - 42y^2 = (x - 3y)(x + 14y)$$

(*e*) $3x^2 + 29xy + 18y^2$

(1) $a \cdot b = 3$ $[3, 1]$

(2) $c \cdot d = 18$ $[1, 18; 18, 1; 2, 9; 9, 2; 3, 6; 6, 3]$ كما فى المسألة 1.11 (*a*) و (*b*)

(3) $ad + bc = 29 \qquad [(\mathbf{3} \cdot 9) + (\mathbf{1} \cdot 2) = 29]$

ونعيد ترتيب العوامل لنحصل على الضرب الصحيح فنجد أن :

$$3x^2 + 29xy + 18y^2 = (3x + 2y)(x + 9y)$$

(*f*) $7x^2 - 36xy + 45y^2$

(1) $a \cdot b = 7 \qquad [\mathbf{7, 1}]$
(2) $c \cdot d = 45 \qquad [-1, -45; -45, -1; -3, -15; -15, -3; -5, -9; -9, -5]$ كما فى المسألة 1.11 (*c*)
(3) $ad + bc = -36 \qquad [(\mathbf{7} \cdot -3) + (\mathbf{1} \cdot -15) = -36]$

$$7x^2 - 36xy + 45y^2 = (7x - 15y)(x - 3y)$$

(*g*) $5x^2 + 12xy - 44y^2$

(1) $a \cdot b = 5 \qquad [\mathbf{5, 1}]$
(2) $c \cdot d = -44 \qquad [1, 44; 2, 22; 4, 11]$

وكل توليفة من هذه التوليفات يجب أن تدرس مع كلا الترتيبين مع تغيير الإشارة كما فى المسألة 1.11 (*e*) .

(3) $ad + bc = 12 \qquad [(\mathbf{5} \cdot -2) + (\mathbf{1} \cdot 22) = 12]$

$$5x^2 + 12xy - 44y^2 = (5x + 22y)(x - 2y)$$

(*h*) $8x^2 + 46xy + 45y^2$

(1) $a \cdot b = 8 \qquad [\mathbf{1, 8; 2, 4; 4, 2; 1, 8}]$ كما فى المسألة 1.12
(2) $c \cdot d = 45 \qquad [1, 45; 3, 15; 5, 9; 9, 5; 15, 3; 45, 1]$
(3) $ad + bc = 46 \qquad [(\mathbf{2} \cdot 5) + (\mathbf{4} \cdot 9) = 46]$

$$8x^2 + 46xy + 45y^2 = (2x + 9y)(4x + 5y)$$

(*i*) $4x^2 - 25y^2$

(1) $a \cdot b = 4 \qquad [\mathbf{1, 4; 2, 2}]$
(2) $c \cdot d = -25 \qquad [1, -25; -25, 1; 5, -5]$
(3) $ad + bc = 0 \qquad [(\mathbf{2} \cdot 5) + (\mathbf{2} \cdot -5) = 0]$

$$4x^2 - 25y^2 = (2x + 5y)(2x - 5y)$$

الكسور Fractions

1.14. طبقًا للمبدأ الأساسى للكسور الوارد فى القاعدة (1) من القسم 1.4 فإنه حين يضرب أو يقسم البسط والمقام للعدد المنطقى على نفس كثيرة الحدود غير الصفرية فإن النتيجة تعادل المقدار الأصلى . استخدم هذا المبدأ فى اختصار الكسور التالية إلى حدودها الدنيا بإيجاد أو إلغاء العامل المشترك الأكبر .

1.14. According to the *fundamental principle of fractions* expressed in Rule 1 of Section 1.4, when the numerator and denominator of a rational number are multiplied or divided by the same nonzero polynomial, the result will be equivalent to the original expression. Use this principle to reduce the following fractions to their lowest terms by finding and canceling the greatest common factor:

(*a*) $\dfrac{16}{96}$

$$\frac{16}{96} = \frac{16 \cdot 1}{16 \cdot 6} = \frac{1}{6}$$

(*b*) $\dfrac{21x^5}{3x^2}$

$$\frac{21x^5}{3x^2} = \frac{3x^2 \cdot 7x^3}{3x^2 \cdot 1} = 7x^3$$

(*c*) $\dfrac{27z}{36z^2 - 63z}$

$$\frac{27z}{36z^2 - 63z} = \frac{9z \cdot 3}{9z(4z - 7)} = \frac{3}{4z - 7}$$

(*d*) $\dfrac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 9x + 20}$

$$\frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 9x + 20} = \frac{(x+4)(x+3)}{(x+4)(x+5)} = \frac{x+3}{x+5}$$

1.15. استخدم القاعدة (1) لرفع الكسور التالية إلى حدودها العليا مع المقام المشترك لـ 48 .

1.15. Use Rule 1 to raise the following fractions to higher terms with a common denominator of 48:

(*a*) $\dfrac{1}{3}$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{16} = \frac{16}{48}$$

(*b*) $\dfrac{1}{4}$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{12} = \frac{12}{48}$$

(*c*) $\dfrac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{24} = \frac{24}{48}$$

(*d*) $\dfrac{1}{6}$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{8}{8} = \frac{8}{48}$$

1.16. استخدم القاعدة (2) من القسم 1.4 لضرب المقادير الجبرية المنطقية ولاختصار الحلول إلى حدودها الدنيا .

1.16. Use Rule 2 of Section 1.4 to multiply the following rational expressions and reduce all answers to the lowest terms.

(*a*) $\dfrac{7w^3x^4}{3y^2z^2} \cdot \dfrac{2x^2y^5}{21w^6z^3}$

عند ضرب المقادير الجبرية المنطقية المتضمنة حصص أحادية الحد فإننا نضرب البسط والمقام بشكل منفصل ثم نختصر إلى الحدود الدنيا ونتذكر من القسم 1.1 أن الأسس لنفس المتغير تجمع فى حالة الضرب وتطرح فى حالة القسمة .

$$\frac{7w^3x^4}{3y^2z^2} \cdot \frac{2x^2y^5}{21w^6z^3} = \frac{14w^3x^6y^5}{63w^6y^2z^5} = \frac{7w^3y^2}{7w^3y^2} \cdot \frac{2x^6y^3}{9w^3z^5} = \frac{2x^6y^3}{9w^3z^5}$$

(*b*) $\dfrac{5x^6y^3}{4w^4z^2} \cdot \dfrac{8wz^3}{15x^2y}$

$$\frac{5x^6y^3}{4w^4z^2} \cdot \frac{8wz^3}{15x^2y} = \frac{40wx^6y^3z^3}{60w^4x^2yz^2} = \frac{20wx^2yz^2}{20wx^2yz^2} \cdot \frac{2x^4y^2z}{3w^3} = \frac{2x^4y^2z}{3w^3}$$

1.17. اضرب المقادير الجبرية التالية المتضمنة حصص ثنائية الحد واختصرها إلى الحدود الدنيا .

1.17. Multiply the following rational expressions involving quotients of binomials and reduce to lowest terms.

(*a*) $\dfrac{x-5}{x+8} \cdot \dfrac{x+2}{x-9}$

عند ضرب المقادير الجبرية المنطقية المتضمنة حصص ثنائية الحد فإننا نضرب البسط والمقام بشكل

منفصل كما هو أعلاه ونتذكر من المثال 5 أن كل حد فى كثيرة الحدود الأولى يجب أن يضرب فى كل حد من كثيرة الحدود الثانية ثم نجمع النواتج .

$$\frac{x-5}{x+8}\cdot\frac{x+2}{x-9}=\frac{x^2-3x-10}{x^2-x-72}$$

(*b*) $\dfrac{x+7}{x^3}\cdot\dfrac{x^2}{x-4}$

$$\frac{x+7}{x^3}\cdot\frac{x^2}{x-4}=\frac{x^2(x+7)}{x^3(x-4)}=\frac{x^2\cdot(x+7)}{x^2\cdot x(x-4)}=\frac{x+7}{x^2-4x}$$

1.18. اقسم المقادير الجبرية التالية عن طريق تحويل المقسوم عليه إلى عملية ضرب كما فى القاعدة (3) من القسم 1.4 .

1.18. Divide the following expressions by inverting the divisor and multiplying as in Rule 3 of Section 1.4.

(*a*) $\dfrac{6xy^5}{65w^4z^4}\div\dfrac{2x^3y}{11w^4z^2}$

$$\frac{6xy^5}{65w^4z^4}\div\frac{2x^3y}{11w^4z^2}=\frac{6xy^5}{65w^4z^4}\cdot\frac{11w^4z^2}{2x^3y}=\frac{66w^4xy^5z^2}{130w^4x^3yz^4}=\frac{33y^4}{65x^2z^2}$$

(*b*) $\dfrac{7x-14y}{12x-2y}\div\dfrac{12x+32y}{18x-3y}$

$$\frac{7x-14y}{12x-2y}\div\frac{12x+32y}{18x-3y}=\frac{7x-14y}{12x-2y}\cdot\frac{18x-3y}{12x+32y}$$

$$=\frac{7(x-2y)}{2(6x-y)}\cdot\frac{3(6x-y)}{4(3x+8y)}=\frac{21(x-2y)}{8(3x+8y)}=\frac{21x-42y}{24x+64y}$$

1.19. اجمع أو اطرح الكسور التالية كما فى القاعدة (5) .

1.19. Add or subtract the following fractions as in Rule 5:

(*a*) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$

لكى نجمع أو نطرح كسرين فإنه يجب أن نتأكد من أنه عندنا مقام مشترك . وطالما أن ناتج المقامات المشترك الفردية سوف يكون أتوماتيكيًا المقام المشترك فإنه ببساطة نضرب كل كسر بالأسلوب المحدد أدناه . وحيث $(d/d)=1=(b/b)$ فإن قيمة الكسور لا تتغير

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{d}\right)+\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{b}{b}\right)=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$$

(*b*) $\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{1\cdot7}{5\cdot7}+\frac{1\cdot5}{7\cdot5}=\frac{7+5}{35}=\frac{12}{35}$$

(*c*) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{17}$

$$\frac{1}{3}-\frac{2}{17}=\frac{1\cdot17}{3\cdot17}-\frac{2\cdot3}{17\cdot3}=\frac{17-6}{51}=\frac{11}{51}$$

1.20. اجمع أو اطرح الكسور التالية بإيجاد المقام المشترك الأصغر :

1.20. Add or subtract the following fractions by finding the *least common denominator.*

(*a*) $\frac{11}{12}-\frac{7}{18}$

لإيجاد المقام المشترك الأصغر ، استخدم المبدأ الأساسى فى علم الحساب لتحليل المقامات إلى نواتج من الأعداد الأولية . ألغى كل الأعداد الأولية المشتركة مع المقامات المختلفة ثم أضرب كل من البسط والمقام لكل حد بناتج الأعداد الأولية المتبقية فى المقام الأخير كما هو موضح أدناه .

$$\frac{11}{12}-\frac{7}{18}=\frac{11}{\cancel{2}\cdot 2\cdot \cancel{3}}-\frac{7}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 3}$$

اضرب البسط والمقام للحد الأول بالعدد 3 وكذلك البسط والمقام للحد الثانى بالعدد 2 .

$$\frac{11}{12}-\frac{7}{18}=\frac{11\cdot 3}{12\cdot 3}-\frac{7\cdot 2}{18\cdot 2}=\frac{33-14}{36}=\frac{19}{36}$$

(*b*) $\frac{5}{6}+\frac{3}{8}$

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{8}=\frac{5}{\cancel{2}\cdot 3}+\frac{3}{\cancel{2}\cdot 2\cdot 2}$$

نضرب الحد الأولى فى $\frac{4}{4}$ والحد الثانى فى $\frac{3}{3}$.

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{8}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}+\frac{3\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{20+9}{24}=\frac{29}{24}=1\frac{5}{24}$$

(*c*) $\frac{8}{21}-\frac{13}{28}$

$$\frac{8}{21}-\frac{13}{28}=\frac{8}{3\cdot\cancel{7}}-\frac{13}{2\cdot 2\cdot\cancel{7}}$$

نضرب الحد الأولى فى $\frac{4}{4}$ والحد الثانى فى $\frac{3}{3}$.

$$\frac{8}{21}-\frac{13}{28}=\frac{8\cdot 4}{21\cdot 4}-\frac{13\cdot 3}{28\cdot 3}=\frac{32-39}{84}=-\frac{7}{84}=-\frac{1}{12}$$

1.21. اجمع واطرح الكسور التالية بإيجاد المقامات المشتركة الصغرى . واختصر الحلول إلى الحدود الدنيا .

1.21. Add or subtract the following fractions by finding the least common denominators. Reduce all answers to the lowest terms.

(*a*) $\frac{4}{9x}+\frac{2}{5x}$

$$\frac{4}{9x}+\frac{2}{5x}=\frac{4}{9\cdot\cancel{x}}+\frac{2}{5\cdot\cancel{x}}$$

نضرب الحد الأولى فى $\frac{5}{5}$ والحد الثانى فى $\frac{9}{9}$.

$$\frac{4}{9x}+\frac{2}{5x}=\left(\frac{4}{9x}\cdot\frac{5}{5}\right)+\left(\frac{2}{5x}\cdot\frac{9}{9}\right)=\frac{20}{45x}+\frac{18}{45x}=\frac{38}{45x}$$

(*b*) $\frac{5}{6x}-\frac{7}{9y}$

$$\frac{5}{6x}-\frac{7}{9y}=\frac{5}{2\cdot\cancel{3}\cdot x}-\frac{7}{\cancel{3}\cdot 3\cdot y}$$

نضرب الحد الأولى فى $\frac{3y}{3y}$ والحد الثانى فى $\frac{2x}{2x}$.

$$\frac{5}{6x}-\frac{7}{9y}=\left(\frac{5}{6x}\cdot\frac{3y}{3y}\right)-\left(\frac{7}{9y}\cdot\frac{2x}{2x}\right)$$
$$=\frac{15y}{18xy}-\frac{14x}{18xy}=\frac{15y-14x}{18xy}$$

(*c*) $\frac{6}{x+8}+\frac{7}{x}$

نضرب الحد الأول فى $\frac{x}{x}$ والحد الثانى فى $\frac{x+8}{x+8}$ طالما لا توجد عوامل مشتركة

$$\frac{6}{x+8}+\frac{7}{x}=\left[\frac{6}{(x+8)}\cdot\left(\frac{x}{x}\right)\right]+\left[\frac{7}{x}\cdot\left(\frac{x+8}{x+8}\right)\right]$$
$$=\frac{6x}{x(x+8)}+\frac{7x+56}{x(x+8)}=\frac{13x+56}{x^2+8x}$$

(*d*) $\frac{12}{x^2-81}+\frac{7x}{x+9}$

$$\frac{12}{x^2-81}+\frac{7x}{x+9}=\frac{12}{\cancel{(x+9)}(x-9)}+\frac{7x}{\cancel{(x+9)}}$$

نضرب الحد الثانى فى $\frac{(x-9)}{(x-9)}$ إذاً

$$\frac{12}{x^2-81}+\frac{7x}{x+9}=\frac{12}{(x+9)(x-9)}+\left[\frac{7x}{(x+9)}\cdot\left(\frac{x-9}{x-9}\right)\right]$$
$$=\frac{12+7x^2-63x}{(x+9)(x-9)}=\frac{7x^2-63x+12}{x^2-81}$$

(*e*) $\frac{9}{x-3}+\frac{6x}{x^2-8x+15}$

$$\frac{9}{x-3}+\frac{6x}{x^2-8x+15}=\frac{9}{\cancel{(x-3)}}+\frac{6x}{\cancel{(x-3)}(x-5)}$$

نضرب الحد الأول فى $\frac{(x-5)}{(x-5)}$

$$\frac{9}{x-3}+\frac{6x}{x^2-8x+15}=\left[\frac{9}{(x-3)}\cdot\left(\frac{x-5}{x-5}\right)\right]+\frac{6x}{(x-3)(x-5)}$$
$$=\frac{9x-45+6x}{(x-3)(x-5)}=\frac{15(x-3)}{(x-3)(x-5)}=\frac{15}{x-5}$$

الجذور Radicals

1.22. استخدم خصائص الجذور المبينة فى القسم 1.5 ثم بسط الجذور التالية :

1.22. Using the properties of radicals set forth in Section 1.5, simplify the following radicals.

(a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}=\sqrt{3\cdot 27}=\sqrt{81}=\pm 9$$

القاعدة (3)

(b) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{45}$

$$\sqrt{5}\cdot\sqrt{45}=\sqrt{5\cdot 45}=\sqrt{225}=\pm 15$$

القاعدة (3)

(c) $\sqrt{245}$

$$\sqrt{245}=\sqrt{5\cdot 49}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{49}=\pm 7\sqrt{5}$$

القاعدة (3)

(d) $\sqrt{108}$

$$\sqrt{108}=\sqrt{3\cdot 36}=\pm 6\sqrt{3}$$

القاعدة (3)

(e) $(\sqrt[3]{192})/(\sqrt[3]{3})$

$$\frac{\sqrt[3]{192}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\frac{192}{3}}=\sqrt[3]{64}=4$$

القاعدة (4)

(f) $(\sqrt{294})/(\sqrt{6})$

$$\frac{\sqrt{294}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{294}{6}}=\sqrt{49}=\pm 7$$

القاعدة (4)

(g) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}=\sqrt[5\cdot 3]{x}=\sqrt[15]{x}$$

القاعدة (2)

(h) $\sqrt{\sqrt[4]{y}}$

$$\sqrt{\sqrt[4]{y}}=\sqrt[2\cdot 4]{y}=\sqrt[8]{y}$$

القاعدة (2)

(i) $\sqrt{36x^4y^6}$

$$\sqrt{36x^4y^6}=\pm 6x^2y^3$$

القاعدة (2)

(j) $\sqrt{98x^7y^5}$

$$\sqrt{98x^7y^5}=\sqrt{49x^6y^4}\cdot\sqrt{2xy}=\pm 7x^3y^2\sqrt{2xy}\ .$$

القاعدة (2) و (3)

1.23. استخدم خصائص الجذور لإيجاد قيمة y فى كل مما يلى :

1.23. Use the properties of radicals to solve for y in each of the following instances.

(a) $\sqrt{3y}=6x^5$

بتربيع طرفى المعادلة ثم نستخدم القاعدة (1)

$$(\sqrt{3y})^2=(6x^5)^2$$
$$3y=36x^{10}$$
$$y=12x^{10}$$

(b) $\sqrt{7y}=42x^3$

بتربيع طرفى المعادلة نحصل على

$$(\sqrt{7y})^2=(42x^3)^2$$
$$7y=1764x^6$$
$$y=252x^6$$

استخدام الآلة الحاسبة Use of A Calculator

1.24. تدرب على استخدام حاسبة الجيب وقواعد الأسس من القسم 1.1 لإيجاد قيمة y مقربًا كـل الحلـول إلـى خمس منازل عشرية .

1.24. Practice the use of a pocket calculator and the rules of exponents from Section 1.1 to solve for y. Round all answers to five decimal places.

(*a*) $y = 4^5 \cdot 4^3$

القاعدة (1)

$$y = 4^{5+3} = 4^8$$

لإيجاد 4^8 ، ندخل 4 فى الحاسبة ، نضغط على المفتاح $\boxed{y^x}$ ، ندخل 8 ثم نضغط المفتاح $\boxed{=}$.

$$y = 65{,}536$$

(*b*) $y = 13^7 \div 13^4$

القاعدة (2)

$$y = 13^{(7-4)} = 13^3$$

ندخل 13 ونضغط على المفتاح $\boxed{y^x}$ ، ثم ندخل 3 ثم نضغط المفتاح $\boxed{=}$.

$$y = 2197$$

(*c*) $y = 17^6 \div 17^8$

$$y = 17^{(6-8)} = 17^{-2}$$

لإيجاد 17^{-2} ، ندخل 17 ، ونضغط على المفتاح $\boxed{y^x}$ ، ثم ندخل 2 متبوعًا بالضغط على $\boxed{\pm}$ لنجعله سالبًا ونضغط المفتاح $\boxed{=}$.

$$y = 0.00346$$

(*d*) $y = (5^3)^2$

القاعدة (3)

$$y = 5^{(3 \cdot 2)} = 5^6$$

ندخل 5 ، نضغط على المفتاح $\boxed{y^x}$ ، ثم ندخل 6 ثم نضغط المفتاح $\boxed{=}$.

$$y = 15{,}625$$

(*e*) $y = (2^{-4})^2$

$$y = 2^{(-4 \cdot 2)} = 2^{-8}$$

ندخل 2 ، نضغط على المفتاح $\boxed{y^x}$ ، ثم ندخل 8 متبوعًا بالضغط على المفتاح $\boxed{\pm}$ لنجعله سالبًا ثم نضغط المفتاح $\boxed{=}$.

$$y = 0.00391$$

1.25. استخدم الآلة الحاسبة وقواعد الجذور من القسم 1.5 لتقدير قيمة y مقربًا كل الحلول إلى خمس منازل عشرية .

1.25. Use a calculator and the rules of radicals from Section 1.5 to estimate the value of y. Round all answers to five decimal places.

(*a*) $y = \sqrt{3} \cdot \sqrt{17}$

القاعدة (1)

$$y = \sqrt{3 \cdot 17} = \sqrt{51}$$

لإيجاد $\sqrt{51}$ نضغط المفتاح $\boxed{\text{INV}}$ متبوعًا بالضغط على المفتاح $\boxed{x^2}$ لتنشيط المفتاح $\sqrt{x}$ ، وبذلك نحصل على 7.14143 .

واذكر دائمًا بأن الجذر الزوجى يمكن أن يكون موجبًا أو سالبًا .

$$y = \pm 7.14143$$

(*b*) $y = \sqrt{63} \cdot \sqrt{37}$

$$y = \sqrt{63 \cdot 37} = \sqrt{2331}$$

ندخل 2331 ثم نضغط المفتاح $\boxed{\text{INV}}$ متبوعًا بالضغط على المفتاح $\boxed{x^2}$.

$$y = \pm 48.28043$$

(*c*) $y = \sqrt[3]{48} \cdot \sqrt[3]{74}$

$$y = \sqrt[3]{48 \cdot 74} = \sqrt[3]{3552}$$

لإيجاد $\sqrt[3]{3552}$ ، ندخل 3552 ، نضغط المفتاح $\boxed{\text{INV}}$ متبوعًا بالضغط على المفتاح $\boxed{y^x}$ لتنشيط المفتاح $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ ثم ندخل 3 للجذر ونضغط المفتاح $\boxed{=}$.

$$y = 15.25777$$

(*d*) $y = \sqrt[5]{22} \cdot \sqrt[5]{45}$

$$y = \sqrt[5]{22 \cdot 45} = \sqrt[5]{990}$$

ندخل 990 ونضغط المفتاح $\boxed{\text{INV}}$ متبوعًا بالضغط على المفتاح $\boxed{y^x}$ ثم ندخل 5 للجذر ونضغط المفتاح $\boxed{=}$.

$$y = 3.97308$$

(*e*) $y = \dfrac{\sqrt[3]{2668}}{\sqrt[3]{46}}$

$$y = \sqrt[3]{\frac{2668}{46}} = \sqrt[3]{58}$$ القاعدة (4)

ندخل 58 ، نضغط المفتاح $\boxed{\text{INV}}$ متبوعًا بالضغط على المفتاح $\boxed{y^x}$ ثم ندخل 3 ونضغط المفتاح $\boxed{=}$.

$$y = 3.87088$$

(*f*) $y = \dfrac{\sqrt{3293}}{\sqrt{89}}$

$$y = \sqrt{\frac{3293}{89}} = \sqrt{37}$$

ندخل 37 ، نضغط المفتاح $\boxed{\text{INV}}$ متبوعًا بالضغط على المفتاح $\boxed{y^x}$.

$$y = \pm 6.08276$$

(*g*) $y = \sqrt{\sqrt[4]{6561}}$

$$y = \sqrt[8]{6561}$$ القاعدة (2)

ندخل 6561 ، نضغط المفتاح $\boxed{\text{INV}}$ متبوعًا بالضغط على المفتاح $\boxed{y^x}$ ثم ندخل 8 ونضغط المفتاح $\boxed{=}$.

$$y = \pm 3$$

1.26. (*a*) عبر عن الجذور التالية فى شكل صيغة أسية ، (*b*) واستخدم الآلة الحاسبة وقواعد الأسس من القسم 1.1 لإيجاد قيمة y .

1.26. (*a*) Express the following radicals in their exponential forms. (*b*) Then use your calculator and the rules of exponents from Section 1.1 to solve for y.

(1) $y = \sqrt{3} \cdot \sqrt{17}$

(a) $$y = 3^{1/2} \cdot 17^{1/2}$$

(b) $$y = (3 \cdot 17)^{1/2} = 51^{1/2} = 51^{0.5}$$ القاعدة (4)

لإيجاد $51^{0.5}$ ، ندخل 51 ، نضغط المفتاح $\boxed{y^x}$ ثم ندخل 0.5 ونضغط المفتاح $\boxed{=}$ لنعلم أن : $51^{0.5} = 7.14143$. وتذكر أن الجذر الزوجى يمكن أن يكون سالبًا أو موجبًا .

$$y = \pm 7.14143$$

قارن هذا بالمسألة 1.25 (a)

(2) $y = \sqrt[5]{22} \cdot \sqrt[5]{45}$

$$y = 22^{1/5} \cdot 45^{1/5}$$
$$y = (22 \cdot 45)^{1/5} = 990^{1/5} = 990^{0.2}$$

ندخل 990 ، نضغط المفتاح $\boxed{y^x}$ ثم ندخل 0.2 ونضغط المفتاح $\boxed{=}$.

$$y = 3.97308$$

قارن هذا بالمسألة 1.25 (b)

(3) $y = \dfrac{\sqrt[3]{2668}}{\sqrt[3]{46}}$

(a) $$y = \frac{2668^{1/3}}{46^{1/3}}$$

(b) $$y = \left(\frac{2668}{46}\right)^{1/3} = 58^{1/3} = 58^{0.33}$$ القاعدة (5)

ندخل 58 ، نضغط المفتاح $\boxed{y^x}$ ثم ندخل 0.33 ونضغط المفتاح $\boxed{=}$.

$$y = 3.81884$$

قارن هذا بالمسألة 1.25 (e) . والاختلاف البسيط هنا عائد ببساطة إلى تحديد $\frac{1}{3}$ برقمين عشرين .

1.27. استخدم الحاسبة وقواعد الأسس لإيجاد قيمة y ولاحظ أن كل الجذور معبر عنها فى صيغة أسية .

1.27. Use your calculator and the rules of exponents to solve for y. Note that all the radicals are expressed in exponential form.

(a) $y = 522^{-(1/2)} \div 29^{-(1/2)}$

$$y = \left(\frac{522}{29}\right)^{-(1/2)} = 18^{-(1/2)} = 18^{-0.5}$$ القاعدة (5)

لإيجاد $18^{-0.5}$ ، ندخل 18 ونضغط المفتاح $\boxed{y^x}$ ثم ندخل 0.5 متبوعًا بالضغط على المفتاح $\boxed{\pm}$ لنجعله سالبًا ونضغط المفتاح $\boxed{=}$.

$$y = \pm 0.23570$$

(b) $y = 15^{-(1/4)} \cdot 23^{-(1/4)}$

$$y = (15 \cdot 23)^{-(1/4)} = 345^{-(1/4)} = 345^{-0.25}$$

ندخل 345 ، ونضغط المفتاح $\boxed{y^x}$ ثم ندخل 0.25 متبوعًا بالضغط على المفتاح $\boxed{\pm}$ لجعله سالبًا ، ونضغط المفتاح $\boxed{=}$.

$$y = \pm 0.23203$$

(*c*) $y = (6561^{1/4})^{1/2}$

$$y = (6561)^{1/4 \cdot 1/2} = 6561^{1/8} = 6561^{0.125} \qquad \text{(3) القاعدة}$$

ندخل 6561 ، ونضغط المفتاح $\boxed{y^x}$ ثم ندخل 0.125 ونضغط المفتاح $\boxed{=}$.

$$y = \pm 3$$

ملاحظة : يمكن أن نحصل على نفس الحل بإدخال الرقم 6561 ، والضغط على المفتاح $\boxed{\text{INV}}$ متبوعًا بالضغط على المفتاح $\boxed{y^x}$ ثم ندخل 8 للجذر ونضغط المفتاح $\boxed{=}$.

(*d*) $y = (34^{2/5})^2$

$$y = 34^{(2/5 \cdot 2)} = 34^{4/5} = 34^{0.8}$$

ندخل 34 ، ونضغط المفتاح $\boxed{y^x}$ ثم ندخل 0.8 ونضغط المفتاح $\boxed{=}$.

$$y = 16.79512$$

(*e*) $y = [14^{-(3/2)}]^{4/5}$

$$y = [14^{-(3/2)}]^{4/5} = 14^{[-(3/2) \cdot 4/5]} = 14^{-(12/10)} = 14^{-1.2}$$

ندخل 14 ونضغط المفتاح $\boxed{y^x}$ ثم ندخل 1.2 متبوعًا بالضغط على المفتاح $\boxed{\pm}$ لجعله سالبًا ثم نضغط المفتاح $\boxed{=}$.

$$y = 0.04214$$

الإثباتات Proofs

1.28. إذا أعطيت كثيرة الحدود $mx^2 + nx + p$. أثبت أن العوامل هى $(ax + c)(bx + d)$ حيث $ab = m$ ، $ad + bc = n$ ، كما أن $cd = p$.

1.28. Given the polynomial $mx^2 + nx + p$, show that the factors are $(ax + c)(bx + d)$ where $ab = m$, $ad + bc = n$, and $cd = p$.

إذا عكسنا عملية الضرب فيمكن أن نعبر عن كثيرة الحدود .

$$mx^2 + nx + p = (ax + c)(bx + d)$$

بتنفيذ عملية الضرب على الجانب الأيمن

$$mx^2 + nx + p = abx^2 + (ad + bc)x + cd \qquad (1.1)$$

ومن المعادلة (1.1) يتضح أن : $cd = p$ ، $ad + bc = n$ ، $ab = m$.

1.29. إذا أعطيت كثيرة حدود ذات متغيرين ، $mx^2 + nxy + py^2$. أثبت أن العوامل $(ax + cy)(bx + dy)$ تكون مثل $ab = m$ ، $ad + bc = n$ ، $cd = p$.

1.29. Given a polynomial in two variables, $mx^2 + nxy + py^2$, show that the factors $(ax + cy)(bx + dy)$ are such that $ab = m$, $ad + bc = n$, and $cd = p$.

$$mx^2 + nxy + py^2 = (ax + cy)(bx + dy)$$

وعند الضرب

$$mx^2 + nxy + py^2 = abx^2 + (ad + bc)xy + cdy^2$$

وهنا نجد أن $ab = m$ ، $ad + bc = n$ ، $cd = p$.

1.30. استخدم قوانين الأسس لإثبات القاعدة (1) للجذور أي $(\sqrt[n]{x})^n = x$.

1.30. Use the laws of exponents to prove Rule 1 for radicals, namely, $(\sqrt[n]{x})^n = x$.

من القسم 1.1 .

$$(\sqrt[n]{x})^n = (x^{1/n})^n$$

ومن القاعدة (3) للأسس

$$(x^{1/n})^n = x^{(1/n)n} = x^{(1)} = x$$

مسائل إضافية

الأسس Exponents

1.31. استخدم قواعد الأسس لتبسيط المقادير التالية :

1.31. Use the rules of exponents to simplify the following expressions:

(*a*) $x^4 \cdot x^3$ (*b*) $x^5 \cdot x^{1/2}$ (*c*) $x^6 \cdot x^{-4}$ (*d*) $x^{-2} \cdot x^{-7}$

1.32. Simplify the following exponential expressions:

1.32. بسط المقادير الأسية التالية :

(*a*) $\dfrac{x^5}{x^2}$ (*b*) $\dfrac{x^3}{x^5}$ (*c*) $\dfrac{x^2}{x^{-4}}$ (*d*) $\dfrac{x^{-4}}{x^3}$

1.33. Simplify the following:

1.33. بسط ما يلى :

(*a*) $(x^3)^4$ (*b*) $(x^4)^{-2}$ (*c*) $(x^3y^4)^2$ (*d*) $\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)^3$

1.34. Simplify the following:

1.34. بسط ما يلى :

(*a*) $\dfrac{x^2}{x^{1.5}}$ (*b*) $(x^3)^{1/2}$ (*c*) $(x^{1/3})^2$ (*d*) $(x^4)^{-(1/5)}$

كثيرات الحدود Polynomials

1.35. بين العمليات الحسابية لكل من كثيرات الحدود التالية :

1.35. Perform the indicated arithmetical operations for each of the following polynomial expressions:

(*a*) $76xy - 22xy$ (*b*) $14x_1x_2 + 31x_1x_2$ (*c*) $32xy^2 - 48xy^2$

(*d*) $50xyz - 43xyz$

1.36. Add or subtract the following polynomials as indicated:

1.36. اجمع واطرح كثيرات الحدود التالية

(*a*) $(6x + 9y) + (3x - 8y)$ (*b*) $(20x + 13y) - (4x + 7y)$

(*c*) $(12x - 17y) - (9x - 8y)$ (*d*) $(5x^2 - 12xy + 3y^2) - (2x^2 + 9xy + 7y^2)$

1.37. Multiply each of the following polynomial expressions:

1.37. اضرب كل من كثيرات الحدود التالية

(*a*) $(5x+2y)(8x+3y)$ (*b*) $(6x-15y)(10x-3y)$

(*c*) $(3x^2-5xy+4y^2)(6x+2y)$ (*d*) $(20x-5y)(8x^2+2xy+3y^2)$

Factoring تحليل العوامل

1.38. بسط كل من كثيرات الحدود التالية بأخذ العامل المشترك الأكبر .

1.38. Simplify each of the following polynomials by factoring out the greatest common factor:

(*a*) $12-15x$ (*b*) $42x^3+28x$ (*c*) $15x^3y^4+55x^2y^5$

(*d*) $18x^2y^6z^4+22x^3y^4z^3-26x^5y^4z^6$

1.39. بسط كل من كثيرات الحدود التالية بأخذ العامل المشترك الأكبر .

1.39. Factor each of the following quadratic equations:

(*a*) $x^2+10x+24$ (*b*) $x^2-10x+21$ (*c*) $x^2+9x-22$

(*d*) $x^2-7x-60$ (*e*) x^2-49 (*f*) $x^2-23x+120$

1.40. حلل كل من معادلات الدرجة الثانية التالية والتى يكون فيها معامل x^2 لا يساوى 1 :

1.40. Factor each of the following quadratic equations in which the coefficient of the x^2 is no longer 1:

(*a*) $3x^2+17x+10$ (*b*) $5x^2-19x+12$ (*c*) $7x^2-22x-24$

(*d*) $4x^2+16x+15$ (*e*) $6x^2-23x+20$ (*f*) $8x^2-41x-42$

Fractions الكسور

1.41. Reduce the following fractions to their lowest terms:

1.41. اختصر الكسور التالية لحدودها الدنيا :

(*a*) $\frac{14}{35}$ (*b*) $\frac{22}{110}$ (*c*) $\frac{8x^5}{56x^3}$

(*d*) $\frac{32x^3}{6x^4}$ (*e*) $\frac{x^2+x-30}{x^2+14x+48}$ (*f*) $\frac{x^2-8x+12}{x^2-11x+18}$

1.42. Multiply or divide the following fractions as indicated:

1.42. اضرب واقسم الكسور التالية :

(*a*) $\frac{7x}{9y}\cdot\frac{4x}{3y}$ (*b*) $\frac{5x^3y^2}{2wz^4}\cdot\frac{8w^2y^5}{7x^2z^3}$ (*c*) $\frac{12x}{25y}\div\frac{3x}{5y}$ (*d*) $\frac{11w^2x^4}{8yz^3}\div\frac{3wx^5}{2y^3z}$

1.43. اضرب واقسم المقادير الجبرية المنطقية التالية :

1.43. Multiply or divide the following rational expressions:

(*a*) $\frac{x+5}{x-8}\cdot\frac{x-3}{x+9}$ (*b*) $\frac{x-4}{x-1}\cdot\frac{x+7}{x-6}$

(*c*) $\frac{x+12}{x+9}\div\frac{x-6}{x+2}$ (*d*) $\frac{2x-7}{x+4}\div\frac{3x+2}{x-9}$

1.44. اجمع واطرح الكسور التالية بإيجاد المقام المشترك الأصغر كلما كان ضرورياً

1.44. Add or subtract the following functions, finding the least common denominator where necessary:

(*a*) $\frac{2}{5}+\frac{3}{8}$ (*b*) $\frac{7}{12}-\frac{2}{11}$ (*c*) $\frac{x}{6}+\frac{3x}{7}$

(*d*) $\frac{5}{18x}-\frac{3}{16x}$ (*e*) $\frac{3}{4}-\frac{1}{6}$ (*f*) $\frac{7}{9}-\frac{5}{12}$

1.45. Add or subtract the following as indicated: **1.45.** اجمع واطرح ما يأتى

(*a*) $\frac{13}{x+9} - \frac{6}{x}$ (*b*) $\frac{8}{x-2} + \frac{3}{x+4}$ (*c*) $\frac{41}{x-7} - \frac{15}{x^2-49}$
(*d*) $\frac{17}{x-6} - \frac{15}{x^2-14x+48}$

Radicals الجذور

1.46. Simplify the following radicals: **1.46.** بسط الجذور التالية :

(*a*) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$ (*b*) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{63}$ (*c*) $\sqrt{243}$
(*d*) $\sqrt{605}$ (*e*) $\sqrt{75} \div \sqrt{3}$ (*f*) $\sqrt{288} \div \sqrt{6}$

1.47. Simplify the following radicals: **1.47.** بسط الجذور التالية :

(*a*) $\sqrt{169x^6y^8}$ (*b*) $\sqrt{81x^2y^4z^6}$ (*c*) $\sqrt{108x^3y^5}$ (*d*) $\sqrt{450x^4y^5z^6}$

Use of Calculator استخدام الآلة الحاسبة

1.48. Use a calculator to multiply or divide the following: **1.48.** استخدم الحاسبة لضرب وقسمة ما يلى :

(*a*) $5236 \cdot 0.015$ (*b*) $0.065 \cdot 3.75$ (*c*) $145 \div 0.25$ (*d*) $0.675 \div 0.045$

1.49. Estimate the following using a calculator: **1.49.** قدر ما يلى باستخدام الحاسبة :

(*a*) 6^5 (*b*) 3^7 (*c*) 8^{-4} (*d*) 12^{-6} (*e*) $\sqrt{784}$
(*f*) $\sqrt[3]{2197}$ (*g*) $\sqrt[4]{50{,}625}$ (*h*) $784^{0.5}$ (*i*) $50{,}625^{0.25}$

حلول المسائل إضافية

1.31. (*a*) x^7 (*b*) $x^{5.5} = x^{(11/2)} = \sqrt{x^{11}}$ (*c*) x^2 (*d*) $x^{-9} = \frac{1}{x^9}$

1.32. (*a*) x^3 (*b*) $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ (*c*) x^6 (*d*) $x^{-7} = \frac{1}{x^7}$

1.33. (*a*) x^{12} (*b*) $x^{-8} = \frac{1}{x^8}$ (*c*) x^6y^8 (*d*) $\frac{x^6}{y^9}$

1.34. (*a*) $x^{1/2} = \sqrt{x}$ (*b*) $x^{3/2} = \sqrt{x^3}$ (*c*) $x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}$ (*d*) $x^{-(4/5)} = \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$

1.35. (*a*) $54xy$ (*b*) $45x_1x_2$ (*c*) $-16xy^2$ (*d*) $7xyz$

1.36. (*a*) $9x + y$ (*b*) $16x + 6y$ (*c*) $3x - 9y$ (*d*) $3x^2 - 21xy - 4y^2$

1.37. (*a*) $40x^2 + 31xy + 6y^2$ (*b*) $60x^2 - 168xy + 45y^2$ (*c*) $18x^3 - 24x^2y + 14xy^2 + 8y^3$
(*d*) $160x^3 + 50xy^2 - 15y^3$

1.38. (*a*) $3(4-5x)$ (*b*) $14x(3x^2+2)$ (*c*) $5x^2y^4(3x-11y)$ (*d*) $2x^2y^4z^3(9y^2z+11x-13x^3z^3)$

1.39. (*a*) $(x+4)(x+6)$ (*b*) $(x-3)(x-7)$ (*c*) $(x-2)(x+11)$ (*d*) $(x+5)(x-12)$
(*e*) $(x+7)(x-7)$ (*f*) $(x-8)(x-15)$

1.40. (*a*) $(3x+2)(x+5)$ (*b*) $(5x-4)(x-3)$ (*c*) $(7x+6)(x-4)$ (*d*) $(2x+3)(2x+5)$
(*e*) $(2x-5)(3x-4)$ (*f*) $(8x+7)(x-6)$

1.41. (*a*) $\frac{2}{5}$ (*b*) $\frac{1}{5}$ (*c*) $\frac{x^2}{7}$ (*d*) $\frac{16}{3x}$ (*e*) $\frac{x-5}{x+8}$ (*f*) $\frac{x-6}{x-9}$

1.42. (*a*) $\frac{28x^2}{27y^2}$ (*b*) $\frac{20wxy^7}{7z^7}$ (*c*) $\frac{4}{5}$ (*d*) $\frac{11wy^2}{12xz^2}$

1.43. (*a*) $\frac{x^2+2x-15}{x^2+x-72}$ (*b*) $\frac{x^2+3x-28}{x^2-7z+6}$ (*c*) $\frac{x^2+14x+24}{x^2+3x-54}$ (*d*) $\frac{2x^2-25x+63}{3x^2+14x+8}$

1.44. (*a*) $\frac{31}{40}$ (*b*) $\frac{53}{132}$ (*c*) $\frac{25x}{42}$ (*d*) $\frac{13}{144x}$ (*e*) $\frac{7}{12}$ (*f*) $\frac{13}{36}$

1.45. (*a*) $\frac{7x-54}{x^2+9x}$ (*b*) $\frac{11x+26}{x^2+2x-8}$ (*c*) $\frac{41x+272}{x^2-49}$ (*d*) $\frac{17x-151}{x^2-14x+48}$

1.46. (*a*) ± 8 (*b*) ± 21 (*c*) $\pm 9\sqrt{3}$ (*d*) $\pm 11\sqrt{5}$ (*e*) ± 5 (*f*) $\pm 4\sqrt{3}$

1.47. (*a*) $\pm 13x^3y^4$ (*b*) $\pm 9xy^2z^3$ (*c*) $\pm 6xy^2\sqrt{3xy}$ (*d*) $\pm 15x^2y^2z^3\sqrt{2y}$

1.48. (*a*) 78.54 (*b*) 0.24375 (*c*) 580 (*d*) 15

1.49. (*a*) 7776 (*b*) 2187 (*c*) 0.0002441 (*d*) 0.0000003 (*e*) ± 28 (*f*) 13
(*g*) ± 15 (*h*) ± 28 (*i*) ± 15

الفصل الثانى

المعادلات والرسوم البيانية

Equations and Graphs

2.1 المعادلات Equations

تسمى كل عبارة رياضية ذات مقدارين جبريين متساويين بالمعادلة . وحل أى معادلة يتمثل فى عدد أو أعداد بحيث إذا عوضنا عن كل متغير أو متغيرات فإنه يؤدى إلى نفس القيمة على الطرف الآخر لعلامة التساوى .

فالمقدار c ذاته يمكن أن يضاف أو يطرح أو يضرب أو يقسم على طرفى المعادلة دون أن يؤثر على الكمية بافتراض طبعًا أن $c \neq 0$ فى حالتى القسمة الضرب . فلكل الأعداد الحقيقية a ، b ، c إذا كانت $a = b$ فإن خصائص التساوى يمكن أن تلخص على النحو الآتى :

(a) خاصية الجمع $a + c = b + c$

(b) خاصية الطرح $a - c = b - c$

(c) خاصية الضرب $ac = bc$

(d) خاصية القسمة $a/c = b/c \quad (c \neq 0)$

يمكن إذن أن تستخدم المعادلات المترادفة الناتجة عن تطبيق تلك الخطوات فى إيجاد المعادلة المبسطة والتى يكون حلها واضحًا ، أى أن المتغير المجهول نفسه يقع على يسار علامة التساوى والحل على يمين علامة التساوى .

مثال 1 : المعادلة التالية تحل بثلاث خطوات سهلة مستخدمين قواعد التساوى الموضحة أعلاه .

EXAMPLE 1. An equation, such as the one below, is solved in three easy steps, using the properties of equality set out above. Given

$$\frac{x}{4} - 2 = \frac{x}{5} + 1$$

(1) نحرك أى حد للمتغير المجهول إلى اليسار ، بطرح $\frac{x}{5}$ من طرفى المعادلة :

$$\boxed{\frac{x}{4} - 2 - \frac{x}{5} = \frac{x}{5} + 1 - \frac{x}{5}} \qquad \text{(خاصية الطرح)}$$

$$\frac{x}{4} - \frac{x}{5} - 2 = 1$$

(2) نحرك أى حد باستثناء المتغير المجهول إلى اليمين ، بإضافة 2 إلى طرفى المعادلة :

$$\boxed{\frac{x}{4} - \frac{x}{5} - 2 + 2 = 1 + 2} \qquad \text{(خاصية الجمع)}$$

$$\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 3$$

(3) بسط جانبى المعادلة بحيث يقع المتغير المجهول ذاته على اليسار والحل على اليمين ؛ بضرب طرفى المعادلة بـ 20 ونطرح فيما يلى :

$$\boxed{20 \cdot \left(\frac{x}{4} - \frac{x}{5}\right) = 3 \cdot 20} \qquad \text{(خاصية الضرب)}$$

$$5x - 4x = 60 \qquad x = 60$$

انظر المسائل 2.1 ، 2.2 .

2.2 نظام الإحداثيات الكارتيزى Cartesian Coordinate System

يتكون نظام الإحداثيات الكارتيزى من خط أفقى وخط رأسى مرتكزين بصورة متعامدة على بعضهما البعض على مستوى سطح ويطلق على الخطوط محاور الإحداثيات وعلى نقطة التقاطع "نقطة الأصل" ويشير الخط الأفقى إلى محور x ، والخط الرأسى إلى محور y . والأقسام الأربعة على السطح التى قسمت بفعل تقاطع المحور تسمى أرباع .

وكل نقطة على السطح تقترن بزوج منظم من الأعداد يسمى الإحداثيات . وهذا يصف موقع النقطة بالنسبة لنقطة الأصل . المحور الأول يسمى محور x أو الإحداثى السينى ويحدد بُعد النقطة عن المحور الرأسى . والثانى محور y أو الإحداثى الصادى ويحدد بُعد النقطة عن المحور الأفقى . إلى اليمين من محور y : إحداثيات x موجبة وإلى اليسار سالبة . وأعلى المحور x : إحداثيات y موجبة وأسفل سالبة . انظر المسألة 2.3 .

مثال 2 : إشارات الإحداثيات فى كل من الأرباع موضحة بالشكل (1–2) . لاحظ أن الأرباع مرقمة باتجاه معاكس لعقارب الساعة .

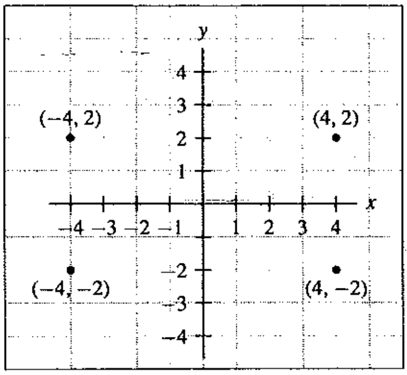
EXAMPLE 2. The signs of the coordinates in each of the quadrants are illustrated in Fig. 2-1. Note that the quadrants are numbered counterclockwise.

II	I
$x(-), y(+)$	$x(+), y(+)$
$x(-), y(-)$	$x(+), y(-)$
III	IV

شكل (2–1)

مثال 3 : الإحداثيات تحدد موقع النقطة P بالنسبة لنقطة الأصل . فالنقطة $(4, 2)$ هى أربع وحدات إلى اليمين من محور y ووحدتين أعلى محور x . والنقطة $(-4, 2)$ هى أربع وحدات إلى اليسار من محور y ووحدتين أعلى محور x . والنقطة $(-4, -2)$ هى أربع وحدات إلى اليسار من محور y ووحدتين أسفل محور x . والنقطة $(4, -2)$ هى أربع وحدات إلى اليمين من محور y ووحدتين أسفل محور x . انظر الشكل 2.2 والمسألة 2.3 .

EXAMPLE 3. The coordinates give the location of the point P in relation to the origin. The point $(4, 2)$ is four units to the right of the y axis, two units above the x axis. Point $P(-4, 2)$ is four units to the left of the y axis, two units above the x axis. Point $P(-4, -2)$ is four units to the left of the y axis, two units below the x axis; $P(4, -2)$, four units to the right of the y axis, two units below the x axis. See Fig. 2-2 and Problem 2.3.



شكل (2−2)

2.3 المعادلات الخطية والرسوم البيانية Linear Equations and Graphs

المعادلة التى ترفع جميع متغيراتها إلى القوى واحد (First Power) ولا يظهر ناتج ضـرب متبـادل لمتغيراتـها تسمى معادلة خطية . والصيغة العامة للمعادلة الخطية هى

$$ax + cy = d$$

حيث a ، c ، d أعداد حقيقية و a ، c لا تساوى كلاهما صفر .

الرسم البيانى للمعادلة الخطية هو خط مستقيم . ولتمثيل المعادلـة الخطيـة بيانيًـا حسـب نظـام الإحداثيـات الكارتيزية فنحتاج إلى (1) إيجاد نقطتين تفيان بالمعادلة و (2) توصيلهم بخط مستقيم و (3) مد بقدر مـا نحتـاج . وإحداثيات النقاط على الخط توجد عن طريق اختيار قيم مختلفة لـ x وحل المعادلة لإيجاد قيـم y المنـاظرة أو اختيار قيم مختلفة لـ y وحل المعادلة لإيجاد قيم x المناظرة . وعند تمثيل المعادلة بيانيًا فإن x عادة تقاس على المحور الأفقى وتسمى المتغير المستقل و y تقاس على المحور الرأسى وتسـمى المتغيـر التـابع . انظـر مثـال 4 والمسـائل 2.3 و 2.4 .

مثال 4 : عند تمثيل معادلة بيانيًا مثل :

EXAMPLE 4. In graphing an equation, such as

$$6x + 3y = 18$$

(1) نختار أى قيمتين لـ x ونحل المعادلة بإيجاد قيم y المناظرة . فإذا اخترنا $x = -1$ ، $x = 1$ إذًا عند $x = -1$

$$6(-1) + 3y = 18 \qquad 3y = 24 \qquad y = 8$$

النقطة a هى $(-1, 8)$

وعند $x = 1$

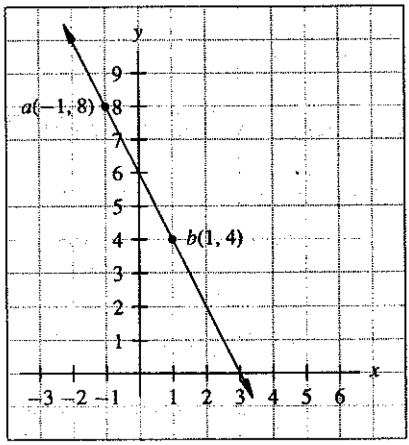
$$6(1) + 3y = 18 \qquad 3y = 12 \qquad y = 4$$

النقطة b هى $(1, 4)$

(2) نمثل النقاط ونوصلهم بخط مستقيم .

(3) نمد الخط المستقيم بقدر ما نحتاج .

انظر الشكل (2.3) .



شكل (3−2)

2.4 الميول Slopes

يقاس ميل الخط بالتغير فى المتغير التابع y مقسومًا على التغير فى المتغير x . ويحدد الميل انحدار واتجاه الخط . والخط موجب الميل يتحرك إلى أعلى من اليسار إلى اليمين . والخط السالب الميل يتحرك إلى أسفل من اليسار إلى اليمين . وكلما كبرت القيمة المطلقة للميل ازداد انحدار الخط . وميل الخط الأفقى $y = k_1$ ، (k_1 ثابتة) يساوى صفرًا وميل الخط الرأسى $x = k_2$ (k_2 ثابتة) غير محدد . ورياضيًا نرمز إلى التغير بالرمز (Δ) . وميل الخط m يكتب بالطرق المختلفة التالية :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{rise}}{\text{run}} \qquad (x_1 \neq x_2) \qquad (2.1)$$

EXAMPLE 5. To find the slope of the equation

مثال 5 : لإيجاد ميل المعادلة :

$$6x + 3y = 18$$

نعوض بالإحداثيات لأى نقطتين تفيان بالمعادلة فى صيغة الميل فى المعادلة (2.1) .

$$\text{الميل} = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

اختار من المثال 4 النقطة الأولى $(-1, 8)$ حيث $x_1 = -1$ ، $y_1 = 8$ والنقطة الثانية $(1, 4)$ حيث $x_2 = 1$ و $y = 8$ وبالتعويض نجد :

$$\text{الميل} = m = \frac{8 - 4}{-1 - (1)} = \frac{4}{-2} = -2$$

ملاحظة :

(1) إذا عكس نظام الإحداثيات فى كل من البسط والمقام فإن قيمة وإشارة الميل لا تتغير كما تحدد فى الصيغة (2.1) .

$$\text{الميل} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 8}{1 - (-1)} = \frac{-4}{2} = -2$$

(2) الميل السالب يعنى أن الخط يتحرك إلى أسفل من اليسار إلى اليمين . وهذا واضح من الرسم البيانى للمعادلة فى الشكل (3–2) .

(3) القيمة المطلقة للميل $|2|$ تعنى أن الخط يتغير رأسيًا بمعدل وحدتين كلما تحركنا أفقيًا وحدة واحدة . انظر الشكل 3–2 والمسائل 2.5 إلى 2.8 .

2.5 الحدود القاطعة Intercepts

القاطع x يتمثل فى النقطة التى يقطع عندها الخط المحور x . والحد القاطع y يتمثل فى النقطة التى يقطع عندها الخط المحور y . وحيث إن الخط يقطع محور x عند $y = 0$ فإن إحداثى x للحد القاطع x نحصل عليه بوضع $y = 0$ وإيجاد قيمة x من المعادلة . وبنفس الطريقة فطالما أن الخط يقطع محور y عند $x = 0$ فإن إحداثى y للحد القاطع y نحصل عليه بوضع $x = 0$ وإيجاد قيمة y من المعادلة .

EXAMPLE 6. To find the x intercept of the equation

مثال 6 : لإيجاد الحد القاطع x من المعادلة

$$6x + 3y = 18$$

نضع $y = 0$ ونوجد قيمة x

$$6x + 3(0) = 18 \qquad x = 3$$

∴ الحد القاطع x هو $(3, 0)$ كما يتضح من الشكل 3–2 .

ولإيجاد الحد القاطع y نضع $x = 0$ ونوجد قيمة y

$$6(0) + 3y = 18 \qquad y = 6$$

∴ الحد القاطع y هو $(0, 6)$ كما يتضح أيضًا من الشكل (3–2) والمسائل من 2.9 إلى 2.13 .

2.6 صيغة الميل – الحد القاطع The Slope-Intercept Form

ابتداءً من الصيغة العامة للمعادلة الخطية

$$ax + cy = d$$

وإيجاد قيمة y بدلالة x نحصل على

$$cy = -ax + d$$

$$y = -\frac{a}{c}x + \frac{d}{c}$$

وبافتراض أن $m = -a/c$ ، $b = d/c$

$$y = mx + b \tag{2. 2}$$

المعادلة (2 .2) تمثل صيغة الميل–الحد القاطع للمعادلة الخطية حيث m ميل الخط ، و $(0, b)$ إحداثيات الحد القاطع y ، $(b/m, 0)$ إحداثيات الحد القاطع x كما هو موضح بالمثال 7 والمثال 8 والمبين فى المسائل 2.9 إلى 2.14 .

مثال 7 : اشتقاق صيغة الميل–الحد القاطع من الصيغة العامة للمعادلة ينجز بإيجاد قيمة y بدلالة x . فإذا أعطيت .

EXAMPLE 7. Deriving the slope-intercept form from the standard form of an equation is accomplished by solving the equation for y in terms of x. Thus, given

$$6x + 3y = 18$$

$$3y = -6x + 18$$

$$y = -2x + 6$$

وبالرموز المستخدمة فى المعادلة (2 .2) فإن $m = -2$ ، ميل الخط كما وجد فى المثال 5 ، $b = 6$ وإحداثى الحد القاطع y ، $(0, 6)$ كما وجد فى المثال 6 ، وإحداثى الحد القاطع x ، $(-b/m, 0)$ ، هو $(-6/-2, 0)$ أو $(3, 0)$ كما وجد فى المثال 6 .

مثال 8 : إذا أعطيت معادلات الخطوط الأربعة المختلفة

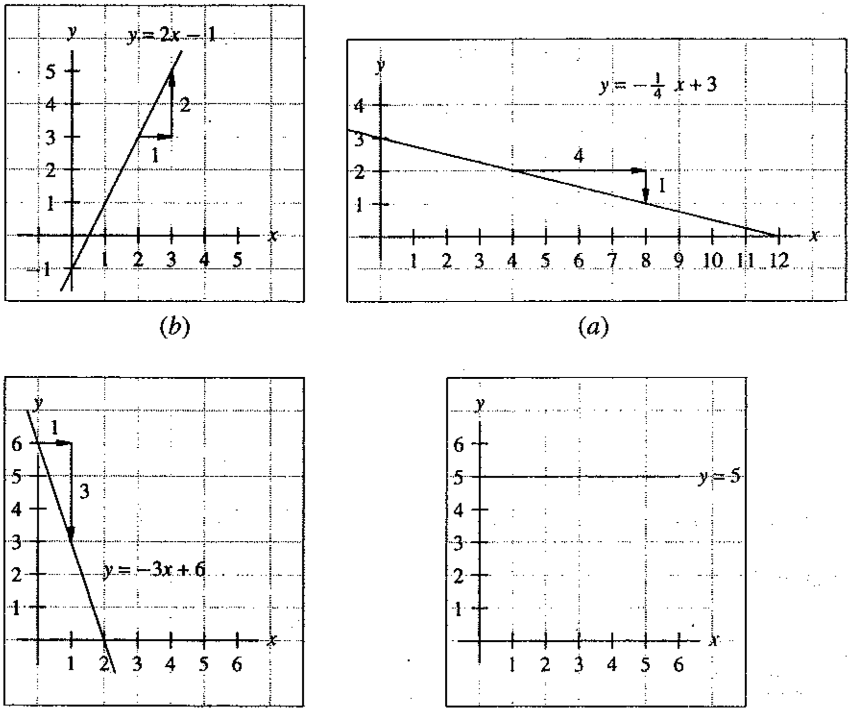
EXAMPLE 8. Given the equations of four different lines

$$(a)\ y = -\tfrac{1}{4}x + 3 \qquad (b)\ y = 2x - 1 \qquad (c)\ y = 5 \qquad (d)\ y = -3x + 6$$

وإذا علمت أن صيغة الميل-الحد القاطع للمعادلة الخطية تشير إلى أن الميل يتمثل فى معامل x . فإنه طبقًا لذلك نعلم بأن ميول الخطوط هى : (a) $-\frac{1}{4}$ ، (b) 2 ، (c) 0 ، (d) -3 .

علما بأن الحد الثابت فى صيغة الميل-الحد القاطع يتمثل فى إحداثى y للحد القاطع y حيث $x = 0$ فإنه نعلم بأن الخط يقطع المحور y عند (a) (0, 3) ، (b) (0, −1) ، (c) (0, 5) ، (d) (0, 6) .

وحيث إن الحد القاطع x للمعادلة الخطية فى صيغة الميل-الحد القاطع $(-b/m, 0)$ فإننا نعلم أن الخط يقطع المحور x عند (a) (12, 0) ، (b) $(\frac{1}{2}, 0)$ ، (d) (2, 0) . وحيث إن $m = 0$ فى (c) والقسمة على صفر غير محددة فإنه لا يوجد حد قاطع لـ x فى (c) انظر الشكل (4–2) والمسائل 2.11 إلى 2.13 .



(b) (a)

(d) (c)

شكل (4–2)

2.7 تحديد معادلة الخط المستقيم

Determining The Equation of a Straight Line

يعتمد تحديد معادلة الخط المستقيم على حجم المعلومات المتوفرة فإذا عرفنا الميل والحد القاطع y فإننا نحتاج فقط إلى استخدام صيغة الميل-الحد القاطع للمعادلة كما يتضح من المثال 9 . أما إذا عرفنا الميل m ونقطة وحيدة (x_1, y_1) على الخط كما يتضح من المثال 10 فإنه يمكن استخدام صيغة الميل-النقطة .

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (2.3)$$

وإذا عرفنا بعض النقاط القليلة على الخط كما يتضح من المثال 11 ، فإنه يمكن استخدام (2.3) بعد صيغة النقطتين .

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (2.4)$$

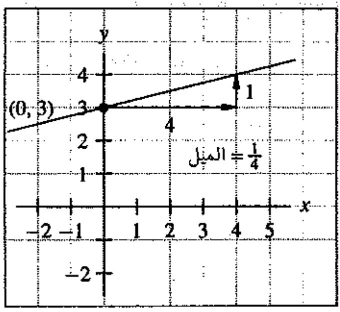
انظر أيضًا المسائل 2.14 إلى 2.20 .

مثال 9 : معادلة الخط بمعلومية الميل m والحد القاطع y $(0, b)$ مثل المبينة بالشكل (2–5) ، نستطيع إيجادها بالتعويض عن $m = \frac{1}{4}$ و $b = 3$ فى صيغة الميل–الحد القاطع .

EXAMPLE 9. The equation of a line where the slope m and the y intercept $(0, b)$ are given, such as in Fig. 2-5, can be found by substituting $m = \frac{1}{4}$ and $b = 3$ in the slope-intercept form

$$y = mx + b$$

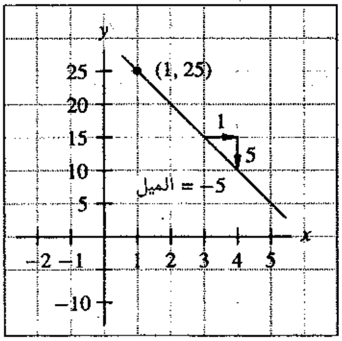
$$y = \tfrac{1}{4}x + 3$$



شكل (2–5)

مثال 10 : معادلة الخط بمعلومية الميل m ونقطة وحيدة (x_1, y_1) مثل المبينة بالشكل (2–6) نستطيع إيجادها بالتعويض عن $m = -5$ ، $x_1 = 1$ ، $y_1 = 25$ فى صيغة الميل–النقطة فى المعادلة (2.3).

EXAMPLE 10. The equation of a line where the slope m and a single point (x_1, y_1) are known, such as in Fig. 2-6, can be found by substituting $m = -5$, $x_1 = 1$, and $y_1 = 25$ in the point-slope formula in equation (2.3).



شكل (2–6)

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 25 = -5(x - 1)$$

$$y = -5x + 30$$

مثال 11 : معادلة الخط بمعلومية النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) مثل المبينة بالشكل (2–7) نستطيع إيجادها بالتعويض عن $x_1 = 4$ ، $y_1 = 1$ ، $x_2 = 6$ ، $y_2 = 2$ فى صيغة ميل النقطتين فى المعادلة (2–4) لإيجاد الميل .

EXAMPLE 11. The equation of a line where two points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) are known, such as in Fig. 2-7, can be found by substituting $x_1 = 4$, $y_1 = 1$, $x_2 = 6$, and $y_2 = 2$ in the two-point formula in equation (2.4) to find the slope

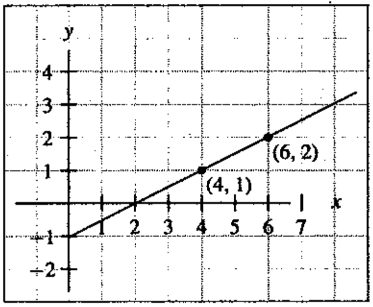
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-1}{6-4} = \frac{1}{2}$$

ثم نعوض فيما بعد بقيم m ، x_1 ، y_1 فى صيغة الميل-النقطة

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = \tfrac{1}{2}(x - 4)$$

$$y = \tfrac{1}{2}x - 1$$



شكل (2–7)

2.8 تطبيقات المعادلات الخطية فى الإدارة والاقتصاد

Applications of Linear Equations in Business And Economics

مجالات عديدة فى الإدارة والاقتصاد تعالج بالمعادلات الخطية كما يتضح من الأمثلة من 12 إلى 15 والمسائل من 2.21 إلى 2.34 .

مثال 12 : تكون المعادلات الخطية غالبًا مناسبة لوصف قيود الإنتاج . افترض أن منشأة ما يتوفر عندها أسبوعيًا 240 ساعة من العمل الماهر لإنتاج نوعين من المنتجات . وكل وحدة من المنتج الأول x يتطلب إنتاجها 3 ساعات من العمل الماهر على حين تتطلب الوحدة من المنتج الثانى y ، 4 ساعات من العمل الماهر (أ) عبر عن قيود العمل للمنشأة فى صيغة معادلة . (ب) ارسم شكلاً بيانيًا يوضح كل الطرق الممكنة المختلفة للعمل التى يمكن أن تخصص بين السلعتين .

EXAMPLE 12. Linear equations are often suitable for describing production constraints. Assume a firm has 240 hours of skilled labor available each week to produce two products. Each unit of the first product x requires 3 hours of skilled labor. A unit of the second product y requires 4 hours. (*a*) Express the firm's labor constraint in terms of an equation. (*b*) Draw a graph showing all the different possible ways labor can be allocated between the two goods.

(أ) بما أن إنتاج الوحدة x يتطلب 3 ساعات ومن الوحدة y 4 ساعات وإجمالى الساعات المتوفرة 240 ساعة فإن القيد نستطيع أن نعبر عنه فى الصيغة العامة للمعادلة الخطية .

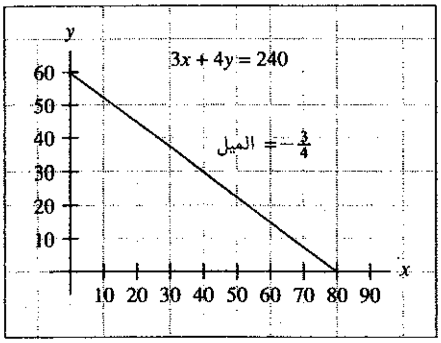
$$3x + 4y = 240 \tag{2.5}$$

(ب) لتسهيل التمثيل البيانى نحول (2.5) إلى صيغة الميل-الحد القاطع ثم نمثله بيانيًا كما فى الشكل 8–2 .

$$4y = -3x + 240$$

$$y = -\tfrac{3}{4}x + 60$$

لاحظ أن النقط فقط فى الربع الأول مناسبة لهذه المسألة . وهذا أيضًا صحيح لمعظم المسائل الاقتصادية الأخرى .



شكل (2–8)

مثال 13 : باستخدام المعادلة الخطية للتعبير من الخط المستقيم أو الإهلاك الخطى فقد قدرت القيمة الحالية ، y ، لشاحنة متحركة بعد x من السنوات بالمعادلة الآتية :

EXAMPLE 13. Using a linear equation to express *straight-line* or *linear depreciation*, the current value y of a moving firm's van after x years is estimated to be

$$y = 68{,}000 - 8000x$$

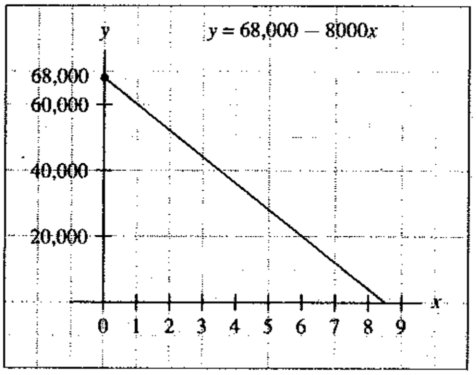
أوجد (أ) القيمة الأصلية للشاحنة ، (ب) القيمة بعد 3 سنوات ، (جـ) القيمة المستردة بعد 8 سنوات ، (د) ارسم شكلاً بيانيًا للمعادلة .

(أ) بالتعويض عن $x = 0$ ، $y = 68{,}000 - 8000(0) = 68{,}000$

(ب) بالتعويض عن $x = 3$ ، $y = 68{,}000 - 8000(3) = 44{,}000$

(جـ) بالتعويض عن $x = 8$ ، $y = 68{,}000 - 8000(8) = 4000$

(د) انظر الشكل (2–9) والمسائل 2.25 و 2.26 .



شكل (2–9)

مثال 14 :

(أ) منشأة ما ، تكاليفها الثابتة FC ، \$560 لتغطية الإيجار والأجور الإدارية . وهذه التكاليف يجب أن تدفع بغض النظر عن مستوى الناتج وأن التكلفة الحدية ، MC ، \$9 وهى نفقة كل وحدة إضافية من الناتج x . والمنشأة تواجه بتكاليف كلية C ، معبرًا عنها بالمعادلة الخطية $y = mx + b$ حيث $y = C$ ، $m = \text{MC} = 9$ ، $b = \text{FC} = 560$ ، ولذلك :

$$C = 9x + 560$$

فإذا أنتجت 140 وحدة ، أى $x = 140$.

$$C = 9(140) + 560 = 1820$$

(ب) وإذا كانت المنشأة تعمل فى ظل المنافسة الكاملة حيث السعر p لكل وحدة من الناتج ثابتًا فإن الإيراد الكلى R يعبر عنه بالمعادلة الخطية التالية :

$$R = p \cdot x$$

وإذا بيعت 140 وحدة عند $p = 25$

$$R = 25(140) = 3500$$

(جـ) وحيث إن الربح π يتمثل فى الفرق بين الإيراد الكلى والتكلفة الكلية فإن مستوى الربح يمكن أن يعبر عنه بالمعادلة الخطية التالية :

$$\pi = R - C$$

وبالتعويض

$$\pi = 25(x) - [9x + 560] = 16x - 560$$

فإذا أنتجت وبيعت 140 وحدة

$$\pi = 16(140) - 560 = 1680$$

انظر أيضًا المسائل 2.21 إلى 2.24

مثال 15 : ينادى الاقتصاديون غالبًا بتعظيم المنفعة فى ظل شرط قيد الميزانية . وقيد الميزانية بصفة عامة يتمثل فى خط الميزانية الذى يصور كل التوليفات المحتملة المختلفة للسلع التى يستطيع الفرد أن يشتريها بميزانية معينة B . افترض أن فردًا ما لديه 150$ وينفقها على السلعتين x ، y وأن أسعارها هى $p_x = \$5$ ، و $p_y = \$2$. (أ) ارسم خط ميزانيته . بين ما يحدث لخط الميزانية ، (ب) إذا انخفضت ميزانيته بنسبة 20% ، (جـ) إذا انخفض سعر السلعة x ، p_x بمقدار النصف ، (د) إذا ارتفع سعر السلعة y ، p_y ، بمقدار $\frac{1}{2}$ دولار .

EXAMPLE 15. Economists are often called on to maximize utility subject to some budget constraint. The constraint is generally represented by a *budget line* depicting all the different possible combinations of goods a person can buy with a given budget B. Assume a woman has \$150 to spend on two goods x and y whose respective prices are $p_x = \$5$ and $p_y = \$2$. (*a*) Draw her budget line. Show what happens to the budget line (*b*) if her budget falls by 20 percent, (*c*) if p_x is cut in half, and (*d*) if p_y increases by 50¢.

(أ) صيغة خط الميزانية تتمثل فى الصيغة العامة للمعادلة الخطية .

$$p_x \cdot x + p_y \cdot y = B$$

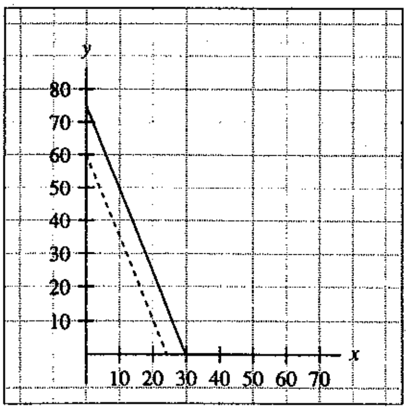
وبالتعويض عن $p_x = 5$ ، $p_y = 2$ ، و $B = 150$.

$$5x + 2y = 150 \qquad (2.6)$$

نحول (2.6) إلى صيغة الميل-الحد القاطع ونمثلها بيانيًا .

$$y = -2.5x + 75$$

انظر الخط المتصل فى شكل (2-10)(a) .



شكل (2–10)(*a*)

(ب) إذا انخفضت الميزانية بنسبة 20% فإن الميزانية الجديدة هى 120 أى $150 - 0.2(150) = 120$. ومعادلة خط الميزانية الجديد هى :

$$5x + 2y = 120$$

$$y = -2.5x + 60$$

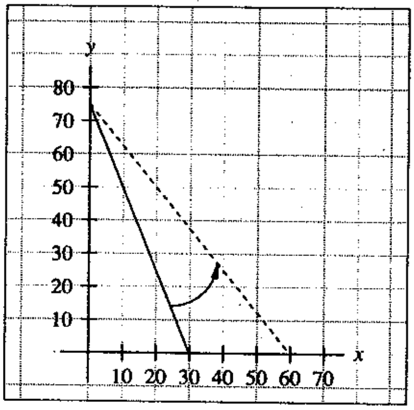
انظر الخط المتقطع فى الشكل $(2\text{–}10)(a)$ وتخفيض الميزانية تسبب فى انتقال خط الميزانية وبشكل متوازى إلى اليسار .

(جـ) إذا انخفض سعر السلعة x ، p_x إلى النصف . فإن المعادلة الأصلية فى (2.6) تصبح :

$$2.5x + 2y = 150$$

$$y = -1.25x + 75$$

الحد القاطع الرأسى يبقى ثابتًا ولكن الميل يتغير ، ويصبح مسطحًا . انظر الخط المتقطع فى الشكل $(2\text{–}10)(b)$ وبانخفاض سعر السلعة x إلى النصف فإن الكمية المشتراة من السلعة x ، وبنفس الميزانية تتضاعف .



شكل $(2\text{–}10)(b)$

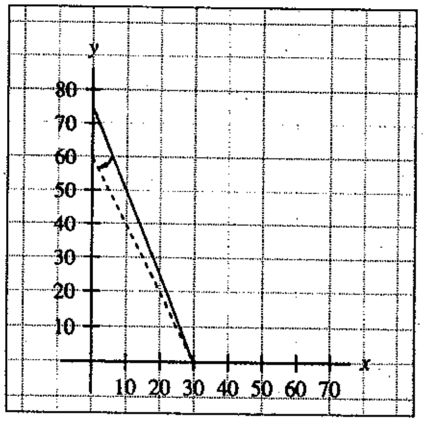
(د) إذا ارتفع سعر السلعة y ، P_y ، بمقدار $\frac{1}{2}$ دولار .

$$5x + 2.5y = 150$$

$$y = -2x + 60$$

التغير فى p_y تسبب فى تغير كل من الحد القاطع الرأسى والميل كما يتضح من الشكل $(2\text{–}10)(c)$. وبتغير p_y فإن الحد القاطع ينخفض لأنه يمكن شراء كمية أقل من السلعة y بنفس الميزانية والميل يصبح مسطحًا . لاحظ أن الحد القاطع الأفقى لا يتغير . وأن المستهلك ـ إذا لم تحدث تغيرات فى p_x ، B ـ مازال يستطيع شراء نفس الكمية العظمى من السلعة x إذا اختار أن ينفق كل ميزانيته على السلعة x .

انظر أيضًا المسائل 2.31 ، 2.32 .



شكل $(2\text{–}10)(c)$

مسائل محلولة

Solving Linear Equations حل المعادلات الخطية

2.1. استخدم خصائص التساوى لحل المعادلات الخطية التالية عن طريق تحريك الحدود ذات المتغير المجهول إلى اليسار والحدود الأخرى إلى اليمين ثم بسط تلك المعادلات :

2.1. Use the properties of equality to solve the following linear equations by moving all terms with the unknown variable to the left, all other terms to the right, and then simplifying:

(*a*) $3x + 8 = 5x - 6$

$$\begin{aligned} 3x + 8 &= 5x - 6 \\ 3x - 5x &= -6 - 8 \\ -2x &= -14 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

(*b*) $32 - 3x = 9x - 40$

$$\begin{aligned} 32 - 3x &= 9x - 40 \\ -3x - 9x &= -40 - 32 \\ -12x &= -72 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

(*c*) $6(4x + 5) - 3x = 19 - 2(7x + 82)$

$$\begin{aligned} 6(4x + 5) - 3x &= 19 - 2(7x + 82) \\ 24x + 30 - 3x &= 19 - 14x - 164 \\ 24x - 3x + 14x &= 19 - 164 - 30 \\ 35x &= -175 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

(*d*) $6x - 13 = 3(2x - 11) + 20$

$$\begin{aligned} 6x - 13 &= 3(2x - 11) + 20 \\ 6x - 13 &= 6x - 33 + 20 \\ 6x - 6x &= -33 + 20 + 13 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

عندما نختصر المعادلة إلى الصفر ، فهى معادلة متماثلة . والمعادلة المتماثلة هى المعادلة التى حينما نعوض عن x بأى عدد حقيقى ، تبقى صحيحة .

2.2. أوجد قيمة x بإزالة المقام ، أى بضرب طرفى المعادلة فى المقام المشترك الأصغر كلما كان ذلك ملائمًا .

2.2. Solve for x by *clearing the denominator*, that is, by multiplying both sides of the equation by the least common denominator (LCD) as soon as is feasible.

(*a*) $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 6$

$$\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 6$$

بضرب طرفى المعادلة فى 20 .

$$20 \cdot \left(\frac{x}{4} - \frac{x}{5}\right) = 6 \cdot 20$$
$$5x - 4x = 120$$
$$x = 120$$

(*b*) $\frac{x}{6} - 5 = \frac{x}{9} + 1$

$$\frac{x}{6} - 5 = \frac{x}{9} + 1$$
$$\frac{x}{6} - \frac{x}{9} = 1 + 5$$
$$18 \cdot \left(\frac{x}{6} - \frac{x}{9}\right) = 6 \cdot 18$$
$$3x - 2x = 108$$
$$x = 108$$

(*c*) $\frac{8}{x} + \frac{6}{x+5} = \frac{12}{x} \qquad (x \neq 0, -5)$

$$\frac{8}{x} + \frac{6}{x+5} = \frac{12}{x}$$
$$x(x+5) \cdot \left(\frac{8}{x} + \frac{6}{x+5}\right) = \frac{12}{x} \cdot x(x+5)$$
$$8(x+5) + 6x = 12(x+5)$$
$$14x + 40 = 12x + 60$$
$$2x = 20 \qquad x = 10$$

(*d*) $\frac{14}{x+3} + \frac{20}{x-4} = \frac{38}{x-4} \qquad (x \neq -3, 4)$

$$(x+3)(x-4)\left(\frac{14}{x+3} + \frac{20}{x-4}\right) = \left(\frac{38}{x-4}\right)(x+3)(x-4)$$
$$14(x-4) + 20(x+3) = 38(x+3)$$
$$14x - 56 + 20x + 60 = 38x + 114$$
$$-4x = 110 \qquad x = -27.5$$

(*e*) $\frac{36}{x-5} - \frac{25}{2x} = \frac{26}{x-5} \qquad (x \neq 0, 5)$

$$2x(x-5) \cdot \left(\frac{36}{x-5} - \frac{25}{2x}\right) = \left(\frac{26}{x-5}\right) \cdot 2x(x-5)$$
$$72x - 25(x-5) = 52x$$
$$-5x + 125 = 0 \qquad x = 25$$

التمثيل البيانى بنظام الإحداثيات الكارتيزى

Graphing on a Cartesian Coordinate System

2.3. عين بيانيًا النقاط الآتية :

2.3. Plot the following points: (*a*) (3, 4), (*b*) (5, −2), (*c*) (−6, 3), (*d*) (0, −4), (*e*) (−7, 0), (*f*) (−8, −2), (*g*) (2, −3), (*h*) (−5, −4).

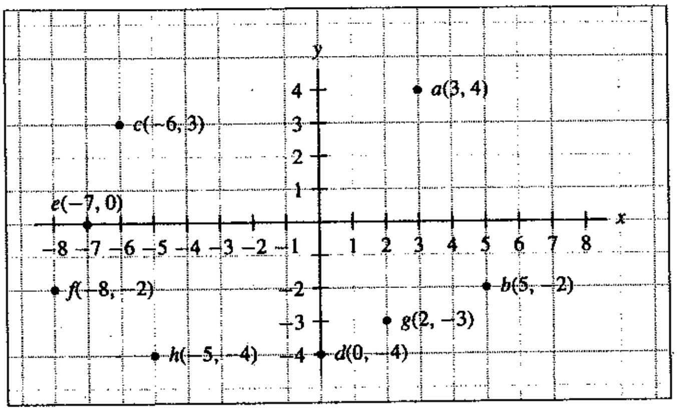
(a) لتعيين بيانيًا النقطة $(3, 4)$ نتحرك 3 وحدات إلى اليمين من نقطة الأصل ثم نتحرك إلى أعلى 4 وحدات كما فى الشكل (2–11) .

(b) لتحديد موقع النقطة $(5, -2)$ نتحرك 5 وحدات إلى اليمين من نقطة الأصل ثم نتحرك إلى أسفل وحدتين كما فى الشكل (2–11) .

(c) لإيجاد النقطة $(-6, 3)$ نتحرك 6 وحدات إلى اليسار و 3 وحدات إلى أعلى .

(d) لتحديد موقع النقطة $(0, -4)$ لن نتحرك أفقيًا على طول المحور x بل نتحرك إلى أسفل 4 وحدات .

(e) ولتحديد النقطة $(-7, 0)$ نتحرك 7 وحدات إلى اليسار ثم نقف لأنه لا توجد حركة رأسية على طول المحور y . وللنقاط (f) ، (g) و (h) انظر الشكل (2–11) .



شكل (2–11)

2.4. حول المعادلات الخطية ذات الصيغة العامة التالية إلى صيغة الميل–الحد القاطع بإيجاد قيمة y بدلالة x .

2.4. Convert the following linear equations in standard form to the slope-intercept form by solving for y in terms of x.

(a) $56x + 7y = 91$

$$56x + 7y = 91$$
$$7y = -56x + 91$$
$$y = -8x + 13$$

(b) $42x - 6y = 90$

$$42x - 6y = 90$$
$$-6y = -42x + 90$$
$$y = 7x - 15$$

(c) $72x - 8y = 0$

$$72x - 8y = 0$$
$$-8y = -72x$$
$$y = 9x$$

(d) $16y = 176$

$$16y = 176$$
$$y = 11$$

ملاحظة :

(1) إذا لم يكن هناك حد ثابت فى الصيغة العامة للمعادلة الخطية كما هو الحال فى (c) فإن $b = 0$ فى صيغة الميل–الحد القاطع وإحداثى y للحد القاطع y $(0, b)$ يساوى صفرًا . وهذا يعنى أن الخط البيانى يقطع محور y عند نقطة الأصل . انظر المسألة (2.13) (g) .

(2) إذا لم يكن هناك الحد x فى الصيغة العامة للمعادلة الخطية كما هو الحال فى (d) فإن الميل $m=0$ فى صيغة الميل-الحد القاطع ، و y تساوى الثابت والخط البيانى للمعادلة عبارة عن خط أفقى ـ انظر المسألة (2.13) (h) .

الميول Slopes

.2.5 أوجد ميول الخطوط للمعادلة التالية .

2.5. Find the slopes of the lines of the following equations:

(a) $y=-5x+16$ (b) $y=\frac{1}{6}x-5$ (c) $y=4.3x-8$ (d) $y=-7x$ (e) $y=18$
(f) $y=-\frac{1}{2}$ (g) $x=6$

يتمثل الميل فى صيغة الميل-الحد القاطع للمعادلة الخطية بمعامل x . وميول الخطوط للمعادلات الأربع الأولى واضحة ، أى (a) (5−) ، (b) $\frac{1}{6}$ ، (c) (4. 3) ، (d) (7−) . والميل لـ (e) و (f) يساوى صفرًا لأنه لا يوجد المتغير x فى المعادلات . والمعادلات كان يمكن أن تكتب على الصورة التالية $y=(0)x+18$ ، $y=(0)x-\frac{1}{2}$. والخطوط البيانية عبارة عن خطوط أفقية .

والميل فى (g) خط رأسى حينما $x=6$. غير محدد لأن الخطوط الرأسية لها نفس الإحداثى x (هنا 6) لكل قيم y . فإذا كانت $x_1=x_2$ ، $x_2-x_1=0$ والقسمة على صفر غير مسموح بها . لهذا كان التحذير أن

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad (x_1 \neq x_2)$$

.2.6 أوجد ميول الخطوط للمعادلات التالية عن طريق تحويل : تلك المعادلات أولاً إلى صيغة الميل-الحد القاطع .

2.6. Find the slopes of the lines of the following equations by first converting the equations to the slope-intercept form:

(a) $24x+6y=30$
$y=-4x+5 \qquad m=-4$

(b) $15x-3y=48$
$y=5x-16 \qquad m=5$

(c) $9x+\frac{1}{2}y=-14$
$y=-18x-28 \qquad m=-18$

(d) $-36x+16y=80$
$y=2\frac{1}{4}x+5 \qquad m=2\frac{1}{4}$

(e) $14x-4y=1$
$y=3\frac{1}{2}x-\frac{1}{4} \qquad m=3\frac{1}{2}$

(f) $14x+56y=280$
$y=-\frac{1}{4}x+5 \qquad m=-\frac{1}{4}$

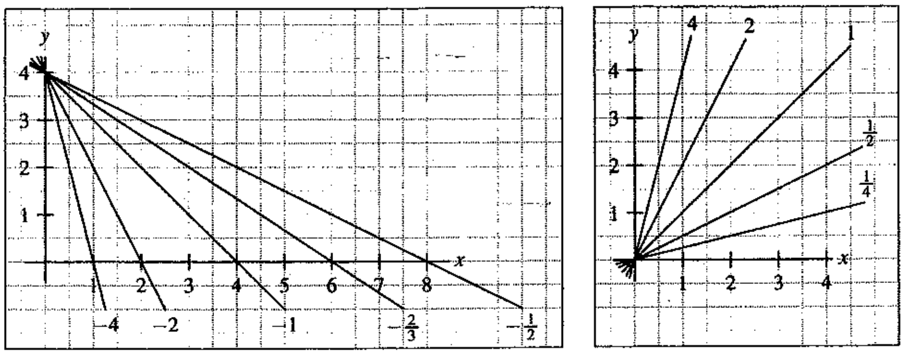
.2.7 لتوضيح انحدار واتجاه الخطوط بالميل : (a) ارسم خمسة خطوط منفصلة كل منها مع الحد القاطع y (0, 0) ولها الميول التالية : $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ، 1 ، 2 ، 4 على التوالى . (b) ارسم خمسة خطوط منفصلة كل منها مع الحد القاطع y (0, 4) ولها الميول التالية : 4− ، 2− ، 1− ، $\frac{2}{3}$ ، $-\frac{1}{2}$ على التوالى .

2.7. To illustrate the steepness and direction conveyed by the slope, (a) draw five separate lines each with y intercept (0, 0) and having slopes of $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, and 4 respectively; (b) draw five separate lines each with y intercept (0, 4) and having slopes of -4, -2, -1, $-\frac{2}{3}$ and $-\frac{1}{2}$, respectively.

(a) انظر الشكل 12-2 (a) ، (b) انظر الشكل 12-2 (b) . (فى الصفحة القادمة)

.2.8 استخدم الأشكال المختلفة للمعادلة فى قسم 2.4 لإيجاد ميول الخطوط التى تمر بالنقاط التالية :

2.8. Use the different variations of the formula in Section 2.4 to find the slopes of the lines passing through the following points. Recall that the order in which you treat the points does not matter provided you are consistent within the problem.



(*b*) (*a*)

شكل (2–12)

(*a*) (5, 8), (7, 14)

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{14-8}{7-5}=\frac{6}{2}=3$$

(*b*) (6, 10), (9, 4)

$$m=\frac{\text{rise}}{\text{run}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-10}{9-6}=\frac{-6}{3}=-2$$

(*c*) (−2, 5), (1, −7)

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\text{rise}}{\text{run}}=\frac{-7-5}{1-(-2)}=\frac{-12}{3}=-4$$

(*d*) (4, −19), (6, −9)

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-9-(-19)}{6-4}=\frac{10}{2}=5$$

وفى الأجزاء المتبقية من المسألة سنعكس نظام النقاط :

(*e*) (8, 6), (12, 16)

$$m=\frac{\text{rise}}{\text{run}}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{6-16}{8-12}=\frac{-10}{-4}=2\frac{1}{2}$$

(*f*) (−1, 3), (8, 15)

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{3-15}{-1-8}=\frac{-12}{-9}=1\frac{1}{3}$$

(*g*) (−2, −13), (−6, −5)

$$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-13-(-5)}{-2-(-6)}=\frac{-8}{4}=-2$$

(*h*) (5, −7), (12, −8)

$$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{\text{rise}}{\text{run}}=\frac{-7-(-8)}{5-12}=\frac{1}{-7}=-\frac{1}{7}$$

الحدود القاطعة Intercepts

2.9. أوجد الحد القاطع y لكل من المعادلات التالية :

2.9. Find the y intercept for each of the following equations:

(*a*) $5x+y=9$

الحد القاطع y يظهر عندما يقطع الخط المحور y وتكون $x = 0$ بوضع $x = 0$ وإيجاد قيمة y .

$$5(0) + y = 9$$
$$y = 9$$

∴ إحداثيات الحد القاطع y هى $(0, 9)$.

(*b*) $7x - 4y = 56$

بوضع $x = 0$

$$7(0) - 4y = 56$$
$$-4y = 56$$
$$y = -14$$

∴ الحد القاطع y : $(0, -14)$

(*c*) $y = 5x - 17$

بوضع $x = 0$

$$y = 5(0) - 17$$
$$y = -17$$

∴ الحد القاطع y : $(0, -17)$

إذا كانت المعادلة فى صيغة الميل-الحد القاطع $y = mx + b$ مثلما الحال فى (*c*) فإن إحداثيات الحد القاطع y $(0, b)$ يمكن أن يستدل عليها مباشرة من المعادلة كما شرح فى المثال 7 .

(*d*) $y = 18x - 33$

∴ الحد القاطع y : $(0, -33)$

(*e*) $y = 3x + \frac{1}{4}$

∴ الحد القاطع y : $(0,)\frac{1}{4}$

(*f*) $y = \frac{1}{5}x - 2$

∴ الحد القاطع y : $(0, -2)$

2.10. Find x intercept for the following equations:

2.10. أوجد الحد القاطع x للمعادلات التالية :

(*a*) $y = 9x - 72$

الحد القاطع x يتمثل فى النقطة التى يقطع فيها الخط المستقيم محور x وطالما أن الخط يقطع المحور x حيث $y = 0$ فإن الصفر هو الإحداثى y للحد القاطع x . ولإيجاد الإحداثى x نضع $y = 0$ ونوجد قيمة x من المعادلة .

$$0 = 9x - 72$$
$$-9x = -72$$
$$x = 8$$

∴ الحد القاطع x : $(8, 0)$

(*b*) $y = 13x + 169$

بوضع $y = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 13x + 169 \\ -13x &= 169 \\ x &= -13 \end{aligned}$$

∴ الحد القاطع x : $(-13, 0)$

(*c*) $y = 32x - 8$

$$\begin{aligned} 0 &= 32x - 8 \\ -32x &= -8 \\ x &= \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

∴ الحد القاطع x : $(\tfrac{1}{4}, 0)$

(*d*) $y = 7x$

$$\begin{aligned} 0 &= 7x \\ x &= 0 \end{aligned}$$

∴ الحد القاطع x : $(0, 0)$

2.11. أوجد الحد القاطع x بدلالة معاملات صيغة الميل-الحد القاطع للمعادلة الخطية $y = mx + b$.

2.11. Find the x intercept in terms of the parameters of the slope-intercept form of a linear equation $y = mx + b$.

بوضع $y = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= mx + b \\ mx &= -b \\ x &= -\frac{b}{m} \end{aligned} \tag{2.7}$$

∴ الحد القاطع x بصيغة ميل الحد القاطع $(-b/m, 0)$.

2.12. استخدم معلومات المسألة (2.11) فى إيجاد الحد القاطع x للمعادلات التالية :

2.12. Use the information in Problem 2.11 to speed the process of finding the x intercepts for the following equations:

(*a*) $y = 16x + 64$

وهنا $m = 16$ ، $b = 64$ ، وبالتعويض فى (2.7)

$$\begin{aligned} x &= -\frac{64}{16} \\ x &= -4 \end{aligned}$$

∴ الحد القاطع x : $(-4, 0)$

(*b*) $y = 18x - 9$

حيث $m = 18$ ، $b = -9$ ، ومن المعادلة (2.7)

$$x = -\left(\frac{-9}{18}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}$$

∴ الحد القاطع x : $(\frac{1}{2}, 0)$

(*c*) $y = 15x + 120$

وحيث $m = 15$ ، $b = 120$

$$x = -\frac{120}{15}$$

$$x = -8$$

∴ الحد القاطع x : $(-8, 0)$

(*d*) $y = 5x - 125$

وحيث $m = 5$ ، $b = -125$

$$x = -\left(\tfrac{-125}{5}\right)$$

$$x = 25$$

∴ الحد القاطع x : $(25, 0)$

(*e*) $18x + 5y = 54$

إذا لم تكن المعادلة فى صيغة الميل-الحد القاطع فإننا نوجد صيغة الميل-الحد القاطع بالتعويض عن قيمة y بالصفر .

$$18x + 5(0) = 54$$

$$x = 3$$

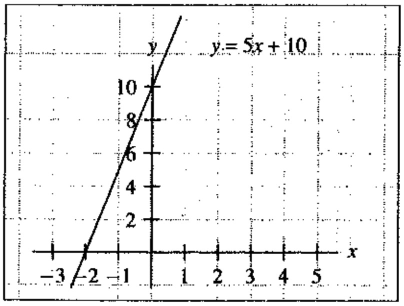
∴ الحد القاطع x : $(3, 0)$

2.13. أوجد الحد القاطع y والحد القاطع x واستخدمهما كنقطتين للتمثيل البيانى للمعادلات الخطية التالية :

2.13. Find the y intercepts and the x intercepts and use them as the two points needed to graph the following linear equations:

(*a*) $y = 5x + 10$

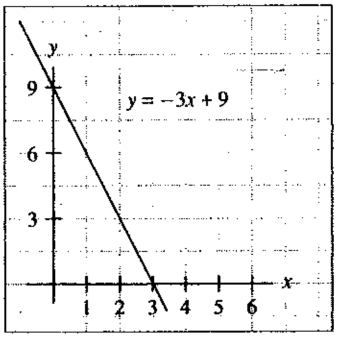
الحد القاطع y : $(0, 10)$ والحد القاطع x : $(-2, 0)$. انظر الشكل (2–13) .



شكل (2–13)

(*b*) $y = -3x + 9$

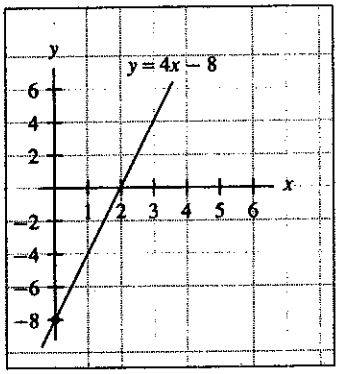
الحد القاطع y : $(0, 9)$ والحد القاطع x : $(3, 0)$. انظر الشكل (2–14) .



شكل (2–14)

(*c*) $y = 4x - 8$

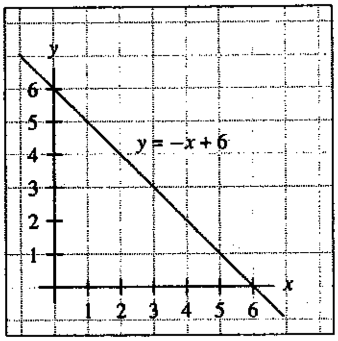
الحد القاطع y : $(0, -8)$ والحد القاطع x : $(2, 0)$. انظر الشكل (2–15) .



شكل (2–15)

(*d*) $y = -x + 6$

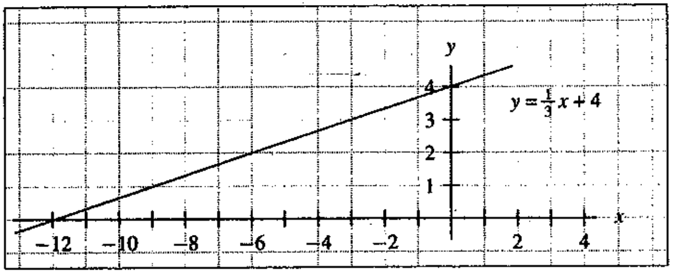
الحد القاطع y : $(0, 6)$ والحد القاطع x : $(6, 0)$. انظر الشكل (2–16) .



شكل (2–16)

(*e*) $y = \frac{1}{3}x + 4$

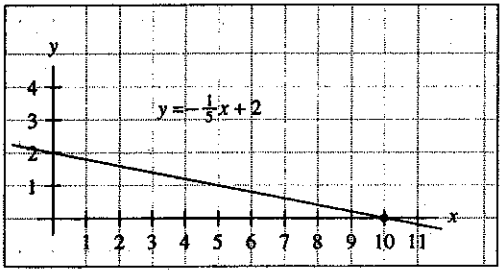
الحد القاطع y : $(0, 4)$ والحد القاطع x : $(-12, 0)$. انظر الشكل (2–17) .



شكل (2–17)

(*f*) $y = -\frac{1}{5}x + 2$

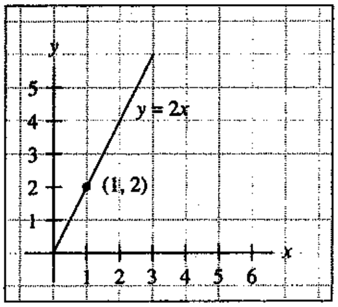
الحد القاطع y : $(0, 2)$ والحد القاطع x : $(10, 0)$. انظر الشكل (2–18) .



شكل (2–18)

(*g*) $y = 2x$

الحد القاطع y : $(0, 0)$ والحد القاطع x : $(0, 0)$ عندما يتزامن الحد القاطع x مع الحد القاطع y كما يظهر عندما يمر الخط بنقطة الأصل فإنه يجب إيجاد نقطة مختلفة . نفترض لسهولة الحساب أن $x = 1$ $\therefore$ $y = 2(1) = 2$ ، والآن نستطيع أن ننشئ الرسم البيانى من النقاط $(0, 0)$ و $(1, 2)$. انظر الشكل (2–19) .

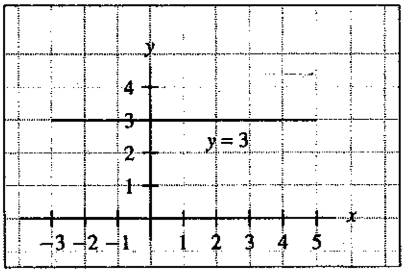


شكل (2–19)

(*h*) $y = 3$

الحد القاطع y : $(0, 3)$ ولا يظهر الحد القاطع x لأن y لا يمكن أن توضع مساوية للصفر دون إحداث

تعارض قطالما $y = 0$ بصورة مستقلة عن x فإن y سوف تساوى 3 لأى قيمة لـ x والتمثيل البيانى عبارة عن خط أفقى يرتفع بثلاث وحدات عن محور x ويستحيل أن يقطعه . انظر الشكل (20–2) .



شكل (20–2)

Determining The Equation for a Straight Line تحديد المعادلة للخط المستقيم

2.14. أوجد المعادلة للخطوط المستقيمة التالية :

2.14. Find the equation for the following straight lines with:

(*a*) الميل = 7 ، والحد القاطع y : (0, 16)

باستخدام صيغة الميل-الحد القاطع $y = mx + b$ ، وبالتعويض عن $m = 7$ ، $b = 16$.

$$y = 7x + 16$$

(*b*) الميل = −6 ، والحد القاطع y : (0, 45)

بالتعويض عن $m = -6$ ، $b = 45$.

$$y = -6x + 45$$

(*c*) الميل = 0.35 ، والحد القاطع y : (0, −5.5)

$$y = 0.35x - 5.5$$

2.15. استخدم صيغة الميل-النقطة من المعادلة (*2.3*) لاشتقاق المعادلة لكل ما يلى :

2.15. Use the point-slope formula from equation (*2.3*) to derive the equation for each of the following:

(*a*) الخط يمر بالنقطة (3, 11) ، والميل = −4 ، وحيث إن صيغة الميل-النقطة هى

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

وبالتعويض عن $x_1 = 3$ ، $y_1 = 11$ و $m = -4$ نحصل على

$$y - 11 = -4(x - 3)$$
$$y = -4x + 12 + 11$$
$$y = -4x + 23$$

(*b*) الخط يمر بالنقطة (−7, 4) والميل = 5

$$y-4=5[x-(-7)]$$
$$y=5x+35+4$$
$$y=5x+39$$

(*c*) الخط يمر بالنقطة (8, −2) والميل $= \frac{1}{4}$

$$y-(-2)=\tfrac{1}{4}(x-8)$$
$$y+2=\tfrac{1}{4}x-2$$
$$y=\tfrac{1}{4}x-4$$

(*d*) الخط يمر بالنقطة (−5, −3) والميل $= -7$

$$y-(-3)=-7[x-(-5)]$$
$$y+3=-7x-35$$
$$y=-7x-38$$

2.16. أوجد المعادلة للخط الذى يمر بالنقطة (−3, 6) ويوازى الخط الذى معادلته $y = 5x + 8$.

2.16. Find the equation for the line passing through (−3, 6) and parallel to the line having the equation $y = 5x + 8$.

الخطوط المتوازية لها نفس الميل . ومن ثم فإن ميل الخط الذى نبحث عنه يساوى 5 وبضم هذه المعلومة مع الإحداثيات المحددة سابقًا فى صيغة ميل النقطة .

$$y-6=5[x-(-3)]$$
$$y=5x+15+6$$
$$y=5x+21$$

2.17. حدد المعادلة للخط الذى يمر بالنقطة (6, 4) ويكون عموديًا على الخط الذى معادلته $y = 2x + 15$.

2.17. Determine the equation for the line passing through (6, 4) and perpendicular to the line having the equation $y = 2x + 15$.

ميول الخطوط المتعامدة تكون سالبة ومقلوبة لبعضها البعض . الخط الذى ميله 2 ، فإن ميل الخط العمودى عليه يجب أن يكون $-\frac{1}{2}$.

$$y-4=-\tfrac{1}{2}(x-6)$$
$$y=-\tfrac{1}{2}x+3+4$$
$$y=-\tfrac{1}{2}x+7$$

2.18. أوجد المعادلات للخطوط التى تمر بالنقاط التالية :

2.18. Find the equations for the lines passing through the following points:

(*a*) (3, 13) و (7, 45)

باستخدام صيغة النقطتين والأسلوب الموضح فى المثال 11 .

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{45 - 13}{7 - 3} = \frac{32}{4} = 8$$

وبالتعويض عن $m = 8$ ، $x_1 = 3$ ، $y_1 = 13$ فى صيغة الميل-النقطة .

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 13 = 8(x - 3)$$

$$y = 8x - 11$$

(*b*) (2, 18), (5, −3)

$$m = \frac{-3 - 18}{5 - 2} = \frac{-21}{3} = -7$$

باستخدام $m = -7$ ، $x_1 = 2$ ، $y_1 = 18$ فى صيغة ميل النقطة .

$$y - 18 = -7(x - 2)$$

$$y = -7x + 32$$

(*c*) (3, −17), (0, 19)

$$m = \frac{19 - (-17)}{0 - 3} = \frac{36}{-3} = -12$$

وحيث إن نقطة القاطع الرأسى : (0, 19) فإن المعادلة يمكن أن تكتب حالاً :

$$y = -12x + 19$$

(*d*) (0, −2), (8, 0)

$$m = \frac{0 - (-2)}{8 - 0} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

وحيث إن الحد القاطع y : (0, −2)

$$y = \frac{1}{4}x - 2$$

2.19. أثبت الصيغة للميل المحدد فى القسم 2.4 :

2.19. Prove the formula for the slope given in Section 2.4:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

إذا أعطيت النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) على نفس الخط فإن كلتا النقطتين يجب أن يفى بصيغة ميل الحد القاطع للمعادلة :

$$y_1 = mx_1 + b$$

$$y_2 = mx_2 + b$$

وبطرح y_2 من y_1 مع الأخذ فى الاعتبار ما قيل فى المثال 5 من أن الترتيب غير مهم طالما ظل الترتيب ثابتًا .

$$y_1 - y_2 = mx_1 + b - mx_2 - b$$

$$y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2)$$

بالقسمة على $(x_1 - x_2)$ وبإعادة ترتيب الحدود

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

2.20. أثبت صحة صيغة الميل-النقطة :

2.20. Verify the point-slope formula:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

لأى نقطة (x, y) تكون على الخط الذى يمر بالنقطة (x_1, y_1) وميله m فيجب أن يكون صحيحًا بأن

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

بضرب طرفى المعادلة فى $(x - x_1)$ وبإعادة ترتيب الحدود

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Linear Equations in Business and Economics المعادلات الخطية فى الإدارة والاقتصاد

2.21. منشأة تكاليفها الثابتة $7000 للمبانى والآلات والتكلفة المتغيرة للوحدة المنتجة $600 . ماهى التكاليف الكلية C ، إذا أنتجت المنشأة (*a*) 15 وحدة ، (*b*) 30 وحدة من المنتج ؟

2.21. A firm has a fixed cost of $7000 for plant and equipment and a variable cost of $600 for each unit produced. What is the total cost *C* of producing (*a*) 15 and (*b*) 30 units of output?

$$C = 600x + 7000$$

$C = 600(15) + 7000 = 16{,}000$ (*a*) إذا كانت $x = 15$

$C = 600(30) + 7000 = 25{,}000$ (*b*) إذا كانت $x = 30$

2.22. أوجد التكاليف الكلية لمنشأة ما إذا أنتجت (*a*) 20 وحدة ، (*b*) 35 وحدة ، وقدرت التكاليف الثابتة للمنشأة $3500 والتكلفة الحدية للوحدة $400 .

2.22. Find the total cost of producing (*a*) 20 units and (*b*) 35 units of output for a firm that has fixed costs of $3500 and a marginal cost of $400 per unit.

$$C = 400x + 3500$$

$C = 400(20) + 3500 = 11{,}500$ (*a*) إذا كانت $x = 20$

$C = 400(35) + 3500 = 17{,}500$ (*b*) إذا كانت $x = 35$

2.23. تعمل منشأة ما فى ظل المنافسة الكاملة وتحصل على $45 لكل وحدة مباعة من الناتج . وقدرت التكلفة المتغيرة للوحدة $25 والتكلفة الثابتة $1600 . ما هو مستوى ربح المنشأة π ، إذا باعت (*a*) 150 وحدة ، (*b*) 200 وحدة ، (*c*) 75 وحدة ؟

2.23. A firm operating in pure competition receives $45 for each unit of output sold. It has a variable cost of $25 per item and a fixed cost of $1600. What is its profit level π if it sells (*a*) 150 items, (*b*) 200 items, and (*c*) 75 items?

التكلفة (C) – الإيراد (R) = الربح (π)

وحيث إن $R = 45x$ و $C = 25x + 1600$ وبالتعويض

$$\pi = 45x - (25x + 1600)$$

$$\pi = 20x - 1600$$

(a) عند $x = 150$ $\qquad \pi = 20(150) - 1600 = 1400$

(b) عند $x = 200$ $\qquad \pi = 20(200) - 1600 = 2400$

(c) عند $x = 75$ $\qquad \pi = 20(75) - 1600 = -100$

2.24. أوجد مستوى الربح لمنشأة تعمل فى ظل المنافسة الكاملة ـ قدرت التكلفة الثابتة $950 والتكلف المتغيرة للوحدة $70 وسعر البيع للوحدة $85 ـ عندما تنتج (*a*) 50 وحدة ، (*b*) 80 وحدة .

2.24. Find the profit level of a firm in pure competition that has a fixed cost of $950, a variable cost of $70, and a selling price of $85 when it sells (*a*) 50 units and (*b*) 80 units.

الربح (π) = الإيراد (R) – التكلفة (C)

وحيث إن $R = 85x$ و $C = 70x + 950$ وبالتعويض

$$\pi = 85x - (70x + 950)$$

$$\pi = 15x - 950$$

(a) عند $x = 50$ $\qquad \pi = 15(50) - 950 = -200$ $\qquad$ خسارة

(b) عند $x = 80$ $\qquad \pi = 15(80) - 950 = 250$

2.25. أوجد (*a*) القيمة بعد 6 سنوات (*b*) والقيمة الاستردادية بعد 8 سنوات لآلة حصاد قيمتها الحالية *y* بعد *x* من السنوات هى :

2.25. Find (*a*) the value after 6 years and (*b*) the salvage value after 8 years of a combine whose current value *y* after *x* years is

$$y = 67{,}500 - 7750x$$

(*a*) $\qquad y = 67{,}500 - 7750(6) = 21{,}000$

(*b*) $\qquad y = 67{,}500 - 7750(8) = 5500$

2.26. تقدر القيمة *y* لكمبيوتر ما بعد *x* من السنوات :

2.26. For tax purposes the value *y* of a computer after *x* years is

$$y = 3{,}000{,}000 - 450{,}000x$$

أوجد (*a*) قيمة الكمبيوتر بعد 3 سنوات ، (*b*) القيمة الاستردادية بعد 5 سنوات .

Find (*a*) the value of the computer after 3 years, and (*b*) the salvage value after 5 years.

(*a*) $\qquad y = 3{,}000{,}000 - 450{,}000(3) = 1{,}650{,}000$

(*b*) $\qquad y = 3{,}000{,}000 - 450{,}000(5) = 750{,}000$

2.27. يحصل متقاعد ما على $5120 فائدة سنوية من مبلغ $40,000 موضوعة فى سندين ، الأول عائده 14% والآخر 12% . ما هو المبلغ المستثمر فى كل سند ؟

2.27. A retiree receives $5120 a year interest from $40,000 placed in two bonds, one paying 14 percent and the other 12 percent. How much is invested in each bond?

نفترض أن *x* تساوى حجم المبلغ المستثمر بعائد 14% . ومن ثم فإن $(40{,}000 - x)$ هى المبلغ المستثمر

بعائد 12% . وعليه فإن الفائدة السنوية y التى يحصل عليها من المبلغين هى :

$$y = 0.14x + 0.12\,(40{,}000 - x)$$

وبالتعويض عن $y = 5120$

$$5120 = 0.14x + 4800 - 0.12x$$

$$320 = .02x$$

عند 14% $\quad x = 16{,}000$ at 14%

عند 12% $\quad 40{,}000 - 16{,}000 = 24{,}000$

2.28. يمتلك سمسار ما $60,000 ويرغب فى استثمار هذا المبلغ . ما هى المبالغ التى ينبغى عليه أن يستثمرها بمعدل 11% و 15% ليحصل على عائد قدره 14% من الاستثمار الإجمالى ؟

2.28. With $60,000 to invest, how much should a broker invest at 11 percent and how much at 15 percent to earn 14 percent on the total investment?

إذا كانت x تمثل المبلغ المستثمر عند 11% فإن $(60{,}000 - x)$ تمثل المبلغ المستثمر عند 15% وإن الفائدة السنوية y هى :

$$y = .11x + .15(60{,}000 - x)$$

وبالتعويض عن المستوى المرغوب فيه من y : $0.14(60{,}000) = 8400$

$$8400 = .11x + 9000 - .15x$$

$$-600 = -0.04x$$

عند 11% $\quad x = 15{,}000$

عند 15% $\quad 60{,}000 - 15{,}000 = 45{,}000$

2.29. صانع حلويات يرغب فى خلط صنفين من الحلويات ، قيمة الرطل من النوع الأول 45 سنتًا ، وقيمة الرطل من النوع الثانى 85 سنتًا لكى يحصل على 200 رطل مخلوط وبحيث تكون قيمة الرطل المخلوط 70 سنتًا . كم رطلاً من كل نوع ينبغى أن يشترك فى الخلطة ؟

2.29. A candy maker wants to blend candy worth 45 cents a pound with candy worth 85 cents a pound to obtain 200 pounds of a mixture worth 70 cents a pound. How much of each type should go into the mixture?

نفترض أن x تمثل مقدار الحلويات ذا القيمة 45 سنتًا ومن ثم فإن $(200 - x)$ تمثل مقدار الحلويات ذا القيمة 85 سنتًا .

$$y = .45x + .85(200 - x)$$

وبالتعويض عن قيمة الخلطة المرغوبة y .

$$.70(200) = .45x + .85(200 - x)$$

$$140 = .45x + 170 - .85x$$

$$-30 = -.4x$$

$x = 75$ (رطل) عند قيمة 45¢

$(200 - 75) = 125$ (رطل) عند قيمة 85¢

2.30. ما مقدار كمية الماء ذى نسبة أملاح 18% والذى يجب أن يخلط مع 6000 جالون من الماء ذى نسبة أملاح 12% من أجل الحصول على ماء نسبة الأملاح فيه 16% ؟

2.30. How much wine with an 18% alcohol content must be mixed with 6000 gallons of wine with a 12% alcohol content to obtain wine with a 16% alcohol content?

نفترض أن x تمثل مقدار الماء ذا نسبة الأملاح 18% والذى يجب أن يخلط ، وأن y تمثل مقدار الماء المخلوط .

$$y = .18x + .12(6000)$$

وبالتعويض عن مقدار الماء المخلوط المرغوب فيه $(6000 + x)$ جالون مع نسبة أملاح 16% لـ y .

$$.16(6000 + x) = .18x + .12(6000)$$

$$960 + .16x = .18x + 720$$

$$-0.02x = -240$$

$$x = 12{,}000 \text{ جالون}$$

2.31. يبين منحنى الناتج المتكافئ التوليفات المختلفة من السلعتين التى يمكن أن تشترى بميزانية معينة B . والأفران يمكن أن تسخن بالغاز (x) أو بالفحم (y) وإذا علمت أن $p_x = 100$ ، $p_y = 400$ ، $B = 8000$. (a) ارسم منحنى الناتج المكافئ ، (b) ابدأ دائمًا من البيانات الأصلية وارسم منحنى جديد للناتج المكافئ إذا زادت B بنسبة 50% ، (c) إذا تضاعفت p_x ، و (d) إذا انخفضت p_y بنسبة 37.5% .

2.31. An *isocost curve* shows the different combinations of two goods that can be purchased with a given budget B. Blast furnaces can be heated with either gas (x) or coal (y). Given $p_x = 100$, $p_y = 400$, and $B = 8000$, (a) draw the isocost curve. Always starting from the original data, draw a new isocost curve (b) if B increases by 50 percent, (c) if p_x doubles, and (d) if p_y decreases by 37.5 percent.

(a) إن الصيغة العامة لمعادلة منحنى الناتج المتكافئ عند $p_x = 100$ ، $p_y = 400$ ، $B = 8000$ هى :

$$100x + 400y = 8000$$

$$y = -0.25x + 20$$

والتمثيل البيانى عبارة عن خط متصل فى الشكل $(2-21)(a)$.

(b) وحينما يزيد الإنفاق بمقدار 50% فإن الميزانية الجديدة هى $8000 + 0.5(8000) = 12{,}000$ والمعادلة الجديدة هى

$$100x + 400y = 12{,}000$$

$$y = -0.25x + 30$$

وهذا ممثل بيانيًا بالخط المتقطع فى الشكل $(2-21)(a)$.

(c) إذا تضاعفت p_x أى أصبح السعر الجديد 200 فإن المعادلة الجديدة هى :

$$200x + 400y = 8000$$

$$y = -0.5x + 20$$

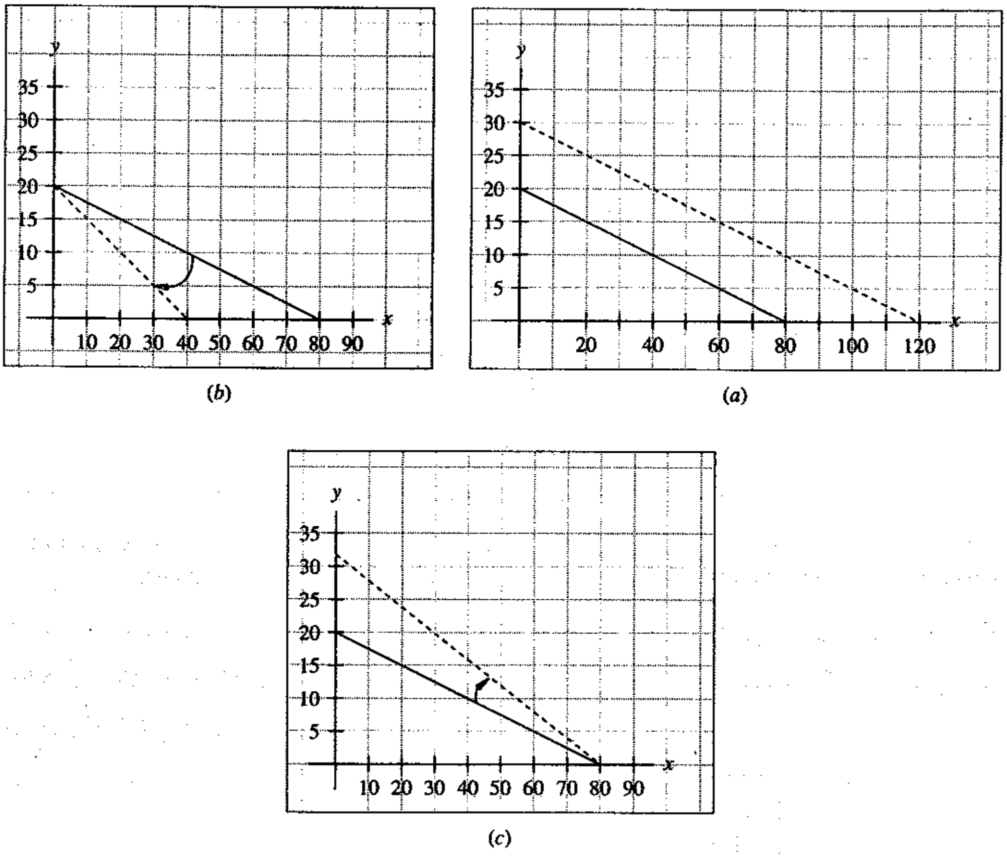
وهذا ممثل بيانيًا بالخط المتقطع فى الشكل $(2–21)(b)$.

(d) إذا انخفضت p_y بنسبة 37.5% فإن p_y الجديدة هى $400 - 0.375(400) = 250$

$$100x + 250y = 8000$$

$$y = -0.4x + 32$$

وهذا ممثل بيانيًا بالخط المتقطع فى الشكل $(2–21)(c)$.



(b) (a)

(c)

شكل (2–21)

2.32. إذا أعطيت السلعتين x ، y وأسعارهما p_x ، p_y والميزانية B. (a) حدد صيغة الميل-الحد القاطع لمعادلة منحنى الناتج المكافئ ـ واستخدم المعلومات من (a) لتحديد ما يحدث للمنحنى إذا (b) تغيرت الميزانية ، (c) إذا تغير p_x ، و (d) إذا تغير p_y .

2.32. Given two goods x and y with prices p_x and p_y and a budget B, (a) determine the slope-intercept form of the equation for the isocost curve. Using the information from (a), indicate what will happen to the graph of the curve (b) if the budget changes, (c) if p_x changes, and (d) if p_y changes.

(a) نبدأ بالصيغة العامة ونوجد قيمة y .

$$p_x \cdot x + p_y \cdot y = B$$

$$p_y \cdot y = -(p_x \cdot x) + B$$

$$y = -\left(\frac{p_x}{p_y}\right)x + \frac{B}{p_y} \qquad (2.8)$$

وهذه المعادلة تشابه صيغة الميل-الحد القاطع للمعادلة الخطية $y = mx + b$ حيث الميل $m = -(p_x/p_y)$ ، و $b = B/p_y$ الإحداثى للحد القاطع y . ومن ثم فإن الحد القاطع y لخط التكافؤ $(0,\ B/p_y)$. وحيث إن الحد القاطع x للصيغة العامة $(-b/m, 0)$ فإن الحد القاطع x لخط التكافؤ هو :

$$[-(B/p_y)/(-p_x/p_y), 0] = (B/p_x, 0)$$

(*b*) واضح من المعادلة (2.8) أن التغير فى الميزانية B سيؤثر فى الحدود القاطعة x ، y ولكنه لن يؤثر فى الميل . وهذا يعنى أن منحنى الناتج المتكافئ سوف ينتقل ـ وبشكل موازٍ للمنحنى الأصلى ـ إلى اليمين إذا زادت B وإلى اليسار إذا انخفضت B .

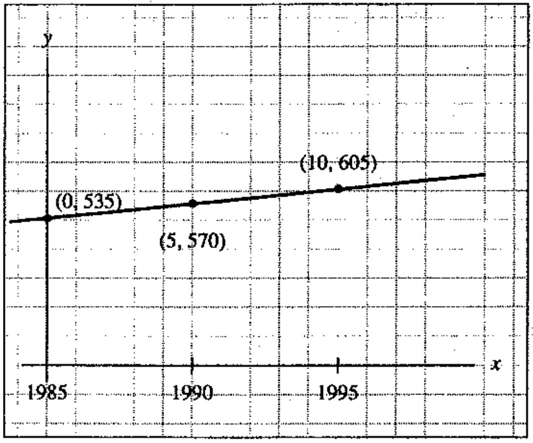
(*c*) إذا تغيرت p_x فإن الميل $(-p_x/p_y)$ والحد القاطع x $(B/p_x, 0)$ سوف يتغير دون تغير الحد القاطع y $(0, B/p_y)$. والرسم البيانى سوف يكون أكثر انحداراً إذا زادت p_x وأكثر تسطحًا إذا قلت p_x مرتكزًا حول نفس الحد القاطع y .

(*d*) إذا تغيرت p_y فإن الميل $(-p_x/p_y)$ والحد القاطع y $(0, B/p_y)$ سوف يتغير دون الحد القاطع x $(B/p_x, 0)$. والزيادة فى p_y ، تخفض الحد القاطع y وتزيد الميل تسطحًا . والانخفاض فى p_y يرفع الحد القاطع y ويزيد الميل انحداراً ، وفى كلا الحالتين يبقى الحد القاطع x ثابتاً .

2.33. عند زيادة أرباح الشركة بمعدل ثابت فإنها ارتفعت من 535 مليون دولار عام 1985 إلى 570 مليون دولار عام 1990 . أوجد المستوى المتوقع للربح عام 1995 إذا استمر الاتجاه العام للزيادة .

2.33. **Increasing at a constant rate, a company's profits y have gone from \$535 million in 1985 to \$570 million in 1990. Find the expected level of profit for 1995 if the trend continues.**

نفترض أن $x = 0$ لعام 1985 و $x = 5$ لعام 1990 . ولهذا عندنا نقطتين للرسم البيانى هما $(0, 535)$ ، $(5, 570)$ وطالما أن الأرباح تتغير بمعدل ثابت فإن الميل $(\Delta y/\Delta x)$ ثابت ويمكن توصيل النقاط بخط مستقيم كما فى الشكل (2–22) .



شكل (2–22)

استخدم صيغة النقطتين لإيجاد الميل :

$$m = \frac{570 - 535}{5 - 0} = \frac{35}{5} = 7$$

وحيث إن الحد القاطع (0, 535)

∴ $$y = 7x + 535$$

وبالتعويض عن $x = 10$ لعام 1995

$$y = 7(10) + 535 = 605$$

2.34. إذا علمت أن 0°C (صفرية) تعادل 32°F وأن 100°C تعادل 212°F . عبر فى شكل علاقة خط مستقيم عن درجات الحرارة المحسوبة بمقاييس مختلفة كمعادلة خطية .

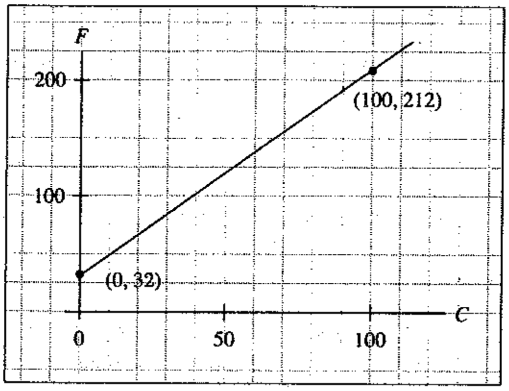
2.34. Given that 0° (Celsius) is equal to 32°F (Fahrenheit) and 100°C is equal to 212°F and that there is a straight-line relationship between temperatures measured on the different scales, express the relationship as a linear equation.

بدءاً من النقطتين (0, 32) ، (100, 212) فى الشكل (2–23) وباستخدام صيغة النقطتين فإنه يمكن إيجاد الميل m .

$$m = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = 1.8$$

وحيث إن الحد القاطع y (0, 32)

$$F = 1.8C + 32$$



شكل (2–23)

مسائل إضافية

حل المعادلات Solving Equations

3.35. حل المعادلات الخطية التالية باستخدام خصائص التساوى :

2.35. Solve the following linear equations by using the properties of equality:

(a) $6x - 7 = 3x + 2$ (b) $60 - 8x = 3x + 5$

(c) $7x + 5 = 4(3x - 8) + 7$ (d) $3(2x + 9) = 4(5x - 21) - 1$

2.36. Solve the following equations by clearing the denominator:

3.36. حل المعادلات التالية بإزالة المقام :

(a) $\frac{x}{3} + \frac{x}{8} = 22$ (b) $\frac{x}{5} - 4 = \frac{x}{9} + 8$

(c) $\frac{240}{x-2} = \frac{576}{x+5}$ (d) $\frac{675}{x+3} = \frac{120}{x-6} + \frac{375}{x+3}$

Slopes الميول

2.37. حول المعادلات الخطية التالية من الصيغة العامة إلى صيغة الحد القاطع :

2.37. Convert the following linear equations in standard form to the slope-intercept form:

(*a*) $3x + 12y = 96$ (*b*) $12x - 16y = 240$

(*c*) $22x + 2y = 86$ (*d*) $28x - 4y = -104$

3.38. أوجد ميول المعادلات الخطية التالية :

2.38. Find the slopes of the following linear equations:

(*a*) $y = -16x + 23$ (*b*) $y = \frac{1}{2}x - 9$ (*c*) $y = 15.5x$

(*d*) $y = -\frac{1}{8}x - 3$ (*e*) $y = 19$ (*f*) $x = 27$

2.39 أوجد ميول الخطوط التى تمر بالنقاط التالية :

2.39. Find the slopes of the lines passing through the following points:

(*a*) (2, 7), (5, 19) (*b*) (1, 9), (3, 3) (*c*) (3, 56), (7, 8)

(*d*) (9, 19), (15, 22) (*e*) (−4, 0), (1, −3) (*f*) (−7, 0), (−1, 0)

Intercepts الحدود القاطعة

2.40. أوجد الحد القاطع y لكل من المعادلات التالية فى الصيغة العامة :

2.40. Find the y intercepts of each of the following equations in standard form:

(*a*) $8x - 3y = 15$ (*b*) $13x + \frac{1}{2}y = 4.5$ (*c*) $-26x + 7y = -56$

(*d*) $47x - 18y = -9$

2.41. أوجد الحد القاطع y لكل من المعادلات التالية فى صيغة ميل الحد القاطع :

2.41. Find the y intercepts of each of the following equations in slope-intercept form:

(*a*) $y = -6.5x - 23$ (*b*) $y = 108x + 14$ (*c*) $y = 79.5x - 250$

(*d*) $y = -3x + 0.65$

2.42. أوجد الحد القاطع x لمعادلات الصيغة العامة التالية :

2.42. Find the x intercepts of the standard form equations below:

(*a*) $6x - 13y = 126$ (*b*) $\frac{1}{4}x + 17y = -8$ (*c*) $-5x - \frac{1}{2}y = 55$

(*d*) $-13x + 19y = -39$

2.43. أوجد الحد القاطع y لكل من المعادلات التالية فى صيغة ميل الحد القاطع

2.43. Find the x intercepts of each of the following equations in slope-intercept form:

(*a*) $y = 7x + 35$ (*b*) $y = -8x + 64$ (*c*) $y = \frac{2}{5}x - 16$

(*d*) $y = -1.5x - 9$

Finding The Equation for a Straight line إيجاد معادلة الخط المستقيم

2.44. اشتق معادلة الخط المستقيم الذى :

2.44. Derive the equation for a straight line having

(*a*) ميله (−13) والحد القاطع y : (0, 22) . (*b*) ميله ($\frac{4}{9}$) والحد القاطع y : (0, −6) .

(*c*) ميله ($-\frac{2}{3}$) والحد القاطع y : (0, 49) . (*d*) ميله (23.5) والحد القاطع y : (0, −70) .

2.45. باستخدام صيغة الميل-النقطة ، اشتق المعادلة لكل من الخطوط المستقيم التالية :

2.45. Use the point-slope formula to derive the equation for each of the following straight lines:

(*a*) يمر بالنقطة (2, 6) وميله (7) . (*b*) يمر بالنقطة (8, −5) وميله (3) .

(*c*) يمر بالنقطة (−10, 2) وميله ($\frac{1}{2}$) . (*d*) يمر بالنقطة (3, −11) وميله −5 .

2.46. استخدم صيغة الميل-النقطتين فى اشتقاق معادلة الخط المستقيم الذى يمر خلال النقاط :

2.46. Use the two-point formula to derive the equation for a straight line passing through:

(*a*) $(2, 6), (5, 18)$ (*b*) $(-1, 10), (4, -5)$

(*c*) $(-6, -3), (9, 7)$ (*d*) $(4, -5), (10, -8)$

تطبيقات فى الإدارة والاقتصاد Business and Economics Applications

2.47. أوجد القيمة بعد (*a*) سنتين ، (*b*) 4 سنوات لآلة تصوير اشتريت ابتداءً بـ $12,250 وتهلك بمعدل ثابت سنوى قدره $1995 .

2.47. Find the value after (*a*) 2 years and (*b*) 4 years of a photocopier which was purchased for $12,250 initially and is depreciating at a constant rate of $1995 a year.

2.48. قدر القيمة الحالية بعد (*a*) 3 سنوات ، (*b*) 7 سنوات لآلة طابعة اشتريت بـ $265,000 وتهلك بمعدل سنوى $32,000 .

2.48. Estimate the current value after (*a*) 3 years and (*b*) 7 years of a printing press purchased for $265,000 and depreciating linearly by $32,000 a year.

2.49. منشأة تقدر تكاليفها الثابتة $122,000 والتكاليف المتغيرة للوحدة $750 . حدد التكاليف الكلية للمنشأة إذا أنتجت (*a*) 25 وحدة ، (*b*) 50 وحدة .

2.49. A firm has fixed costs of $122,000 and variable costs of $750 a unit. Determine the firm's total cost of producing (*a*) 25 units and (*b*) 50 units.

2.50. قدر التكاليف الكلية لشركة تنتج (*a*) 10 وحدات ، (*b*) 100 وحدة إذا علمت أن التكاليف الثابتة $85,000 والتكاليف المتغيرة للوحدة $225 .

2.50. Estimate the total cost of producing (*a*) 10 units and (*b*) 100 units for a company with fixed costs of $85,000 and variable costs of $225 a unit.

2.51. حدد مستوى الربح لشركة إذا باعت (*a*) 75 وحدة ، و (*b*) 125 وحدة وتعمل فى ظل سوف المنافسة الكاملة حيث تحصل على $120 لكل وحدة مباعة ولها تكلفة ثابتة $1800 وتكلفة متغيرة للوحدة $55 .

2.51. Determine the level of profit on sales of (*a*) 75 units and (*b*) 125 units for a company operating in a purely competitive market which receives $120 for each item sold and has a fixed cost of $1800 and variable costs of $55 a unit.

2.52. ما مقدار ما يستثمره سمسار ما من حساب $50,000 عند معدل 8% وما مقدار ما يستثمره عند معدل 12% ليحصل على معدل عائد سنوى متوسطه 9.5% ؟

2.52. How much of a $50,000 account should a broker invest at 8 percent and how much at 12 percent to average a 9.5 percent yearly rate of return?

2.53. ما مقدار أطنان الفحم المقيمة بـ $140 للطن . والتى يجب أن تخلط مع الفحم المقيم $190 للطن للحصول على خليط من 32,000 طن من الفحم قيمة الطن الواحد منه $175 ؟

2.53. How many tons of coal valued at $140 a ton should be mixed with coal worth $190 a ton to obtain a mixture of 32,000 tons of coal worth $175 a ton?

2.54. عند نمو تكاليف المنشأة بمعدل ثابت فإنها ترتفع من 265 مليون دولار عام 1988 إلى 279 مليون دولار عام 1992 . قدر التكاليف عام 1996 إذا استمر الاتجاه العام فى الارتفاع .

2.54. Growing at a constant rate, a firm's costs have increased from $265 million in 1988 to $279 million in 1992. Estimate costs in 1996 if the trend continues.

2.55. انخفضت المبيعات من 905 مليون دولار عام 1989 إلى 887.75 مليون دولار عام 1992 . وعلى أساس الاتجاه العام تنبأ بمستوى المبيعات عام 1995 .

2.55. Sales in millions of dollars have declined linearly from \$905 in 1989 to \$887.75 in 1992. On the basis of the trend, project the level of sales in 1995.

حل مسائل إضافية

2.35. (*a*) $x=3$ (*b*) $x=5$ (*c*) $x=6$ (*d*) $x=8$.

2.36. (*a*) $x=48$ (*b*) $x=135$ (*c*) $x=7$ (*d*) $x=12$

2.37. (*a*) $y=-\frac{1}{4}x+8$ (*b*) $y=\frac{3}{4}x-15$ (*c*) $y=-11x+43$ (*d*) $y=7x+26$

2.38. (*a*) -16 (*b*) $\frac{1}{2}$ (*c*) 15.5 (*d*) $-\frac{1}{8}$ (*e*) 0 (*f*) غير محدد

2.39. (*a*) 4 (*b*) -3 (*c*) -12 (*d*) $\frac{1}{2}$ (*e*) $-\frac{3}{5}$ (*f*) 0

2.40. (*a*) $(0, -5)$ (*b*) $(0, 9)$ (*c*) $(0, -8)$ (*d*) $(0, \frac{1}{2})$

2.41. (*a*) $(0, -23)$ (*b*) $(0, 14)$ (*c*) $(0, -250)$ (*d*) $(0, 0.65)$

2.42. (*a*) $(21, 0)$ (*b*) $(-32, 0)$ (*c*) $(-11, 0)$ (*d*) $(3, 0)$

2.43. (*a*) $(-5, 0)$ (*b*) $(8, 0)$ (*c*) $(40, 0)$ (*d*) $(-6, 0)$

2.44. (*a*) $y=-13x+22$ (*b*) $y=\frac{4}{9}x-6$ (*c*) $y=-\frac{2}{3}x+49$ (*d*) $y=23.5x-70$

2.45. (*a*) $y=7x-8$ (*b*) $y=3x-29$ (*c*) $y=\frac{1}{2}x+17$ (*d*) $y=-5x+4$

2.46. (*a*) $y=4x-2$ (*b*) $y=-3x+7$ (*c*) $y=\frac{2}{3}x+1$ (*d*) $y=-\frac{1}{2}x-3$

2.47. (*a*) \$8260 (*b*) \$4270

2.48. (*a*) \$169,000 (*b*) \$41,000

2.49. (*a*) \$140,750 (*b*) \$159,500

2.50. (*a*) \$87,250 (*b*) \$107,500

2.51. (*a*) \$3075 (*b*) \$6325

2.52. \$31,250 عند 8% و \$18,750 عند 12% .

2.53. (*a*) 22,400 طن بقيمة \$190 للطن و 9600 طن بقيمة \$140 للطن .

2.54. 293 مليون دولار .

2.55. 870.5 مليون دولار .

الفصل الثالث

الدوال Functions

3.1 مفاهيم وتعريفات Concepts and Definitions

يقصد بالدالة القاعدة (f) التى تحدد قيمة واحدة فقط لكل قيمة من قيم x وتسمى قيمة الدالة . ونكتب الدالة بالصورة الآتية $y=f(x)$ وتقرأ بأن y دالة فى x . ويقصد بنطاق الدالة مجموعة القيم الممكنة لـ x . أما مدى الدالة فيعنى مجموعة القيم الممكنة لـ $f(x)$.

وتحدد المعادلات عادة بالصيغة الجبرية الموضحة فى المثال 1 . وتستخدم حروف أخرى للتعبير عن الدالة مثل h, g . فإذا وجدت أكثر من دالة ، فيجب أن تستخدم الحروف المختلفة للتمييز فيما بينها .

وفيما يلى الأنواع المختلفة للدوال التى يمكن أن تقابلنا .

Constant function: $f(x) = a_0$ دالة ثابتة

Linear function: $f(x) = a_1x + a_0$ دالة خطية

Quadratic function: $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (a_2 \neq 0)$ دالة من الدرجة الثانية

Cubic function: $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (a_3 \neq 0)$ دالة من الدرجة الثالثة

Polynomial function of degree n: $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ دالة كثيرة الحدود من الدرجة n

حيث n عدد صحيح غير سالب $a_n \neq 0$

لاحظ أن الدوال الثابتة والخطية والدرجة الثانية والثالثة هى دوال كثيرات حدود حيث $n = 1, 2, 3$ على التوالى .

Rational Function: $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ الدالة النسبية

حيث $g(x)$ و $h(x)$ كثيرتى حدود وأن $h(x) \neq 0$. ولاحظ أن اسم الدالة النسبية مشتق من نسبة الدوال .

Power Function: $f(x) = ax^n$ دالة القوى

حيث n أى عدد حقيقى .

مثال 1 : $f(x) = 7x - b$ هى قاعدة تتخذ عدد ما يضرب فى 7 ويطرح b من الناتج . فإذا أعطيت قيمة ما لـ x ، نعوض بهذه القيمة فى الصيغة ونحل المعادلة لإيجاد قيمة $f(x)$.

EXAMPLE 1. The function $f(x) = 7x - 6$ is the rule that takes a number, multiplies it by 7, and then subtracts 6 from the product. If a value is given for x, the value is substituted for x in the formula and the equation solved for $f(x)$.

فمثلاً : إذا $x = 3$

$$f(3) = 7(3) - 6 = 15$$

فمثلاً : إذا $x = 4$

$$f(4) = 7(4) - 6 = 22$$

انظر المسائل 3.1 إلى 3.4 .

مثال 2 : فيما يلي مجموعة من الأمثلة على الدوال المختلفة :

EXAMPLE 2. Given below are examples of different functions:

دالة ثابتة	$f(x) = 14, \qquad g(x) = -9$
دالة خطية	$f(x) = 5x - 3, \qquad g(x) = -8x, \qquad h(x) = 22$
دالة من الدرجة الثانية	$f(x) = 3x^2 + 8x - 7, \qquad g(x) = x^2 - 4x, \qquad h(x) = 6x^2$
دالة من الدرجة الثالثة	$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 9x + 5, \qquad g(x) = 7x^3 + 4, \qquad h(x) = 2x^3$
كثيرة حدود	$f(x) = 8x^4 + 3x^2 - 5x + 9, \qquad g(x) = 2x^5 - x^3 + 7$
دالة نسبية	$f(x) = \dfrac{x-9}{x^2-4} \quad (x \neq \pm 2), \qquad g(x) = \dfrac{5x}{x-3} \quad (x \neq 3)$
دالة القوى	$f(x) = 4x^5, \qquad g(x) = x^{2/3}, \qquad h(x) = 9x^{-2} \quad (x \neq 0)$

نطاق كثيرات الحدود بما فيها الدوال الثابتة والخطية والدرجة الثانية والثالثة هو مجموعة الأعداد الحقيقية . أما حقل الدوال النسبية والقوى فيستبعد أي قيمة لـ x تتطلب عملية غير محددة مثل القسمة على الصفر .

3.2 التمثيل البياني للدوال Graphing Functions

يتمثل الرسم البياني للدالة الخطية بخط مستقيم . وجميع المعادلات الخطية دوال ما عدا المعادلات من صيغة $x = c$ حيث c ثابت . فيتمثل الرسم البياني لها في خط عمودي (انظر المسألة 3.4 (f)) . وفي الرسم البياني عمومًا نستبدل $f(x)$ بـ y كرمز للدالة كمتغير تابع يقع على المحور الرأسي . وكان التمثيل البياني الخطي موضوع الفصل الثاني .

والرسم البياني للدوال غير الخطية في نظام الإحداثيات الكارتيزية ينجز بتحديد عدد من الأزواج المتسقة للقيم التي تفي بالدالة والأزواج المتسقة تتحدد باختيار قيم مختلفة لـ x مع حساب القيم المناظرة لـ y . وكل زوج يتحدد بنقطة وحيدة على الرسم البياني للدالة . وبتوصيل النقاط بمنحنى يكتمل الرسم البياني للدالة . والرسم البياني للدالة من الدرجة الثانية موضحًا في المثال 3 والرسم البياني للدالة النسبية في المثال 4 .

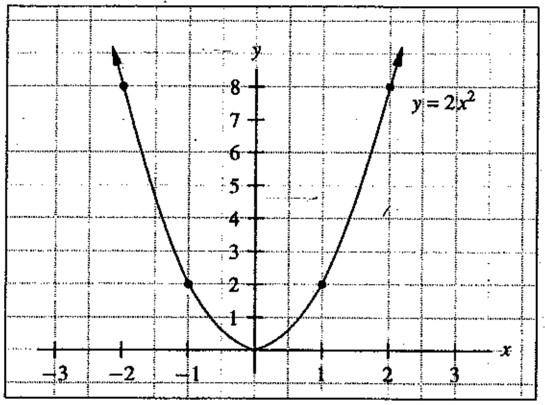
مثال 3 : لرسم الدالة غير الخطية ، نختار قيم ممثلة لـ x ونوجد قيم y المناظرة ثم نمثل بيانيًا النقاط الناتجة المتسقة (x, y) ونوصلها ببعض بخط سلس . والأسلوب موضح في الشكل (3–1) للدالة من الدرجة الثانية : $y = 2x^2$.

EXAMPLE 3. To graph a nonlinear function, pick some representative values of x; solve for y; plot the resulting ordered pairs (x, y); and connect them with a smooth line. The procedure is illustrated in Fig. 3-1 for the quadratic function $y = 2x^2$.

x	$f(x) \;=\; 2x^2 \;=\; y$	النقط
-2	$f(-2) = 2(-2)^2 = 8$	$(-2, 8)$
-1	$f(-1) = 2(-1)^2 = 2$	$(-1, 2)$
0	$f(0) = 2(0)^2 = 0$	$(0, 0)$
1	$f(1) = 2(1)^2 = 2$	$(1, 2)$
2	$f(2) = 2(2)^2 = 8$	$(2, 8)$

والرسم البياني للدالة من الدرجة الثانية يمثل قطع مكافئ . والرسم البياني للقطع المكافئ متماثل حول خط يسمى محور التماثل . وتسمى نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محوره قمة الرأس (vertex) . وفي الشكل (3–1) فإن محور التماثل يتطابق مع المحور y وقمة الرأس $(0, 0)$.

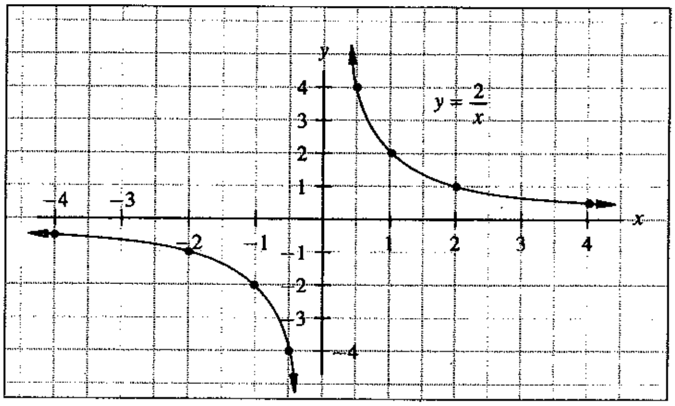
انظر المسائل 3.18 . 3.22 .



شكل (3–1)

مثال 4 : يتكرر أسلوب الرسم البيانى فى المثال 3 فى الشكل (3–2) للدالة النسبية $y=\frac{2}{x}$ حيث $(x \neq 0)$.

EXAMPLE 4. The procedure for graphing in Example 3 is repeated in Fig. 3-2 for the rational function $y = 2/x$ $(x \neq 0)$.



x	$f(x) \;= 2/x \;= y$	النقط
-4	$f(-4) = 2/-4 = -\frac{1}{2}$	$(-4, -\frac{1}{2})$
-2	$f(-2) = 2/-2 = -1$	$(-2, -1)$
-1	$f(-1) = 2/-1 = -2$	$(-1, -2)$
$-\frac{1}{2}$	$f(-\frac{1}{2}) = 2/-\frac{1}{2} = -4$	$(-\frac{1}{2}, -4)$
$\frac{1}{2}$	$f(\frac{1}{2}) = 2/\frac{1}{2} = 4$	$(\frac{1}{2}, 4)$
1	$f(1) = 2/1 = 2$	$(1, 2)$
2	$f(2) = 2/2 = 1$	$(2, 1)$
4	$f(4) = 2/4 = \frac{1}{2}$	$(4, \frac{1}{2})$

شكل (3–2)

الرسم البيانى للدالة النسبية $y=\frac{2}{x}$ تحدد فى ربعين متعامدين بصورة عكسية. وعندما لا تؤول x إلى الصفر $(x \to 0)$ فإن الرسم البيانى يقترب من المحور y .

والمحور y فى هذا المثال يسمى الخط المقارب العمودى Vertical asymptote وعندما x تؤول إلى ∞ $(x \to \infty)$ فإن الرسم البيانى يقترب من المحور x . ويسمى المحور x فى هذه الحالة الخط المقارب الأفقى Vertical asymptote . انظر المسائل 3.19 و 3.23 .

3.3 جبر الدوال The Algebra of Function

يمكن ضم دالتين أو أكثر بعمليات الجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمة إلى الدوال الأصلية . فإذا أعطيت الدالتين f ، g مع x فى نطاق الدالتين f ، g .

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$(f \div g)(x) = f(x) \div g(x) \qquad [g(x) \neq 0]$$

ونستطيع أيضًا ضم الدوال عن طريق إحلال دالة واحدة $y=f(x)$ لكل وجود من y فى الدالة الأخرى $z=g(x)$. ونكتب $z=g[f(x)]$ وتسمى تركيب الدوال Compositions of function . انظر المسائل 5 و 6 والمسائل 3.5 إلى 3.17 .

مثال 5 : إذا كانت $f(x)=3x+8$ و $g(x)=5x-4$ إذًا من خصائص جبر الدوال المبين أعلاه .

EXAMPLE 5. If $f(x) = 3x + 8$ and $g(x) = 5x - 4$, then from the properties of the algebra of functions given above,

$$(f+g)(x) = (3x+8) + (5x-4) = 8x+4$$

$$(f-g)(x) = (3x+8) - (5x-4) = -2x+12$$

$$(f \cdot g)(x) = (3x+8)(5x-4) = 15x^2 + 28x - 32$$

$$(f \div g)(x) = \frac{3x+8}{5x-4} \qquad (x \neq 0.8)$$

مثال 6 : إذا أعطيت $z=g(y)=y^2+3y-8$ و $y=f(x)=x+2$ فالدالة المركبة $g[f(x)]$ توجد عند إحلال $f(x)$ لكل وجود من y فى $g(y)$.

EXAMPLE 6. Given $z = g(y) = y^2 + 3y - 8$ and $y = f(x) = x + 2$, the composite function $g[f(x)]$ is found by substituting $f(x)$ for each occurrence of y in $g(y)$.

$$\begin{array}{rlll} g(y) = & y^2 & +3y & -8 \\ g[f(x)] = & [f(x)]^2 & +3[f(x)] & -8 \\ = & (x+2)^2 & +3(x+2) & -8 \\ = & (x^2+4x+4) + (3x+6) - 8 & & \\ = & x^2+7x+2 & & \end{array}$$

انظر المسائل 3.7 و 3.30 إلى 3.32 .

3.4 تطبيقات الدوال الخطية فى الإدارة والاقتصاد

Applications of Linear Functions for Business and Economics

تستخدم غالبًا الدوال الخطية فى الإدارة والاقتصاد . وعادة ما توجد لتكون معًا دوال جديدة . وبدلاً من الرموز $f(x)$ ، $g(x)$ ، $h(x)$ مثلاً ، تستخدم الرموز الدالية $C(x)$ لدالة التكاليف و $R(x)$ لدالة الإيراد و $\pi(x)$ لدالة الربح . افترض منشأة ما تعمل فى سوق المنافسة الكاملة ولديها إيراد حدى ثابت أو سعر البيع \$60 والتكلفة الثابتة \$450 والتكلفة المتغيرة للوحدة \$35 . وحيث ترمز x إلى عدد الوحدات المنتجة والمباعة و R إلى الإيراد الكلى و C للتكلفة الكلية . وهذه يمكن التعبير عنها بالدوال التالية :

$$R(x) = 60x$$

$$C(x) = 35(x) + 450$$

توجد الدوال أيضًا لأهداف إدارية واقتصادية باستخدام جبر الدوال . فمثلاً دالة الربح للمنشأة المذكورة أعلاه نحصل عليها بسهولة من خلال طرح دالة التكلفة الكلية من دالة الإيراد الكلى .

$$\pi(x) = R(x) - C(x)$$

$$\pi(x) = 60x - [35(x) + 450]$$

$$\pi(x) = 25x - 450$$

مثال 7 : الإيراد الكلى R ، التكلفة الكلية C ومستوى الربح π للمنشأة المذكورة فى القسم 3.4 عند مستويات الناتج (x) 70 و 90 وهذه على التوالى وبافتراض $R = 60x$ ، $C = 35x + 450$ و $\pi = 25x - 450$ وجد كما يلى :

EXAMPLE 7. The total revenue R, total cost C, and profit level π for the firm mentioned in Section 3.4 at output levels (x) of 70 and 90 units, respectively, assuming $R = 60x$, $C = 35x + 450$, and $\pi = 25x - 450$, are found as follows:

عند $x = 70$

$$R(70) = 60(70) = 4200$$

$$C(70) = 35(70) + 450 = 2900$$

$$\pi(70) = 25(70) - 450 = 1300$$

عند $x = 90$

$$R(90) = 60(90) = 5400$$

$$C(90) = 35(90) + 450 = 3600$$

$$\pi(90) = 25(90) - 450 = 1800$$

انظر أيضًا المسائل 3.8 إلى 3.17 .

3.5 حل المعادلات من الدرجة الثانية Solving Quadratic Equations

بوضع $y = 0$ فإن الدالة من الدرجة الثانية $y = ax^2 + bx + c$ يعبر عنها بالمعادلة من الدرجة الثانية $ax^2 + bx + c = 0$ حيث a ، b ، c ثوابت و $a \neq 0$. المعادلات من الدرجة الثانية بهذه الصيغة تحل بالتحليل إلى العوامل العددية أو استخدام الصيغة من الدرجة الثانية .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3.1}$$

والمبينة بالمثال 8 .

مثال 8 : المعادلة من الدرجة الثانية :

EXAMPLE 8. The quadratic equation

$$5x^2 + 47x + 18 = 0$$

تحل هذه المعادلة (a) بالتحليل ، (b) بالصيغة من الدرجة الثانية .

(a) حلل المعادلة كما فى المسألة $1.11(a)$.

$$5x^2 + 47x + 18 = (5x + 2)(x + 9) = 0$$

ويعنى $(5x + 2)(x + 9) = 0$ أن $5x + 2 = 0$ أو $x + 9 = 0$ وبوضع كل منها بالتعاقب مساويًا للصفر وإيجاد قيمة x نحصل على :

$$5x + 2 = 0 \qquad x + 9 = 0$$

$$x = -0.4 \qquad x = -9$$

(*b*) استخدم الصيغة التربيعية حيث الحدود فى المعادلة الحالية هى $a = 5$ ، $b = 47$ ، $c = 18$.

$$x = \frac{-47 \pm \sqrt{(47)^2 - 4(5)(18)}}{2(5)}$$

$$x = \frac{-47 \pm \sqrt{2209 - 360}}{10} = \frac{-47 \pm \sqrt{1849}}{10}$$

استخدم الآلة الحاسبة كما شرح فى القسم 1.7.7

$$x = \frac{-47 \pm 43}{10}$$

ومن ثم اجمع واطرح بالتعاقب البسط

$$x = \frac{-47 - 43}{10} \qquad x = \frac{-47 + 43}{10}$$

$$x = -\frac{90}{10} = -9 \qquad x = -\frac{4}{10} = -0.4$$

انظر أيضًا المسائل 3.20 و 3.21 .

وهناك كطريقة ثالثة لحل المعادلات من الدرجة الثانية تسمى تكميل المربع ولكن لن تناقش فى هذا الكتاب .

3.6 تيسير التمثيل البيانى غير الخطى Facilitating Nonlinear Graphing

التمثيل البيانى للدالة من الدرجة الثانية $y = ax^2 + bx + c$ يبسط فى ثلاث خطوات :

1. إذا كانت $a < 0$ فإن القطع المكافئ يفتح إلى أسفل وإذا كانت $a > 0$ يفتح القطع إلى أعلى .
2. كما أثبت فى المسألة 10.27 فإن إحداثيات قمة الرأس هى الزوج (x, y) حيث $x = -b/2a$ ، $y = (4ac - b^2)/4a$.
3. الحدود القاطعة x توجد من خلال وضع الدالة مساوية للصفر واستخدام الصيغة التربيعية أو التحليل لإيجاد x كما وضح فى المثال 9 والمسألة 3.22 .

والتمثيل البيانى للدالة النسبية يُنشأ بصورة سهلة وذلك عن طريق إيجاد الخطوط المقاربة ـ فالخط المقارب العمودى يتمثل فى الخط $x = k$ حيث توجد k بعد اكتمال كل الإلغاءات وذلك بإيجاد x المقام عندما تساوى المجموعة صفر . أما الخط المقارب الرأسى يتمثل فى الخط $y = m$ حيث توجد m أولاً بحل المعادلة الأصلية لـ x ومن ثم نحل المقام لتلك المعادلة لـ y عندما تساوى المجموعة صفراً . انظر المثال 11 والمسألة 2.23 .

مثال 9 : بتطبيق الخطوات المعطاة فى القسم 3.6 للتمثيل البيانى للدالة من الدرجة الثانية :

EXAMPLE 9. Applying the hints given in Section 3.6 to graph the quadratic function,

$$y = -x^2 + 6x + 7$$

لاحظ $a = -1$ ، $b = 6$ ، $c = 7$. إذًا

1. ومع $a = -1 < 0$ إذًا القطع المكافئ يفتح إلى أسفل .
2. $y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)(7) - 6^2}{4(-1)}$ $\qquad$ $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(-1)}$

$$y = \frac{-28 - 36}{-4} = 16 \qquad\qquad x = 3$$

إذًا إحداثيات قمة الرأس هى $(3, 16)$.

3. بوضع $y = 0$ وبتحليل العوامل

$$-x^2 + 6x + 7 = 0$$

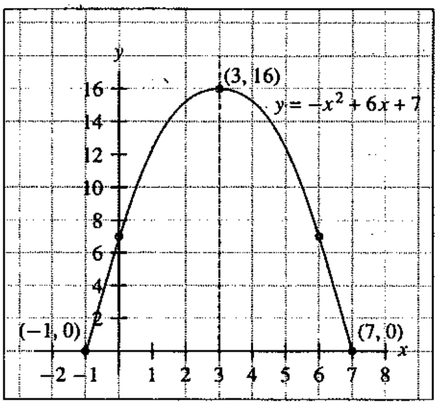
$$(-x - 1)(x - 7) = 0$$

$$x - 7 = 0 \qquad -x - 1 = 0$$

$$x = 7 \qquad x = -1$$

∴ الحدود القاطعة x هى $(-1, 0)$ و $(7, 0)$.

انظر المسائل 3-3 والمسألة 3.22 .



شكل (3-3)

3.7 تطبيقات الدوال غير الخطية فى الإدارة والاقتصاد

Applications of Nonlinear Functions in Business and Economics

أغلب المسائل فى الاقتصاد والإدارة غير ملائمة للتحليل بدلالة الدوال الخطية البسيطة . وهذه المسائل تتطلب أنواعًا مختلفة من الدوال . فدوال الإيراد والربح فى المنافسة الاحتكارية ـ مثلاً ـ يعبر عنها عادة بدلالة الدوال من الدرجة الثانية وتحليل التكلفة والعائد يعالج دائمًا بالدوال النسبية . انظر الأمثلة 10 و 11 والمسائل 3.24 إلى 3.29 .

مثال 10 : قدرت أرباح شركة الأحذية لكل وحدة مباعة x بالمعادلة الآتية :

EXAMPLE 10. A sneaker company's profits π for each unit x sold has been estimated as

$$\pi(x) = -x^2 + 300x - 9000$$

وحيث إن معامل الحد x^2 سالب فإن القطع المكافئ يفتح لأسفل وإحداثيات قمة الرأس هى

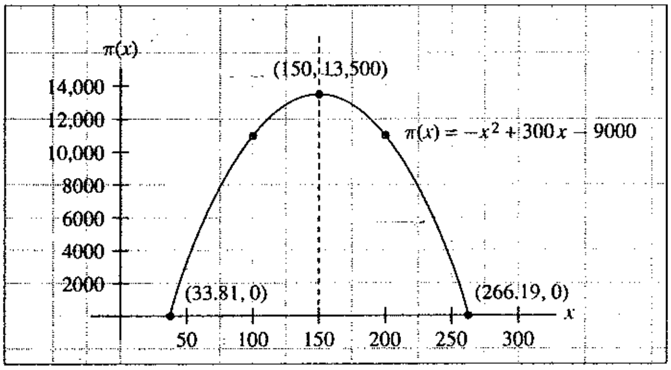
$$[-b/2a, (4ac - b^2)/4a]$$

حيث $a = -1$ ، $b = 300$ ، $c = -9000$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(300)}{2(-1)} \qquad \pi = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)(-9000) - (300)^2}{4(-1)}$$

$$x = 150 \qquad \pi = \frac{36,000 - 90,000}{-4} = \frac{-54,000}{-4} = 13,500$$

إذًا قمة الرأس $(150, 13500)$ وبدلالة الشكل (3-4) فهذا يعنى أن الربح يعظم عند 13500 عندما تكون الوحدات المباعة 150 . ولإيجاد الحدود القاطعة x وتهذيب الرسم البيانى نضع $\pi = 0$ ونحلل أو نستخدم الصيغة من الدرجة الثانية لنجد أنه عند $\pi = 0$ $x = 33.81$ ، $x = 266.19$ ، ومن ثم تكون الحدود القاطعة x هى $(33.81, 0)$ و $(266.19, 0)$. انظر الشكل (3-4) والمسائل 3.25 و 3.26 .



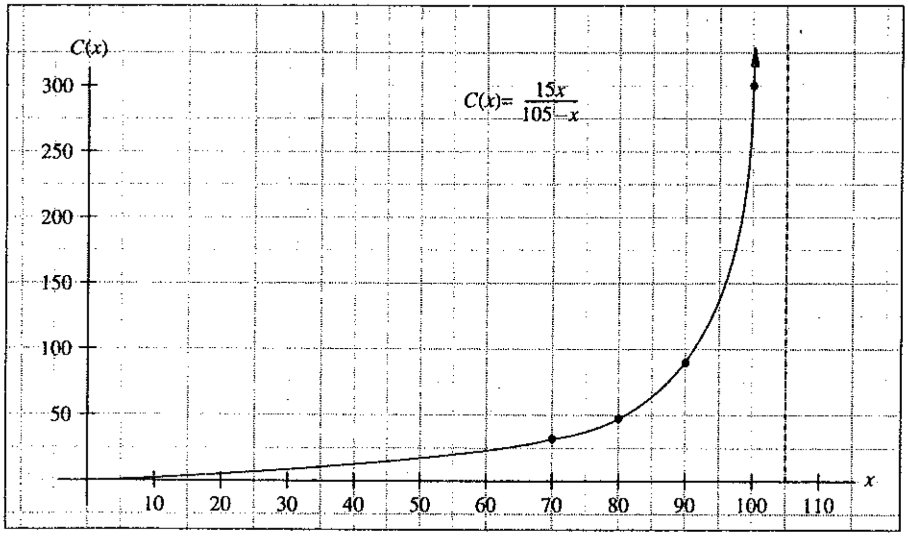
شكل (3–4)

مثال 11 : افترض أن التكلفة C بآلاف الدولارات لإزالة نسبة مئوية x من ثاني أكسيد الكبريت المنطلق من مصنع صهر النحاس معطاة بالدالة المنطقية التالية :

EXAMPLE 11. Assume that the cost C in thousands of dollars of removing x percent of the sulfur dioxide from the exhaust of a copper smelting plant is given by the rational function

$$C(x) = \frac{15x}{105 - x} \qquad (0 \le x \le 100)$$

وعن طريق إيجاد عدد مختار من الأزواج المتسقة التى تفى بالدالة وتمثلها بيانيًا فإننا نستطيع أن نرى التكاليف المتذبذبة لتحقيق النقاط الأخيرة للنسبة المئوية من التلوث . ويمكن إيجاد الخط المقارب الرأسى بعد اكتمال كل الإلغاءات وذلك بإيجاد قيمة x المقام عند وضع المجموعة مساوية بالصفر . وعند $105 - x = 0$ ، $x = 105$. إذًا الخط المقارب الرأسى يظهر عند $x = 105$. انظر الشكل (3–5) والمسألة 3.27 .



x	C
70	30
80	48
90	90
100	300

شكل (3–5)

مسائل محلولة

Functions الدوال

3.1. قدر الدوال التالية عند القيم المعطاة لـ x :

3.1. Evaluate the following functions at the given values of x.

(*a*) $f(x) = x^2 - 4x + 7$ عند $x = 5$ (1) ، $x = -4$ (2)

(1) بالتعويض بـ 5 لكل وجود من x فى المعادلة :

$$f(5) = (5)^2 - 4(5) + 7 = 12$$

(2) بالتعويض عن قيمة $x = -4$

$$f(-4) = (-4)^2 - 4(-4) + 7 = 39$$

(*b*) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 8x - 11$ عند (1) $x = 3$, (2) $x = -2$

(1) $f(3) = 2(3)^3 - 5(3)^2 + 8(3) - 11 = 22$

(2) $f(-2) = 2(-2)^3 - 5(-2)^2 + 8(-2) - 11 = -63$

(*c*) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 8x + 18}{x - 4}$ عند (1) $x = 6$, (2) $x = -2$

(1) $f(6) = \dfrac{3(6)^2 - 8(6) + 18}{(6) - 4} = \dfrac{78}{2} = 39$

(2) $f(-2) = \dfrac{3(-2)^2 - 8(-2) + 18}{(-2) - 4} = \dfrac{46}{-6} = -7\dfrac{2}{3}$

3.2. المعاملات والمقادير الأخرى نستطيع أيضًا أن نعوض بها فى الدوال كمتغير مستقل . قدر الدوال التاليــة عند القيم المعطاة لـ x بالتعويض بالمعاملات المختلفة لـ x ثم بسط الدوال .

3.2. Parameters and other expressions can also be substituted into functions as the independent variable. Evaluate the following functions at the given values of x by substituting the various parameters for x and simplifying.

(*a*) $f(x) = 2x^2 + 5x + 9$ عند (1) $x = a$, (2) $x = a - 3$

(1) $f(a) = 2(a)^2 + 5(a) + 9$
$= 2a^2 + 5a + 9$

(2) $f(a - 3) = 2(a - 3)^2 + 5(a - 3) + 9$
$= 2(a - 3)(a - 3) + 5(a - 3) + 9$
$= 2a^2 - 7a + 12$

(*b*) $f(x) = x^2 + 7x + 4$ عند (1) $x = 3a$, (2) $x = a + 5$

(1) $f(3a) = (3a)^2 + 7(3a) + 4$
$= 9a^2 + 21a + 4$

(2) $f(a + 5) = (a + 5)^2 + 7(a + 5) + 4$
$= (a + 5)(a + 5) + 7(a + 5) + 4$
$= a^2 + 17a + 64$

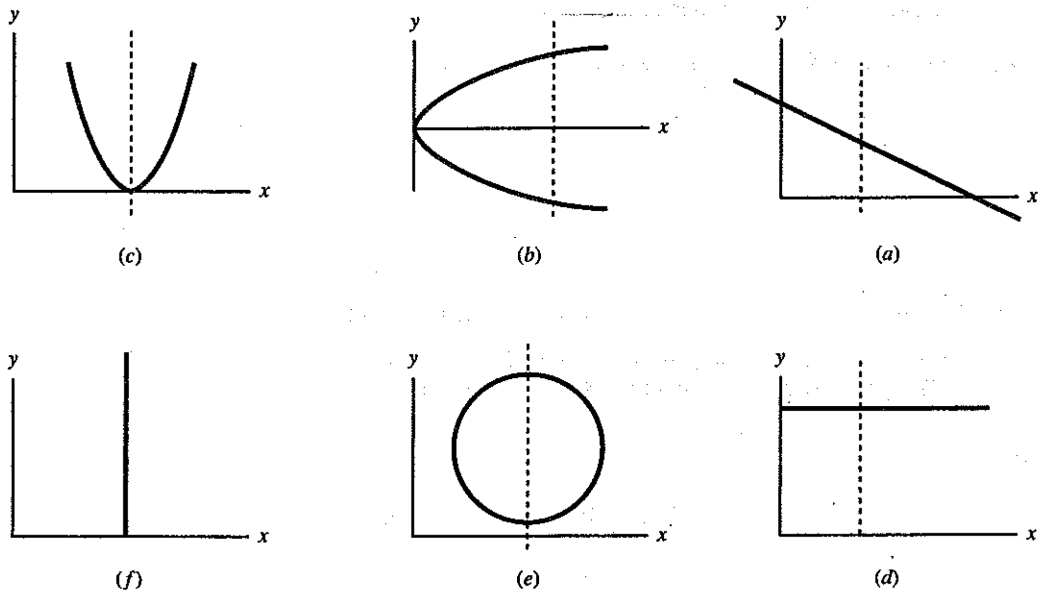
(*c*) $f(x) = \dfrac{x^2 - 13}{x + 4}$ عند (1) $x = a$, (2) $x = a - 2$

(1) $f(a) = \dfrac{a^2 - 13}{a + 4}$

(2) $f(a - 2) = \dfrac{(a - 2)^2 - 13}{(a - 2) + 4} = \dfrac{a^2 - 4a - 9}{a + 2}$

3.3. فى التمثيل البيانى بالشكل (3–6) استبدلت $f(x)$ بـ y كمتغير تابع فى الدوال . حدد الأشكال البيانية للدوال من هذه الأشكال المختلفة .

3.3. In the graphs in Fig. 3-6, where y replaces $f(x)$ as the dependent variable in functions, as is common in graphing, indicate which graphs are graphs of functions and which are not.



شكل (3–6)

نعلم من تعريف الدالة أن لكل قيمة من x توجد فقط قيمة واحدة لـ y . وإذا كان ـ لأى قيمة من x فى نطاق ـ الخط الرأسى يقطع الشكل البيانى عند أكثر من نقطة فإن الشكل البيانى ليس شكلاً للدالة . وبتطبيق هذا المعيار الذى يعرف باختبار الخط الرأسى ، نرى أن (a) ، (c) ، (d) دوال وأن (b) ، (e) ، (f) غير دوال .

3.4. أى من المعادلات التالية دوال ؟ ولماذا ؟

3.4. Which of the following equations are functions and why?

(a) $y = -3x + 8$

المعادلة $y = -3x + 8$ هى دالة لأن لكل قيمة للمتغير المستقل x توجد فقط قيمة واحدة للمتغير التابع y . فمثلاً إذا كان $x = 1$ فإن $y = -3(1) + 8 = 5$ والشكل البيانى يشابه (a) فى الشكل (3–6) .

(b) $y^2 = x$

المعادلة $y^2 = x$ التى تكافئ $y = \pm\sqrt{x}$ ليست دالة لأن لكل قيمة موجبة من x توجد قيمتان لـ y . فمثلاً إذا كانت $y^2 = 4$ فإن $y = \pm 2$. والشكل البيانى يشابه (b) فى الشكل (3–6) وموضحاً أن القطع المكافئ الذى محوره موازيًا للمحور x لا يمكن أن يكون دالة .

(c) $y = x^2$

المعادلة $y = x^2$ هى دالة لأن لكل قيمة من x توجد قيمة واحدة لـ y فمثلاً إذا كانت $x = -6$ فإن $y = 36$. وتعريف الدالة ببساطة يتطلب أن توجد لكل قيمة من x قيمة واحدة فقط لـ y وليس لكل قيمة من y توجد

قيمة واحد لـ x . والرسم يشابه (c) فى الشكل (6–3) وموضحًا أن القطع المكافئ محور موازٍ للمحور y يعد دالة بغض النظر ما إذا كان يفتح لأسفل أو لأعلى .

(d) $y = 6$

المعادلة $y = 6$ دالة لأن لكل قيمة من x توجد فقط قيمة واحدة لـ y والرسم يشابه (d) فى الشكل (6–3) .

(e) $x^2 + y^2 = 81$

المعادلة $x^2 + y^2 = 1$ ليست دالة لأنه إذا كانت $x = 0$ فإن $y^2 = 81$ و $y = \pm 9$ والرسم البيانى سوف يكون دائرة ويشابه (e) فى الشكل (6–3) والدائرة تفشل فى اختبار الخط الرأسى .

(f) $x = 8$

المعادلة $x = 8$ ليست دالة . فالشكل البيانى لـ $x = 8$ هو عبارة عن خط عمودى . وهذا يعنى أنه عند $x = 8$ فإن y لها عدد لانهائى من القيم . والرسم البيانى يشابه (f) فى الشكل (6–3) .

The Algebra of Function جبر المعادلات

.3.5 استخدم جبر الدوال لتوحيد الدوال التالية بإيجاد (1) $(f+g)(x)$، (2) $(f-g)(x)$، (3) $(f.g)(x)$، (4) $(f\div g)(x)$.

3.5. Use the rules of the algebra of functions to combine the following functions by finding (1) $(f+g)(x)$, (2) $(f-g)(x)$, (3) $(f\cdot g)(x)$, and (4) $(f \div g)(x)$.

(a) $f(x) = 4x - 5,\ g(x) = 7x - 3$

(1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (4x-5) + (7x-3) = 11x - 8$

(2) $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (4x-5) - (7x-3) = -3x - 2$

(3) $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$
$= (4x-5)\cdot(7x-3) = 28x^2 - 47x + 15$

(4) $(f\div g)(x) = f(x) \div g(x) = \dfrac{4x-5}{7x-3} \qquad \left(x \neq \dfrac{3}{7}\right)$

(b) $f(x) = x^2 + 3,\ g(x) = 4x - 7$

(1) $(f+g)(x) = (x^2+3) + (4x-7) = x^2 + 4x - 4$

(2) $(f-g)(x) = (x^2+3) - (4x-7) = x^2 - 4x + 10$

(3) $(f\cdot g)(x) = (x^2+3)\cdot(4x-7) = 4x^3 - 7x^2 + 12x - 21$

(4) $(f\div g)(x) = \dfrac{x^2+3}{4x-7} \qquad \left(x \neq \dfrac{7}{4}\right)$

(c) $f(x) = \dfrac{3}{x},\ g(x) = \dfrac{4}{x+5} \qquad (x \neq 0, -5)$

(1) $(f+g)(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x+5} = \dfrac{3(x+5)+4x}{x(x+5)} = \dfrac{7x+15}{x^2+5x}$

(2) $(f-g)(x) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{x+5} = \dfrac{3(x+5)-4x}{x(x+5)} = \dfrac{15-x}{x^2+5x}$

(3) $(f\cdot g)(x) = \dfrac{3}{x}\cdot\dfrac{4}{x+5} = \dfrac{12}{x(x+5)} = \dfrac{12}{x^2+5x}$

(4) $(f\div g)(x) = \dfrac{3}{x} \div \dfrac{4}{x+5} = \dfrac{3}{x}\cdot\dfrac{x+5}{4} = \dfrac{3x+15}{4x}$

.3.6 إذا علمت أن :

3.6. Given:

$$f(x)=\frac{3x}{x+5} \qquad g(x)=\frac{x-4}{x+1} \qquad h(x)=\frac{x+6}{x-2} \qquad (x \neq -5, -1, 2)$$

استخدم جبر الدوال لإيجاد ما يلى :

(*a*) $(f+h)(a)$

$$(f+h)(a)=f(a)+h(a)$$

بالتعويض بـ a عن كل وجود من x .

$$(f+h)(a)=\frac{3a}{a+5}+\frac{a+6}{a-2}=\frac{3a(a-2)+(a+6)(a+5)}{(a+5)(a-2)}$$
$$=\frac{(3a^2-6a)+(a^2+11a+30)}{a^2+3a-10}=\frac{4a^2+5a+30}{a^2+3a-10}$$

(*b*) $(g \cdot h)(t)$

$$(g \cdot h)(t)=g(t)\cdot h(t)=\frac{(t-4)}{(t+1)}\cdot\frac{(t+6)}{(t-2)}=\frac{t^2+2t-24}{t^2-t-2}$$

(*c*) $(h-f)(x+1)$

$$(h-f)(x+1)=h(x+1)-f(x+1)$$

بالتعويض بـ $x+1$ عن كل وجود لـ x .

$$(h-f)(x+1)=\frac{(x+1)+6}{(x+1)-2}-\frac{3(x+1)}{(x+1)+5} \qquad (x \neq 1, -6)$$
$$=\frac{x+7}{x-1}-\frac{3x+3}{x+6}=\frac{(x+7)(x+6)-(3x+3)(x-1)}{(x-1)(x+6)}$$
$$=\frac{(x^2+13x+42)-(3x^2-3)}{x^2+5x-6}=\frac{-2x^2+13x+45}{x^2+5x-6}$$

(*d*) $(g \div h)(t-3)$

$$(g \div h)(t-3)=g(t-3)\div h(t-3)$$

بالتعويض بـ $t-3$ عن كل وجود لـ x

$$(g \div h)(t-3)=\frac{(t-3)-4}{(t-3)+1}\cdot\frac{(t-3)-2}{(t-3)+6} \qquad (t \neq 2, -3, 5)$$
$$=\frac{t-7}{t-2}\cdot\frac{t-5}{t+3}=\frac{t^2-12t+35}{t^2+t-6}$$

3.7. Given $f(x)=x^4$, $g(x)=x^2-3x+4$, and

3.7. إذا علمت أن $f(x)=x^4$ ، $g(x)=x^2-3x+4$ و :

$$h(x)=\frac{x}{x-5} \qquad (x \neq 5)$$

أوجد الدوال المركبة التالية كما فى المثال 6 .

find the following composite functions, as in Example 6

(*a*) $g[f(x)]$

بالتعويض بـ $f(x)$ لكل وجود من x فى $g(x)$.

$$g[f(x)]=(x^4)^2-3(x^4)+4=x^8-3x^4+4$$

(*b*) $f[h(x)]$

بالتعويض بـ $f(x)$ لكل وجود من x فى $f(x)$.

$$f[h(x)] = \left(\frac{x}{x-5}\right)^4$$

(*c*) $h[f(x)]$

$$h[f(x)] = \frac{x^4}{x^4-5} \qquad (x \neq \pm\sqrt[4]{5})$$

(*d*) $h[g(x)]$

$$h[g(x)] = \frac{(x^2-3x+4)}{(x^2-3x+4)-5} = \frac{x^2-3x+4}{x^2-3x-1} \qquad (x^2-3x-1 \neq 0)$$

Linear Functions in Business and Economics الدوال الخطية فى الإدارة والاقتصاد

3.8. يتقاضى سباك $50 لفحص أى منزل بالإضافة إلى $35 عن كل ساعة عمل إضافية . عبر عن تكلفة السباك (C) كدالة لعدد ساعات العمل (x) المطلوبة .

3.8. A plumber charges $50 for a house visit plus $35 an hour for each extra hour of work. Express the cost C of a plumber as a function of the number of hours x the job involves.

$$C(x) = 35x + 50$$

3.9. يتقاضى فنان ما من شركة أسطوانات $9000 كرسوم بالإضافة إلى $2.75 عن كل أسطوانة مباعة . عبر عن إيراداته R كدالة فى عدد الأسطوانات (x) .

3.9. A recording artist receives a fee of $9000 plus $2.75 for every album sold. Express her revenue R as a function of the number of albums x sold.

$$R(x) = 2.75x + 9000$$

3.10. يتقاضى بستانى تفاح $3.25 للدخول و 60 سنتًا لكل رطل يتم اختياره . عبر عن التكلفة (C) كدالة فى عدد الأرطال (x) للتفاح المختار .

3.10. An apple orchard charges $3.25 to enter and 60 cents a pound for whatever is picked. Express the cost C as a function of the number of pounds x of apples picked.

$$C(x) = 0.60x + 3.25$$

3.11. يحصل خزاف عارض فى سوق خيرية على $24 عن كل إناء خزفى مباع ناقصًا $85 كرسوم للمعرض . عبر عن الإيراد (R) الذى يحصل عليه كدالة فى عدد الأوانى الفخارية المباعة .

3.11. A potter exhibiting at a fair receives $24 for each ceramic sold minus a flat exhibition fee of $85. Express the revenue R he receives as a function of the number x of ceramics sold.

$$R(x) = 24x - 85$$

3.12. آلة مكتبية قيمتها $12,000 تهلك سنويًا بقيمة $1500 باستخدام الإهلاك الخطى عبر عن قيمة الآلة (V) كدالة فى السنوات (t) .

3.12. An office machine worth $12,000 depreciates in value by $1500 a year. Using linear or straight-line depreciation, express the value V of the machine as a function of years t.

$$V(t) = 12{,}000 - 1500t$$

3.13. يعمل مزارع فى سوق المنافسة الكاملة ويحصل على $35 لكل كيلو جرام من القمح المباع . (a) عبر عن إيراده . (b) كدالة فى عدد الكيلو جرامات المباعة (x) وقدر الدالة عند (b) $x = 10{,}000$ و (c) $x = 25{,}000$.

3.13. A farmer in a purely competitive market receives $35 a bushel for each bushel of wheat sold. (*a*) Express his revenue R as a function of the number x of bushels sold and evaluate the function at (*b*) $x = 10{,}000$ and (*c*) $x = 25{,}000$.

(*a*) $$R(x) = 35x$$

(*b*) $$R(10{,}000) = 35(10{,}000) = 350{,}000$$

(*c*) $$R(25{,}000) = 35(25{,}000) = 875{,}000$$

3.14. يتحمل المزارع فى المسألة (3.13) تكلفة ثابتة قدرها $425,000 وتكلفة حدية قدرها $15 للكيلوجرام الواحد . (a) عبر عن تكلفته C كدالة فى عدد الكيلو جرامات المنتجة وقدر الدالة عند (b) $x = 5000$ و (c) $x = 20{,}000$.

3.14. The farmer in Problem 3.13 has a fixed cost of $425,000 and a marginal cost of $15 a bushel. (*a*) Express his cost C as a function of the number x of bushels produced and estimate the function at (*b*) $x = 5000$ and (*c*) $x = 20{,}000$.

(*a*) $$C(x) = 15x + 425{,}000$$

(*b*) $$C(5000) = 15(5000) + 425{,}000 = 500{,}000$$

(*c*) $$C(20{,}000) = 15(20{,}000) + 425{,}000 = 725{,}000$$

3.15. (a) استخدم جبر الدوال للتعبير عن أرباح المزارع السابق (π) كدالة فى عدد الكيلوجرامات المباعة (x) وقدر الدالة عند (b) $x = 20{,}000$ و (c) $x = 30{,}000$.

3.15. (*a*) Use the algebra of functions to express the same farmer's profit π as a function of the number x of bushels sold, and evaluate the function at (*b*) $x = 20{,}000$ and (*c*) $x = 30{,}000$.

(*a*) $$\pi(x) = R(x) - C(x)$$
$$\pi(x) = 35(x) - [15(x) + 425{,}000]$$
$$\pi(x) = 20x - 425{,}000$$

(*b*) $$\pi(20{,}000) = 20(20{,}000) - 425{,}000 = -25{,}000$$

(*c*) $$\pi(30{,}000) = 20(30{,}000) - 425{,}000 = 175{,}000$$

3.16. شركة ما تتحمل تكلفة ثابتة قدرها $8250 وتكلفة حدية قدرها $450 لكل وحدة منتجة . (a) عبر عن التكلفة C كدالة فى عدد الوحدات المنتجة (x) وقدر الدالة عند (b) $x = 20$ و (c) $x = 50$.

3.16. A company has a fixed cost of $8250 and a marginal cost of $450 for each item produced. (*a*) Express the cost C as a function of the number x of items produced and evaluate the function at (*b*) $x = 20$ and (*c*) $x = 50$.

(*a*) $$C(x) = 450x + 8250$$

(*b*) $$C(20) = 450(20) + 8250 = 17{,}250$$

(*c*) $$C(50) = 450(50) + 8250 = 30{,}750$$

3.17. افترض أن الشركة فى المسألة 3.16 تحصل على $800 عن كل وحدة مباعة (a) عبر عن أرباح الشركة (π) كدالة فى عدد الوحدات المباعة (x) وقدر الدالة عند (b) $x = 25$ و (c) $x = 40$.

3.17. Assume that the company in Problem 3.16 receives \$800 for each item sold. (*a*) Express the company's profit π as a function of the number x of items sold and evaluate the function at (*b*) $x = 25$ and (*c*) $x = 40$.

(*a*) الإيراد الكلى $R(x) = 800x$ ، دالة الربح :

$$\pi(x) = R(x) - C(x)$$

$$\pi(x) = 800x - [450x + 8250] = 350x - 8250$$

(*b*) $$\pi(25) = 350(25) - 8250 = 500$$

(*c*) $$\pi(40) = 350(40) - 8250 = 5750$$

لتطبيقات عملية مبتكرة للدوال انظر مسائل 2.21 إلى 2.34 .

Graphing Nonlinear Functions التمثيل البيانى للدوال غير الخطية

3.18. مثل بيانيًا الدوال من الدرجة الثانية التالية وعين قمة الرأس والمحور لكل منها :

3.18. Graph the following quadratic functions and identify the vertex and axis of each:

(*a*) $f(x) = x^2 - 2$

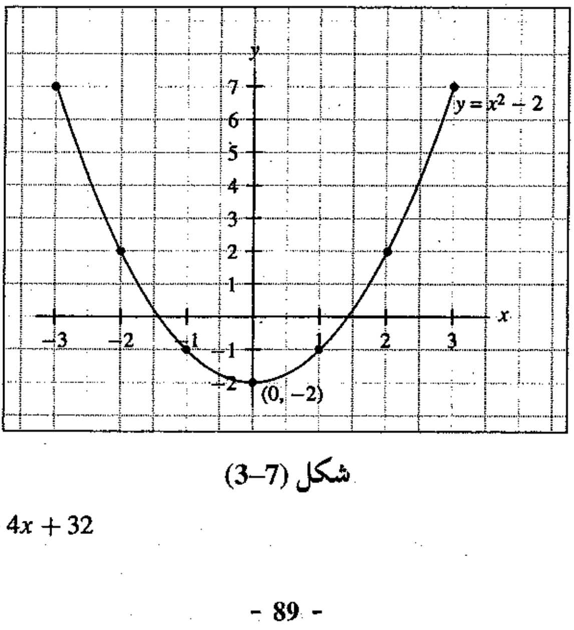
أولاً نختار بعض القيمة النموذجية لـــ x ونوجد $f(x)$ ولذلك استخدم y بدلاً من $f(x)$ وارسم الأزواج المتسقة ثم أوصلهم بخط سلس ، والنقاط القريبة أكثر دقة فى التمثيل البيانى . انظر الشكل 7–3 .

x	$f(x) = x^2 - 2$	$= y$
−3	$f(-3) = (-3)^2 - 2$	= 7
−2	$f(-2) = (-2)^2 - 2$	= 2
−1	$f(-1) = (-1)^2 - 2$	= −1
0	$f(0) = (0)^2 - 2$	= −2
1	$f(1) = (1)^2 - 2$	= −1
2	$f(2) = (2)^2 - 2$	= 2
3	$f(3) = (3)^2 - 2$	= 7

قمة الرأس $(0, -2)$

المحور $x = 0$ والذى

هو نفسه محور y .



شكل (7–3)

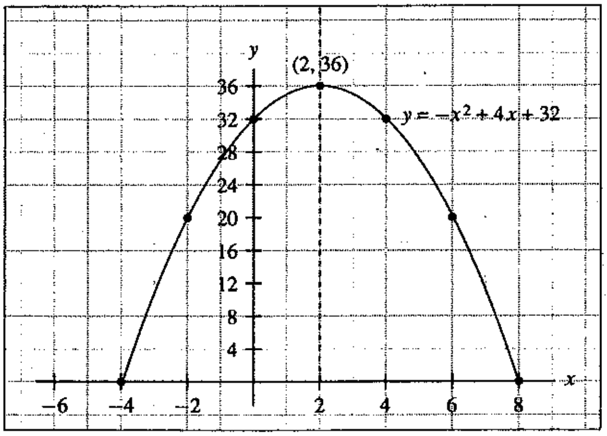
(*b*) $f(x) = -x^2 + 4x + 32$

x	$f(x) = -x^2 + 4x + 32$	$= y$
-4	$f(-4) = -(-4)^2 + 4(-4) + 32$	$= 0$
-2	$f(-2) = -(-2)^2 + 4(-2) + 32$	$= 20$
0	$f(0) = -(0)^2 + 4(0) + 32$	$= 32$
2	$f(2) = -(2)^2 + 4(2) + 32$	$= 36$
4	$f(4) = -(4)^2 + 4(4) + 32$	$= 32$
6	$f(6) = -(6)^2 + 4(6) + 32$	$= 20$
8	$f(8) = -(8)^2 + 4(8) + 32$	$= 0$

قمة الرأس $(2, 36)$

المحور $x = 2$

انظر الشكل (3-8)



شكل (3-8)

لاحظ التماثل حول المحور : $x = 2$ ، $y = 32$ ، $x = 2 \pm 2$ ، $y = 20$ ، $x = 2 \pm 4$ ، $y = 0$ ، $x = 2 \pm 6$.

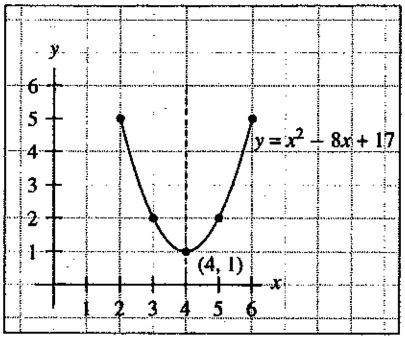
(c) $f(x) = x^2 - 8x + 17$

x	$f(x) = x^2 - 8x + 17$	$= y$
2	$f(2) = (2)^2 - 8(2) + 17$	$= 5$
3	$f(3) = (3)^2 - 8(3) + 17$	$= 2$
4	$f(4) = (4)^2 - 8(4) + 17$	$= 1$
5	$f(5) = (5)^2 - 8(5) + 17$	$= 2$
6	$f(6) = (6)^2 - 8(6) + 17$	$= 5$

قمة الرأس $(4, 1)$

المحور $x = 4$

انظر الشكل (3-9)



شكل (3-9)

لاحظ التماثل حول المحور : $x = 4$ ، $y = 2$ ، $x = 4 \pm 1$; $y = 5$ ، $x = 4 \pm 2$.

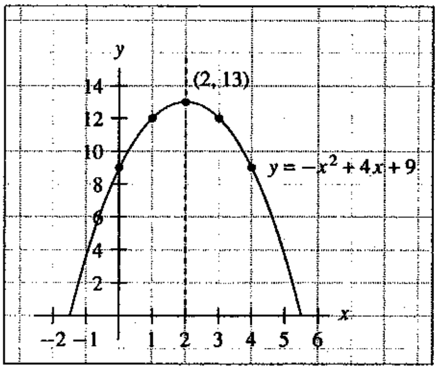
(*d*) $f(x) = -x^2 + 4x + 9$

x	$f(x) = -x^2 + 4x + 9$	$= y$
0	$f(0) = -(0)^2 + 4(0) + 9$	$= 9$
1	$f(1) = -(1)^2 + 4(1) + 9$	$= 12$
2	$f(2) = -(2)^2 + 4(2) + 9$	$= 13$
3	$f(3) = -(3)^2 + 4(3) + 9$	$= 12$
4	$f(4) = -(4)^2 + 4(4) + 9$	$= 9$

قمة الرأس (2, 13)

المحور $x = 2$

انظر الشكل (3-10)



شكل (3-10)

3.19. حدد عدد من النقاط النموذجية على الرسوم البيانية لدوال النسبية التالية وارسم مخطط للتمثيل البيانى :

3.19. Determine a number of representative points on the graphs of the following rational functions and draw a sketch of the graph.

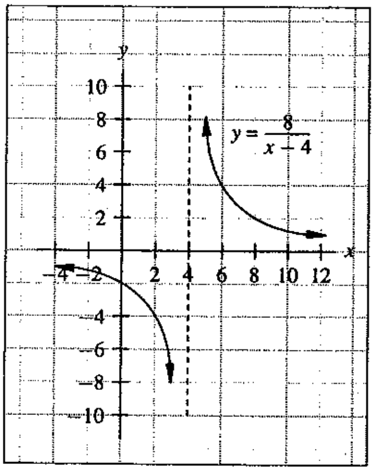
(*a*) $y = \dfrac{8}{x-4}$

x	y
−4	−1
0	−2
2	−4
3	−8
- - -	- - -
5	8
6	4
8	2
12	1

الخط المقارب الرأسى : $x = 4$

الخط المقارب الأفقى : $y = 0$

انظر الشكل (3-11)



شكل (3-11)

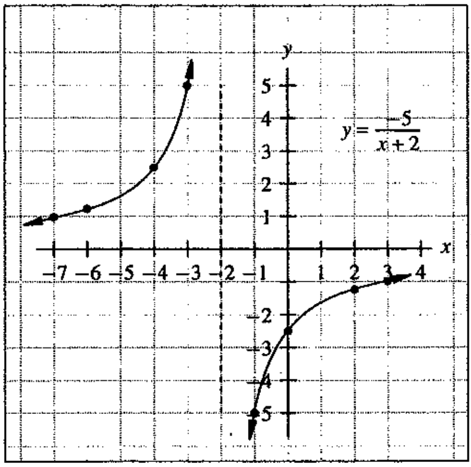
(*b*) $y = \dfrac{-5}{x+2}$

x	y
−7	1
−6	1.25
−4	2.5
−3	5
- - -	- - -
−1	−5
0	−2.5
2	−1.25
3	−1

الخط المقارب الرأسى : $x=-2$

الخط المقارب الأفقى : $y=0$

انظر الشكل (3-12)



شكل (3-12)

حل المعادلات من الدرجة الثانية Solving Quadratic Equations

3.20. حل المعادلات من الدرجة الثانية التالية بتحليل العوامل :

3.20. Solve the following quadratic equations by factoring.

(*a*) $x^2 + 10x + 21 = 0$

من المسألة 1.6 (*a*) .

$$x^2 + 10x + 21 = (x+3)(x+7) = 0$$

وحيث إن $(x+3)(x+7) = 0$ فإن $x+3=0$ أو $x+7=0$ وبوضع كل منهما مساويًا للصفر وإيجاد قيمة x نجد أن :

$$x+3=0 \qquad x+7=0$$

$$x=-3 \qquad x=-7$$

(*b*) $x^2 - 13x + 30 = 0$

من المسألة 1.7 (*a*)

$$x^2 - 13x + 30 = (x-3)(x-10) = 0$$

$$x-3=0 \qquad x-10=0$$

$$x=3 \qquad x=10$$

(*c*) $x^2 + 19x - 42 = 0$

من المسألة 1.8 (*a*)

$$x^2 + 19x - 42 = (x - 2)(x + 21) = 0$$

$$x - 2 = 0 \qquad x+21 = 0$$

$$x = 2 \qquad x = -21$$

(*d*) $x^2 - 8x - 48 = 0$

من المسألة 1.9 (*a*)

$$x^2 - 8x - 48 = (x + 4)(x - 12) = 0$$

$$x + 4 = 0 \qquad x-12 = 0$$

$$x = -4 \qquad x = 12$$

(*e*) $3x^2 + 22x + 24 = 0$

من المسألة 1.11 (*b*)

$$3x^2 + 22x + 24 = (3x + 4)(x + 6)$$

$$3x + 4 = 0 \qquad x+6 = 0$$

$$x = -\tfrac{4}{3} \qquad x = -6$$

3.21. حل المعادلات من الدرجة الثانية التالية باستخدام الصيغة التربيعية :

3.21. Solve the following quadratic equations using the quadratic formula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3.1}$$

(*a*) $3x^2 - 35x + 22 = 0$

بالتعويض عن $a = 3$ ، $b = -35$ ، $c = 22$ فى الصيغة :

$$x = \frac{-(-35) \pm \sqrt{(-35)^2 - 4(3)(22)}}{2(3)}$$

باستخدام الحاسبة كما شرح فى القسم 1.7.6 و 1.7.7

$$x = \frac{35 \pm \sqrt{1225 - 264}}{6} = \frac{35 \pm \sqrt{961}}{6} = \frac{35 \pm 31}{6}$$

اجمع ثم اطرح 31 من البسط .

$$x = \frac{35 + 31}{6} = 11 \qquad x = \frac{35 - 31}{6} = \frac{2}{3}$$

(*b*) $7x^2 - 32x + 16 = 0$

$$x = \frac{-(-32) \pm \sqrt{(-32)^2 - 4(7)(16)}}{2(7)}$$

$$x = \frac{32 \pm \sqrt{1024 - 448}}{14} = \frac{32 \pm \sqrt{576}}{14} = \frac{32 \pm 24}{14}$$

$$x = \frac{32+24}{14} = 4 \qquad x = \frac{32-24}{14} = \frac{4}{7}$$

(*c*) $5x^2 + 7x - 52 = 0$

$$x = \frac{-(7) \pm \sqrt{(7)^2 - 4(5)(-52)}}{2(5)}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49+1040}}{10} = \frac{-7 \pm \sqrt{1089}}{10} = \frac{-7 \pm 33}{10}$$

$$x = \frac{-7+33}{10} = 2.6 \qquad x = \frac{-7-33}{10} = -4$$

(*d*) $3x^2 - 13x - 56 = 0$

$$x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4(3)(-56)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169+672}}{6} = \frac{13 \pm \sqrt{841}}{6} = \frac{13 \pm 29}{6}$$

$$x = \frac{13+29}{6} = 7 \qquad x = \frac{13-29}{6} = -2\frac{2}{3}$$

لكى ترى نفس الحلول من (*a*) إلى (*d*) بطريقة تحليل العوامل انظر المسألة 1.11 (*c*) إلى (*f*) .

Facilitating Nonlinear Graphing تيسير التمثيل البيانى غير الخطى

3.22. استخدم الخطوات الثلاث المحددة فى القسم 3.6 للتمثيل البيانى $y = ax^2 + bx + c$ من أجل رسم الدوال من الدرجة الثانية التالية :

3.22. Use the three steps outlined in Section 3.6 for graphing $y = ax^2 + bx + c$, to sketch the following quadratic functions:

(*a*) $y = -x^2 + 10x - 16$

(1) حيث $a = -1$ ، $b = 10$ ، $c = -16$ ومع $a < 0$ فالقطع يفتح لأسفل .

(2)

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(10)}{2(-1)} \qquad y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)(-16) - (10)^2}{4(-1)}$$

$$x = 5 \qquad y = \frac{64 - 100}{-4} = \frac{-36}{-4} = 9$$

إحداثيات قمة الرأس $(5, 9)$.

(3) وبوضع المعادلة مساوية للصفر لإيجاد إحداثيات x للحد القاطع الأفقى .

$$-x^2 + 10x - 16 = 0$$

وبقسمة الطرفين على -1 قبل تحليل العوامل .

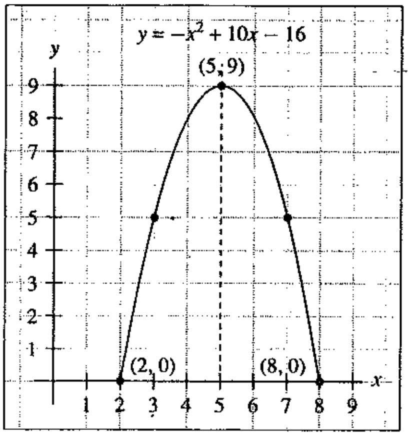
$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$(x-2)(x-8) = 0$$

$$x = 2 \qquad x = 8$$

الحدود القاطعة الأفقية (8, 0) ، (2, 0) .

انظر الشكل (3–13) .



شكل (3–13)

(*b*) $y = x^2 - 8x + 18$

(1) وحيث إن $a = 1 > 0$ فإن القطع المكافئ يفتح لأعلى :

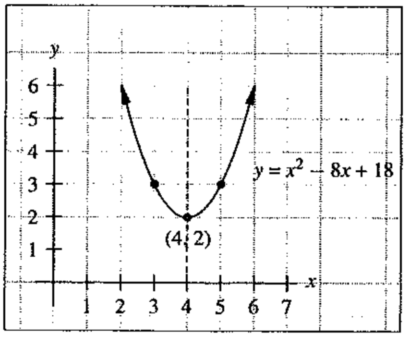
(2) $$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2(1)} \qquad y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(1)(18) - (-8)^2}{4(1)}$$

$$x = 4 \qquad y = \frac{72 - 64}{4} = 2$$

إحداثيات قمة الرأس (4, 2) .

(3) ومع قمة الرأس (4, 2) والقطع يفتح لأعلى . إذًا لا توجد الحدود القاطعة x .

انظر الشكل 3–14 .



شكل (3–14)

(*c*) $y = -2x^2 + 10x - 8$

(1) وحيث إن $a = -2 < 0$ فإن القطع المكافئ يفتح لأسفل .

(2) $$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(10)}{2(-2)} \qquad y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-2)(-8) - (10)^2}{4(-2)}$$

$$x = 2.5 \qquad y = \frac{64 - 100}{-8} = \frac{-36}{-8} = 4.5$$

إحداثيات قمة الرأس (2.5, 4.5) .

(3) $-2x^2 + 10x - 8 = 0$

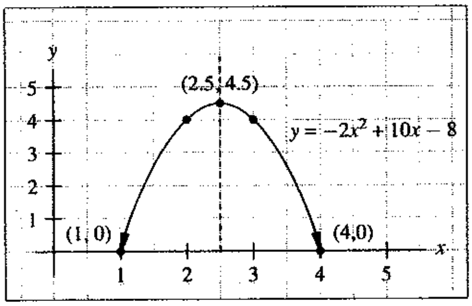
بالقسمة على ‎−2‎ ثم تحليل العوامل

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0 \qquad (x = 1, x = 4)$$

إحداثيات الحدود القاطعة x هي $(1, 0)$ ، $(4, 0)$

انظر الشكل (3–15) .



شكل (3–15)

(*d*) $y = \frac{1}{2}x^2 + 6x + 21$

(1) وحيث إن $a = \frac{1}{2} > 0$ فإن القطع المكافئ يفتح لأعلى

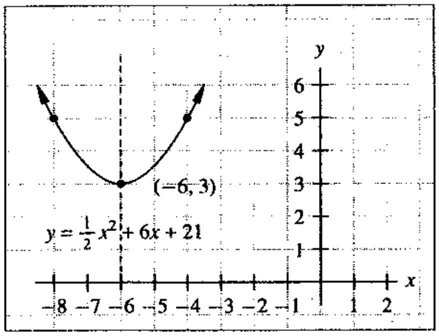
(2) $$x = \frac{-(6)}{2(1/2)} \qquad y = \frac{4(1/2)(21) - (6)^2}{4(1/2)}$$

$$x = -6 \qquad y = \frac{42 - 36}{2} = 3$$

إحداثيات قمة الرأس $(-6, 3)$.

(3) القطع المكافئ لا يقطع محور x .

انظر الشكل (3–16) .



شكل (3–16)

(*e*) $y = -x^2 + 8x - 7$

(1) القطع يفتح لأسفل

(2) $$x = \frac{-(8)}{2(-1)} = 4 \qquad y = \frac{4(-1)(-7) - (8)^2}{4(-1)} = 9$$

إحداثيات قمة الرأس $(4, 9)$.

(3) $-x^2 + 8x - 7 = 0$

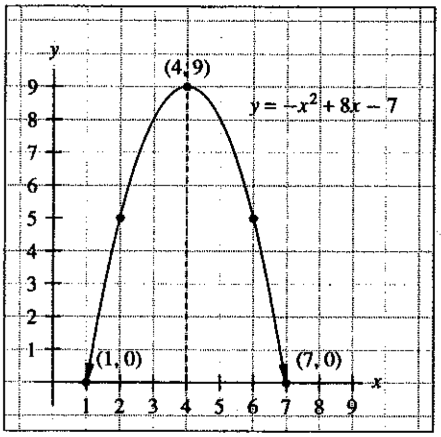
بالقسمة على ‎−1‎ وتحليل العوامل

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$(x - 1)(x - 7) = 0 \qquad (x = 1, x = 7)$$

الحدود القاطعة x : $(1, 0)$ ، $(7, 0)$.

انظر الشكل $(3\text{–}17)$.



شكل $(3\text{–}17)$

$(f) \quad y = x^2 + 8x + 12$

(1) القطع يفتح لأعلى

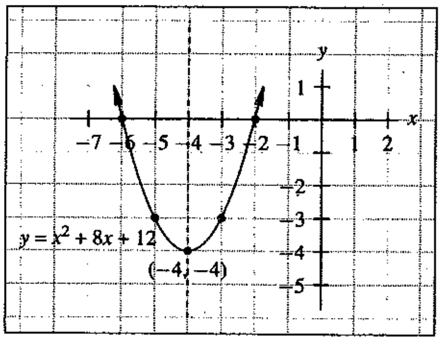
(2) $x = \dfrac{-(8)}{2(1)} = -4 \qquad y = \dfrac{4(1)(12) - (8)^2}{4(1)} = -4$

إحداثيات قمة الرأس $(-4, -4)$.

(3)
$$x^2 + 8x + 12 = 0$$
$$(x + 2)(x + 6) = 0$$
$$x = -2 \qquad x = -6$$

الحدود القاطعة x : $(-2, 0)$ ، $(-6, 0)$

انظر الشكل $(3\text{–}18)$.



شكل $(3\text{–}18)$

3.23. عين مخطط بيانى للدوال المنطقية التالية بإيجاد (1) الخط المقارب الرأسى (2) والخط المقارب الأفقى (3) واختار عدد من النقاط النموذجية ومثل بيانيًا كما اقترح فى القسم 3.6 .

3.23. Do a rough sketch of the graphs of the following rational functions by finding (1) the vertical asymptote, (2) the horizontal asymptote, and (3) selecting a number of representative points and graphing, as was suggested in Section 3.6.

(*a*) $y = \dfrac{-4}{x+6}$

(1) بوضع المقام مساويًا للصفر ، والحل بالنسبة لـ x لإيجاد الخط المقارب الرأسى .

الخط المقارب الرأسى $x=-6 \quad x+6=0$

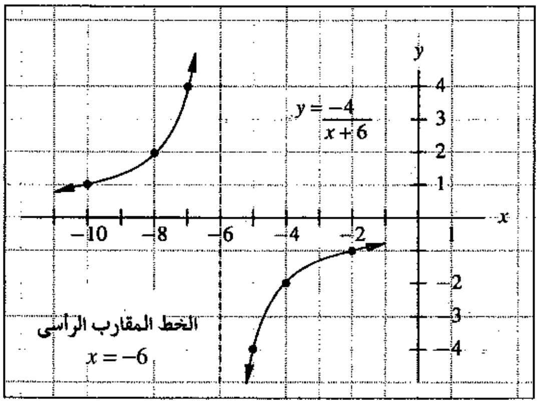
(2) حل المعادلة الأصلية بالنسبة لـ x لإيجاد الخط المقارب الأفقى .

$$y = \frac{-4}{x+6}$$
$$y(x+6) = -4$$
$$yx = -6y - 4$$
$$x = -\frac{(6y+4)}{y}$$

وبوضع المقام مساويًا للصفر والحل بالنسبة لـ y

الخط المقارب الأفقى $y=0$

(3) نوجد النقاط النموذجية ونمثل بيانيًا ـ انظر الشكل (19–3) .



x	y
−10	1
−8	2
−7	4
---	---
−5	−4
−4	−2
−2	−1

شكل (19–3)

(*b*) $y = \dfrac{-3}{x-5}$

(1) $x - 5 = 0$

الخط المقارب الرأسى $x = 5$

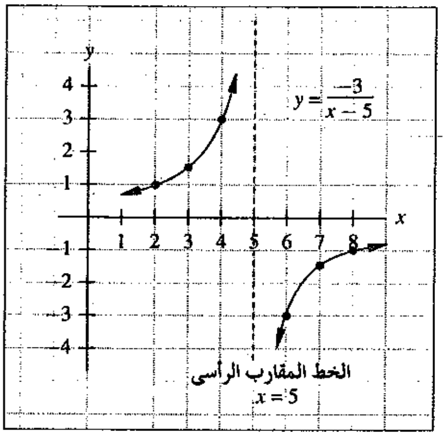
(2) $y(x-5) = -3$

$$yx = -3 + 5y$$
$$x = \frac{-3+5y}{y}$$

الخط المقارب الرأسى $y=0$

(3) نوجد النقاط النموذجية ونمثل بيانيًا : انظر الشكل (3–20) .

x	y
8	-1
7	-1.5
6	-3
- - -	- - -
4	3
3	1.5
2	1



شكل (3–20)

$$(c) \quad y = \frac{2x+3}{x-4}$$

(1) الخط المقارب الرأسى : $x = 4$.

(2) بضرب طرفى المعادلة فى $(x-4)$ والحل بالنسبة x لإيجاد الخط المقارب الأفقى .

$$y(x-4) = 2x+3$$

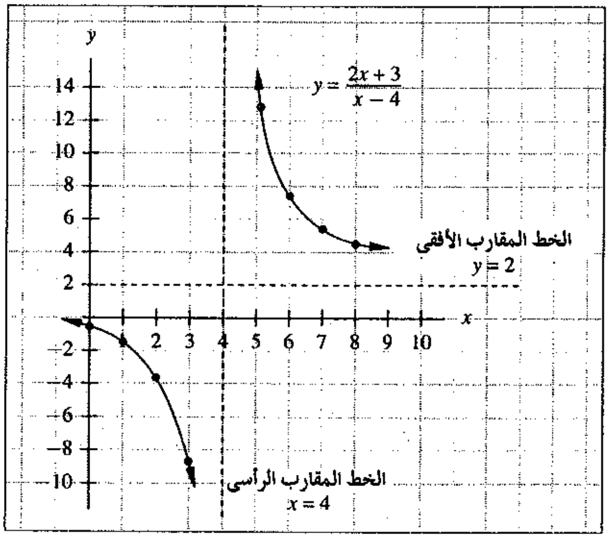
$$yx - 4y = 2x+3$$

$$yx - 2x = 4y+3$$

$$x(y-2) = 4y+3$$

$$x = \frac{4y+3}{y-2}$$

x	y
0	-0.75
1	-1.67
2	-3.5
3	-9.0
- - -	- - - -
5	13.0
6	7.5
7	5.67
8	4.75



شكل (3–21)

ويوضع المقام مساويًا للصفر والحل بالنسبة لـ y

الخط المقارب الأفقى $\qquad y = 2 \qquad y - 2 = 0$

(3) نوجد النقاط النموذجية ونحددها بيانيًا . انظر الشكل (21–3) .

(*d*) $y = \dfrac{3x + 5}{4x - 9}$

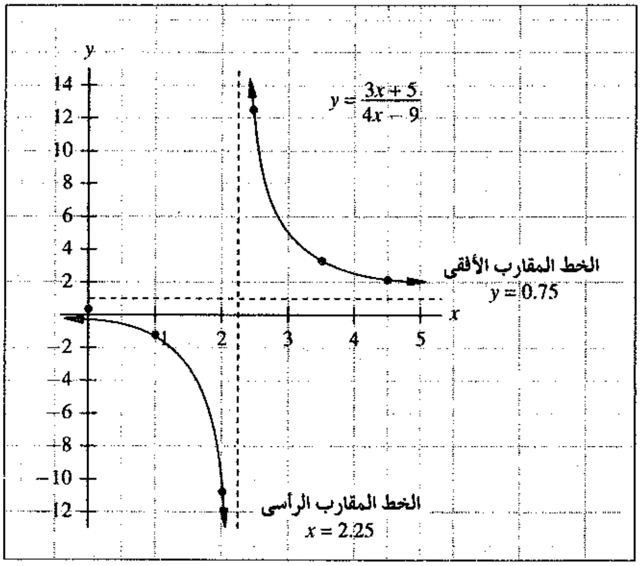
(1)
$$4x - 9 = 0$$
$$4x = 9$$
$$x = 2.25$$

الخط المقارب الأفقى

(2)
$$y(4x - 9) = 3x + 5$$
$$4xy - 9y = 3x + 5$$
$$4xy - 3x = 9y + 5$$
$$x(4y - 3) = 9y + 5$$
$$x = \frac{9y + 5}{4y - 3}$$

ويوضع المقام مساويًا للصفر والحل بالنسبة لـ y .

الخط المقارب الأفقى $\qquad y = \frac{3}{4}$



x	y
0	− 0.56
1.0	− 1.6
2.0	−11.0
- - -	- - - - -
2.5	12.5
3.5	3.1
4.5	2.06

شكل (22–3)

Nonlinear Functions in Business and Economics الدوال غير الخطية فى الإدارة والاقتصاد

3.24. أوجد دوال الإيراد (R) للمنتجين الذين يواجهون دوال الطلب الخطية التالية :

3.24. Find the total revenue R functions for producers facing the following linear demand functions:

(*a*) $Q = -8P + 425$ $\qquad$ (*b*) $Q = -\frac{1}{2}P + 235$

(*a*) من تعريف الإيراد الكلى الذى يساوى السعر مضروبًا فى الكمية أو :

$$R = P \cdot Q$$

وبالتعويض عن قيمة Q .

$$R = P(-8P + 425)$$
$$R = -8P^2 + 425P$$

(b)
$$R = P(-\tfrac{1}{2}P + 235)$$
$$R = -\tfrac{1}{2}P^2 + 235P$$

لاحظ أن دالة الإيراد الكلى المشتقة من دالة الطلب الخطية هى دائمًا دالة من الدرجة الثانية .

3.25. إذا أعطيت دوال الإيراد الكلى $R(x)$ والتكلفة الكلية $C(x)$ التالية (1) عبر عن الربح (π) كدالة فى (x) (2) حدد المستوى الأمثل للربح من خلال إيجاد قمة الرأس لـ $\pi(x)$ (3) أوجد الحدود القاطعة x وارسم مخططًا بيانيًا .

3.25. Given the following total revenue $R(x)$ and total cost $C(x)$ functions, (1) express profit π as a function of x, (2) determine the maximum level of profit by finding the vertex of $\pi(x)$, and (3) find the x intercepts and draw a rough sketch of the graph.

(a) $R(x) = 600x - 5x^2 \qquad C(x) = 100x + 10,500$

(1)
$$\pi(x) = R(x) - C(x)$$
$$\pi(x) = 600x - 5x^2 - (100x + 10,500)$$
$$\pi(x) = -5x^2 + 500x - 10,500$$

(2) باستخدام أسلوب المسألة (3.22) ولكن بإحلال π محل y .

$$x = \frac{-(500)}{2(-5)} \qquad \pi = \frac{4(-5)(-10,500) - (500)^2}{4(-5)}$$
$$x = 50 \qquad \pi = \frac{210,000 - 250,000}{-20} = 2000$$

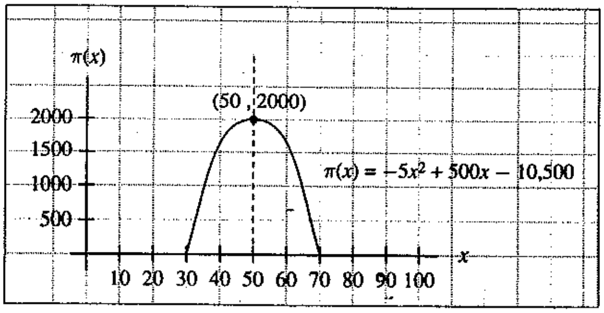
قمة الرأس (50, 2000) ، المستوى الأمثل للربح $\pi(50) = 2000$.

(3) بتحليل عوامل $\pi(x) = 0$ لإيجاد الحدود القاطعة x .

$$-5x^2 + 500x - 10,500 = 0$$
$$-5(x^2 - 100x + 2100) = 0$$
$$(x - 30)(x - 70) = 0$$
$$x = 30 \qquad x = 70$$

الحدود القاطعة (30, 0) ، (70, 0) .

انظر الشكل (2–23) .



شكل (3–23)

(b) $R(x) = 280x - 2x^2 \qquad C(x) = 60x + 5600$

(1) $\pi(x) = -2x^2 + 220x - 5600$

(2) $$x = \frac{-(220)}{2(-2)} = 55 \qquad \pi = \frac{4(-2)(-5600) - (220)^2}{4(-2)} = 450$$

قمة الرأس : $(55, 450)$ مستوى الربح الأمثل : $\pi(55) = 450$

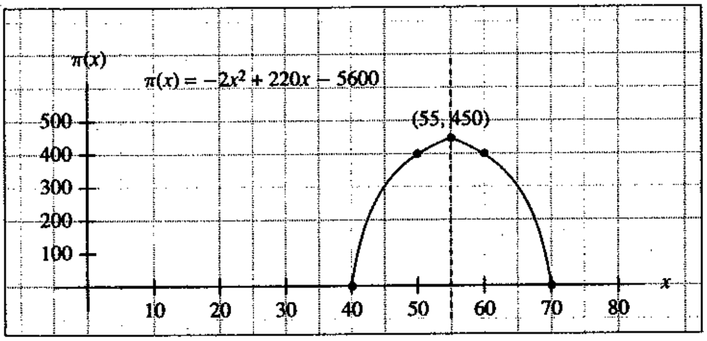
(3) بتحليل عوامل $\pi(x) = 0$ لإيجاد الحدود القاطعة x .

$$-2(x^2 - 110x + 2800) = 0$$

$$(x - 40)(x - 70) = 0$$

$$x = 40 \qquad x = 70$$

الحدود القاطعة x :$(70, 0)$ ، $(40, 0)$ انظر الشكل (3–24) .



شكل (3–24)

(c) $R(x) = 540x - 3x^2 \qquad C(x) = 90x + 16{,}200$

(1) $\pi(x) = -3x^2 + 450x - 16{,}200$

(2) $$x = \frac{-(450)}{2(-3)} = 75 \qquad \pi = \frac{4(-3)(-16{,}200) - (450)^2}{4(-3)} = 675$$

قمة الرأس : $(75, 675)$ مستوى الربح الأمثل : $\pi(75) = 675$

(3) بتحليل عوامل $\pi(x) = 0$ لإيجاد الحدود القاطعة x .

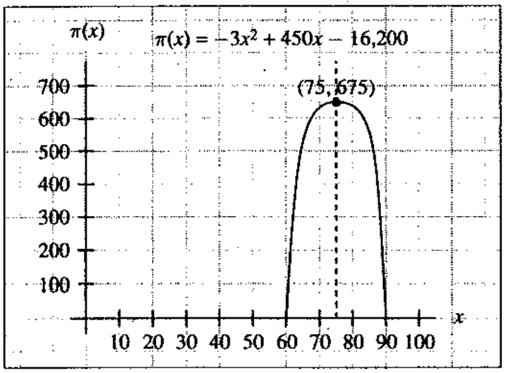
$$-3(x^2 - 150x + 5400) = 0$$

$$(x - 60)(x - 90) = 0$$

$$x = 60 \qquad x = 90$$

الحدود القاطعة x : $(60, 0)$ ، $(90, 0)$

انظر الشكل (3–25) .



شكل (3–25)

(*d*) $R(x) = 48x - 3x^2 \qquad C(x) = 6x + 120$

(1) $\pi(x) = -3x^2 + 42x - 120$

(2) $$x = \frac{-(42)}{2(-3)} = 7 \qquad \pi = \frac{4(-3)(-120) - (42)^2}{4(-3)} = 27$$

قمة الرأس : $(7, 27)$ مستوى الربح الأمثل : $\pi(7) = 27$

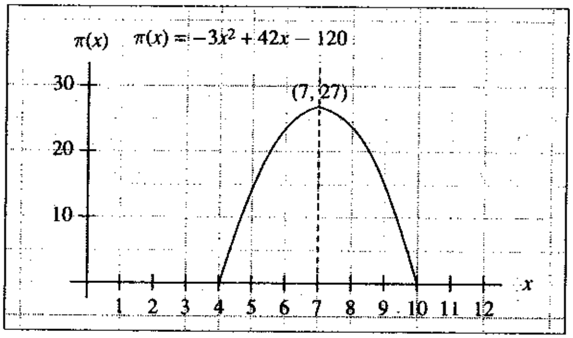
(3) بتحليل عوامل $\pi(x) = 0$ لإيجاد الحدود القاطعة x .

$$-3(x^2 - 14x + 40) = 0$$

$$(x - 4)(x - 10) = 0$$

$$x = 4 \qquad x = 10$$

الحدود القاطعة x: $(4, 0)$ ، $(10, 0)$ انظر الشكل (3–26) .



شكل (3–26)

3.26. يمكن تقريب التكلفة المتوسطة $AC(x)$ فى الأجل الطويل بدالة من الدرجة الثانية . أوجد أدنى تكلفة متوسطة طويلة الأجل عن طريق إيجاد قمة الرأس لـ $AC(x)$ وارسم الشكل بيانيًا . إذا أعطيت

3.26. The long-run average cost AC(x) can be approximated by a quadratic function. Find the minimum long-run average cost (LRAC) by finding the vertex of AC(x) and sketch the graph, given

$$AC(x) = x^2 - 120x + 4100$$

(1) وحيث إن $a > 0$ فإن القطع المكافئ يفتح لأعلى

(2) $$x = \frac{-(-120)}{2(1)} = 60 \qquad \text{AC} = \frac{4(1)(4100) - (-120)^2}{4(1)} = 500$$

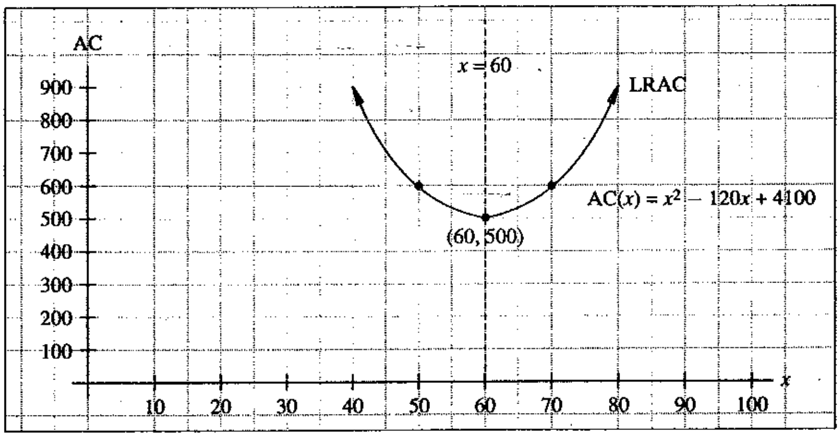
قمة الرأس : $(60, 500)$ أدنى تكلفة متوسطة : $AC(60) = 500$

(3) وحيث إن القطع يفتح لأعلى من قمة الرأسى $(60, 500)$ فالتمثيل البيانى لا يقطع محور x . انظر الشكل (3–27) .

3.27. تكلفة أجهزة تنظيف أول أكسيد الكربون المنطلق من فوهة فرن تقدر بالدالة المنطقية التالية :

3.27. The cost of scrubbers to clean carbon monoxide from the exhaust of a blast furnace is estimated by the rational function

$$C(x) = \frac{150x}{110 - x} \qquad (0 \le x \le 100)$$



شكل (27–3)

حيث التكلفة (C) بآلاف الدولارات لإزالة نسبة مئوية من أول أكسيد الكربون . مثل بيانيًا المعادلة لتوضيح التكاليف المرتفعة لإزالة النسب المئوية النهائية من السم .

where C is the cost in thousands of dollars of removing x percent of the carbon monoxide. Graph the equation to show the sharply rising costs of cleaning up the final percentages of the toxic.

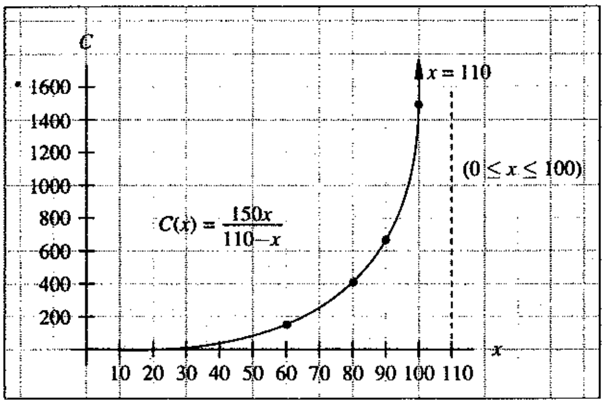
x	y
60	180
80	400
90	675
100	1500

الخط المقارب الرأسى :

$$110 - x = 0$$

$$x = 110$$

انظر الشكل (28–3) .



شكل (28–3)

3.28. الوحدات ـ مثل السيارات ـ التى تخضع للإهلاك المتسارع تفقد مقدارًا كبيرًا من قيمتها وبأسرع من تلك التى تحت الإهلاك الخطى . افترض سيارة ما قيمتها 10,000$ وعمرها 10 سنوات وليس لها قيمة استردادية . (a) باستخدام الخط المتواصل ارسم بيانيًا القيمة $V(t)$ للسيارة تحت الإهلاك المتسارع . (b) واستخدم الخط المتقطع لتوضيح قيمة نفس السيارة تحت الإهلاك الخطى .

3.28. Items such as automobiles are subject to *accelerated depreciation* whereby they lose more of their value faster than they do under linear depreciation. Assume a car worth \$10,000 with a lifetime of 10 years with no salvage value. (a) Using a solid line, draw a graph of the value $V(t)$ of a car under accelerated depreciation and (b) using a dotted line show the value of the same car under straight-line depreciation, given

(a) $V(t) = 100t^2 - 2000t + 10{,}000$ (b) $V(t) = 10{,}000 - 1000t$

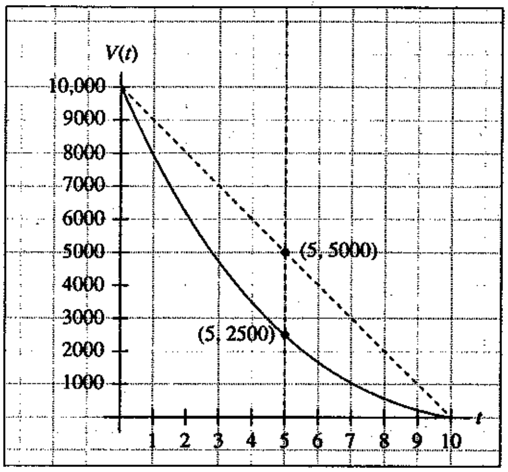
(*a*)

t	V
0	10,000
2	6,400
5	2,500
8	400

(*b*)

t	V
0	10,000
2	8,000
5	5,000
8	2,000

انظر الشكل (3–29)



شكل (3–29)

لاحظ أنه عند $t = 5$ فإن قيمة السيارة \$5000 تحت الإهلاك الخطى ولكن قيمتها فقط \$2500 تحت الإهلاك المتسارع .

3.29. ارسم مجموعة متشابهة من الرسوم البيانية لسيارة قيمتها \$12,000 وعمرها الفنى 8 سنوات إذا علمت أن $V(t) = 187.5t^2 - 3000t + 12,000$ تحت الإهلاك المتسارع و (*b*) $V(t) = 12,000 - 1500t$ تحت الإهلاك الخطى .

3.29. **Draw a similar set of graphs for a car worth \$12,000 with a lifespan of 8 years, given (*a*) $V(t) = 187.5t^2 - 3000t + 12,000$ under accelerated depreciation and (*b*) $V(t) = 12,000 - 1500t$ under linear depreciation.**

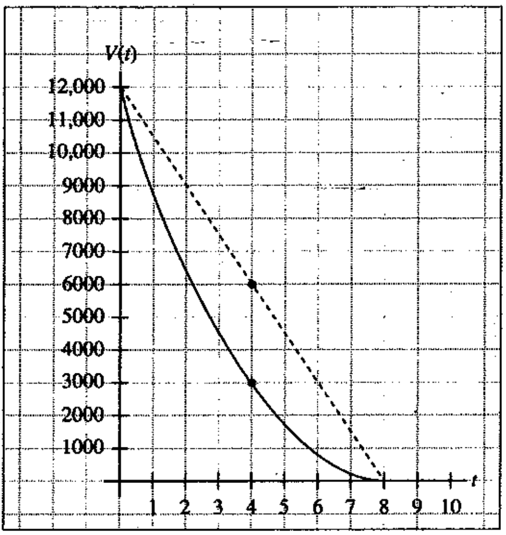
(*a*)

t	V
0	12,000
2	6,750
4	3,000
6	750

(*b*)

t	V
0	12,000
2	9,000
4	6,000
6	3,000

انظر الشكل (3–30)



شكل (3–30)

تركيب الدوال فى الإدارة والاقتصاد

Composition of Functions in Business and Economics

3.30. مصنع ما تكلفته $C(q)$ دالة فى عدد الوحدات المنتجة ومستوى ناتجة $q(t)$ دالة فى الزمن . عبر عن تكلفة المصنع كدالة فى الزمن المعطى لكل من الحالات التالية :

3.30. A factory's cost $C(q)$ is a function of the number of units produced; its level of output $q(t)$ is a function of time. Express the factory's cost as a function of the time given each of the following circumstances:

(*a*) $C(q) = 1500 + 40q \qquad q(t) = 16t - \frac{1}{4}t^2$

بالتعويض عن $q(t)$ لكل وجود من q فى $C(q)$.

$$\begin{aligned} C[q(t)] &= 1500 + 40(16t - \tfrac{1}{4}t^2) \\ &= 1500 + 640t - 10t^2 \end{aligned}$$

(*b*) $C(q) = q^2 + 3q + 75 \qquad q(t) = 8(t - \frac{1}{4})$

$$q(t) = 8(t - \tfrac{1}{4}) = 8t - 2$$

بالتعويض عن q فى $C(q)$.

$$\begin{aligned} C[q(t)] &= (8t - 2)^2 + 3(8t - 2) + 75 \\ &= (64t^2 - 32t + 4) + (24t - 6) + 75 \\ &= 64t^2 - 8t + 73 \end{aligned}$$

3.31. قدر أصدقاء البيئة المستوى المتوسط لأول أكسيد الكربون فى الجو بـ $L(n) = (1 + 0.6n)$ جزء من المليون (ppm) عندما يكون عدد الناس n ألف . افترض أن السكان بالآلاف عند الزمن t حيث : $n(t) = 400 + 30t + 0.15t^2$. (*a*) عبر عن مستوى أول أكسيد الكربون فى الجو كدالة فى الزمن . (*b*) قدر مستوى أول أكسيد الكربون عند $t = 5$.

3.31. Environmentalists have estimated that the average level of carbon monoxide in the air is $L(n) = (1 + 0.6n)$ parts per million (ppm) when the number of people is n thousand. Assuming that the population in thousands at time t is $n(t) = 400 + 30t + 0.15t^2$, (*a*) express the level of carbon monoxide in the air as a function of time and (*b*) estimate the level of carbon monoxide at $t = 5$.

(*a*) بتحديد الدالة المركبة $L[n(t)]$ وذلك بالتعويض عن $n(t)$ فى $L(n)$ نحصل على :

$$L[n(t)] = 1 + 0.6(400 + 30t + 0.15t^2)$$
$$= 241 + 18t + 0.09t^2$$

(*b*) $$L[n(5)] = 241 + 18(5) + 0.09(5)^2 = 333.25 \text{ ppm}$$

3.32. يقاس مجتمع الضفادع F بالمئات فى منطقة معينة ويعتمد على مجتمع الحشرات m بالآلاف: $F(m) = 65 + \sqrt{m/8}$ ومجتمع الحشرات بدوره يتغير مع معدل سقوط الأمطار r والمحددة بالبوصة: $m(r) = 43r + 7.5$.

(*a*) عبر عن مجتمع الضفادع كدالة فى معدل سقوط الأمطار .

(*b*) وقدر مجتمع الضفادع عندما يكون معدل سقوط الأمطار 1.5 بوصة .

3.32. The frog population F measured in hundreds in a given region depends on the insect population m in thousands: $F(m) = 65 + \sqrt{m/8}$. The insect population in turn varies with the amount of rainfall r given in inches: $m(r) = 43r + 7.5$.

(a) Express the frog population as a function of the rainfall and (*b*) estimate the frog population when the rainfall is 1.5 inches.

(*a*) $$F[m(r)] = 65 + \sqrt{\frac{43r + 7.5}{8}}$$

(*b*) $$F[m(1.5)] = 65 + \sqrt{\frac{43(1.5) + 7.5}{8}} = 65 + \sqrt{9} = 68 \text{ or } 6800$$ ضفادع

مسائل إضافية

Functions الدوال

3.33. قدر الدوال التالية عند القيم العددية المعطاة لـ x :

3.33. Evaluate the following functions at the given numerical values of x:

(*a*) $f(x) = x^2 - 9x + 42$ عند $x = 3$
(*b*) $g(x) = 2x^2 + 5x - 9$ عند $x = -4$
(*c*) $h(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 7$ عند $x = 2$
(*d*) $F(x) = (5x^2 - 4x + 7)/(3x - 7)$ عند $x = 5$

3.34. قدر الدوال التالية عند القيم المعاملية المعطاة لـ x :

3.34. Evaluate the following functions at the given parametric values of x:

(*a*) $f(x) = 7x^3 - 12x^2 - 38x + 115$ عند $x = a$
(*b*) $g(x) = 8x^2 + 5x - 13$ عند $x = a + 2$
(*c*) $h(x) = 4x^2 - 6x + 7$ عند $x = b - 4$
(*d*) $G(x) = (12x^2 - 9x + 15)/(4x - 3)$ عند $x = b + 5$

Algebra of Functions جبر الدوال

3.35. إذا أعطيت : $f(x) = 7x - 2$ ، $g(x) = 3x + 8$ ، أوجد (*a*) $(f+g)(x)$ ، (*b*) $(f.g)(x)$.

3.35. Given $f(x) = 7x - 2$ and $g(x) = 3x + 8$, find (*a*) $(f + g)(x)$ and (*b*) $(f \cdot g)(x)$.

3.36. إذا أعطيت : $g(x) = 4x - 9$ ، $h(x) = 12 - 5x$ ، أوجد (a) $(g - h)(x)$ ، (b) $(g \div h)(x)$.

3.36. Given $g(x) = 4x - 9$ and $h(x) = 12 - 5x$, find (a) $(g - h)(x)$ and (b) $(g \div h)(x)$.

3.37. إذا أعطيت : $F(x) = 3x^2 - 7x + 8$ ، $G(x) = 9x - 4$ ، أوجد (a) $(F + G)(x)$ ، (b) $(F . G)(x)$.

3.37. Given $F(x) = 3x^2 - 7x + 8$ and $G(x) = 9x - 4$, find (a) $(F + G)(x)$ and (b) $(F \cdot G)(x)$.

3.38. إذا أعطيت : $f(x) = 30x^2 - x - 99$ ، $h(x) = 5x + 9$ ، أوجد (a) $(f - h)(x)$ ، (b) $(f \div h)(x)$.

3.38. Given $f(x) = 30x^2 - x - 99$ and $h(x) = 5x + 9$, find (a) $(f - h)(x)$ and (b) $(f \div h)(x)$.

3.39. إذا أعطيت : $G(x) = 6/(x + 3)$ ، $H(x) = 11/x^2$ ، أوجد (a) $(G + H)(x)$ ، (b) $(G . H)(x)$.

3.39. Given $G(x) = 6/(x + 3)$ and $H(x) = 11/x^2$, find (a) $(G + H)(x)$ and (b) $(G \cdot H)(x)$.

3.40. إذا أعطيت : $f(x) = (x - 7)/(x + 2)$ ، $g(x) = (x + 3)/(x - 8)$ ، أوجد (a) $(f - g)(x)$ ، (b) $(f \div g)(x)$.

3.40. Given $f(x) = (x - 7)/(x + 2)$ and $g(x) = (x + 3)/(x - 8)$, find (a) $(f - g)(x)$ and (b) $(f \div g)(x)$.

3.41. إذا أعطيت : $f(x) = x^3 - 3x + 4$ ، $g(x) = 5x^2$ ، أوجد الدوال المركبة (a) $f[g(x)]$ ، (b) $g[f(x)]$.

3.41. Given $f(x) = x^3 - 3x + 4$ and $g(x) = 5x^2$, find the composite functions (a) $f[g(x)]$ and (b) $g[f(x)]$.

3.42. إذا أعطيت : $F(x) = (9x - 2)/4x$ ، $G(x) = x^5$ ، أوجد (a) $F[G(x)]$ ، (b) $G[F(x)]$ والتى تسمى دوال الدوال .

3.42. Given $F(x) = (9x - 2)/4x$ and $G(x) = x^5$, find (a) $F[G(x)]$ and (b) $G[F(x)]$, also called *functions of functions*.

Linear Functions in Business and Economics الدوال الخطية فى الإدارة والاقتصاد

3.43. منشأة ما تكلفتها الثابتة $125,000 والتكلفة المتغير للوحدة المصنعة $685 . عبر عن التكاليف الكلية للمنشأة (TC) كدالة فى الناتج x .

3.43. A firm has a fixed cost of $125,000 and variable costs per item manufactured of $685. Express the firm's total cost TC as a function of output x.

3.44. سيارة جديدة تشترى اليوم بـ $13,500 وتهلك فى نهاية كل سنة بـــ $2250 . عبر عن قيمة السيارة (V) كدالة فى السنوات t .

3.44. A new car bought today for $13,500 depreciates by $2250 at the end of each calendar year. Express the value V of the car as a function of years t.

3.45. تعمل شركة فى سوق المنافسة الكاملة وتحصل على $95 كعائد لكل وحدة مباعة . فإذا كانت التكاليف الثابتة للشركة $8800 والتكلف الحدية للوحدة $67.50 . عبر عن أرباح الشركة (π) لدالة فى عدد الوحدات المباعة (x) .

3.45. A company in a purely competitive market receives $95 in revenue for each item sold. If the company has fixed costs of $8800 and a marginal cost of $67.50 per item, express the company's profit π as a function of the number of items x sold.

Solving Quadratic Equations حل المعادلات من الدرجة الثانية

3.46. حل المعادلات من الدرجة الثانية بتحليل العوامل :

3.46. Solve the following quadratic equations by factoring:

(*a*) $x^2 - 11x + 28$ (*b*) $x^2 + 5x - 24$ (*c*) $x^2 + 11x + 18$
(*d*) $x^2 - 8x - 48$

3.47. استخدم الصيغة التربيعية لحل كل من المعادلات التربيعية التالية :

3.47. Use the quadratic formula to solve each of the following quadratic equations:

(*a*) $6x^2 + 31x + 40$ (*b*) $8x^2 - 50x + 33$ (*c*) $4x^2 - 31x - 45$
(*d*) $9x^2 - 67.5x + 126$

Graphing Nonlinear Functions التمثيل البيانى للدوال غير الخطية

3.48. عين لكل من المعادلات التربيعية التالية شكل القطع المكافئ بتحديد (1) ما إذا كان يفتح إلى أعلى أو إلى أسفل . (2) إحداثيات قمة الرأس . (3) الحدود القاطعة x إن وجدت :

3.48. For each of the following quadratic functions, indicate the shape of the parabola by determining (1) whether the parabola opens up or down, (2) the coordinates of the vertex, and (3) the x intercepts, if any:

(*a*) $y = -x^2 + 12x - 27$ (*b*) $y = x^2 - 8x - 48$
(*c*) $y = -x^2 - 16x - 28$ (*d*) $y = x^2 - 5x + 30$

3.49. عين الشكل العام للدوال المنطقية التالية بإيجاد (1) الخط المقارب الرأسى . (2) والخط المقارب الأفقى . (3) عدد صغير من النقاط النموذجية على الرسم البيانى .

3.49. Indicate the general shape of the following rational functions by finding (1) the vertical asymptote VA, (2) the horizontal asymptote HA, and (3) a small number of representative points on the graph:

(*a*) $y = \dfrac{6}{x-8}$ (*b*) $y = \dfrac{-7}{x+3}$ (*c*) $y = \dfrac{x+9}{x-6}$ (*d*) $y = \dfrac{4-x}{5+x}$

Nonlinear Business and Economics Functions الدوال غير الخطية فى الإدارة والاقتصاد

3.50. حدد دالة الإيراد الكلى (TR) لكل من المنشآت التى تواجه بدوال الطلب الخطية التالية :

3.50. Determine the total revenue **TR** function for each of the firms confronted with the following linear demand functions:

(*a*) $P = -17.5Q + 2675$ (*b*) $P = -9.8Q + 860$

3.51. لكل مجموعة من دوال التكلفة الكلية (TC) والإيراد الكلى (TR) التالية . عبر أولاً عن الربح (π) كدالة فى الناتج (x) ومن ثم حدد المستوى الأمثل للربح وذلك بإيجاد قمة الرأس للقطع المكافئ .

3.51. For each set of the following total revenue and total cost functions, first express profit π as a function of output x and then determine the maximum level of profit by finding the vertex of the parabola:

(*a*) $\text{TR} = -6x^2 + 1200x$, $\text{TC} = 180x + 3350$
(*b*) $\text{TR} = -4x^2 + 900x$, $\text{TC} = 140x + 6100$
(*c*) $\text{TR} = -7x^2 + 4100x$, $\text{TC} = 600x + 12{,}500$
(*d*) $\text{TR} = -9x^2 + 6600x$, $\text{TC} = 660x + 19{,}600$

حل المسائل الإضافية

3.33. (*a*) $f(3) = 24$ (*b*) $g(-4) = 3$ (*c*) $h(2) = 1$ (*d*) $F(5) = 14$

3.34. (*a*) $f(a) = 7a^3 - 12a^2 - 38a + 115$
(*b*) $g(a+2) = 8a^2 + 37a + 29,$ (*c*) $h(b-4) = 4b^2 - 38b + 95$
(*d*) $G(b+5) = \dfrac{12b^2 + 111b + 270}{4b + 17}$

3.35. (*a*) $(f+g)(x) = 10x + 6$ (*b*) $(f \cdot g)(x) = 21x^2 + 50x - 16$

3.36. (*a*) $(g-h)(x) = 9x - 21$ (*b*) $(g \div h)(x) = \dfrac{4x - 9}{12 - 5x}$

3.37. (*a*) $(F+G)(x) = 3x^2 + 2x + 4$ (*b*) $(F \cdot G)(x) = 27x^3 - 75x^2 + 100x - 32$

3.38. (*a*) $(f-h)(x) = 30x^2 - 6x - 108$ (*b*) $(f \div h)(x) = 6x - 11$

3.39. (*a*) $(G+H)(x) = \dfrac{6x^2 + 11x + 33}{x^3 + 3x^2}$ (*b*) $(G \cdot H)(x) = \dfrac{66}{x^3 + 3x^2}$

3.40. (*a*) $(f-g)(x) = \dfrac{-20x + 50}{x^2 - 6x - 16}$ (*b*) $(f \div g)(x) = \dfrac{x^2 - 15x - 56}{x^2 + 5x + 6}$

3.41. (*a*) $f[g(x)] = 125x^6 - 15x^2 + 4$
(*b*) $g[f(x)] = 5(x^3 - 3x + 4)^2 = 5x^6 - 30x^4 + 40x^3 + 45x^2 - 120x + 80$

3.42. (*a*) $F[G(x)] = \dfrac{9x^5 - 2}{4x^5}$ (*b*) $G[F(x)] = \left(\dfrac{9x - 2}{4x}\right)^5$

3.43. $\text{TC} = 685x + 125{,}000$

3.44. $V = -2250t + 13{,}500$

3.45. $\pi = 27.50x - 8800$

3.46. (*a*) $x = 4, 7$ (*b*) $x = 3, -8$ (*c*) $x = -2, -9$ (*d*) $x = -4, 12$

3.47. (*a*) $x = -2.5, -2.67$ (*b*) $x = 0.75, 5.5$ (*c*) $x = -1.25, 9$ (*d*) $x = 3.5, 4$

3.48 (*a*) يفتح لأسفل وقمة الرأس $(6, 9)$ والحدود القاطعة x : $(9, 0)$ ، $(3, 0)$.
(*b*) يفتح لأعلى وقمة الرأس $(4, -64)$ والحدود القاطعة x : $(12, 0)$ ، $(-4, 0)$.
(*c*) يفتح لأسفل وقمة الرأس $(-8, 36)$ والحدود القاطعة x : $(-14, 0)$ ، $(-2, 0)$.
(*d*) يفتح لأعلى وقمة الرأس $(2.5, 23.75)$ ولا توجد حدود قاطعة لـ x .

3.49. (*a*) VA: $x = 8$
HA: $y = 0$

x	y
2	−1
7	−6
- - -	- - -
9	6
14	1

(*b*) VA: $x = -3$
HA: $y = 0$

x	y
−10	1
−4	7
- - -	- - -
−2	−7
4	−1

(*c*) VA: $x = 6$
HA: $y = 1$

x	y
3	−4
5	−14
- - -	- - -
7	16
9	6

(*d*) VA: $x = -5$
HA: $y = -1$

x	y
−10	−2.8
−6	−10
- - -	- - - -
−4	8
0	0.8

3.50. (*a*) $\text{TR} = -17.5Q^2 + 2675Q$ (*b*) $\text{TR} = -9.8Q^2 + 860Q$

.3.51

(*a*) $\pi = -6x^2 + 1020x - 3350$

قمة الرأس (85, 40,000) . والربح الأمثل $\pi(85) = 40,000$

(*b*) $\pi = -4x^2 + 760x - 6100$

قمة الرأس (95, 30,000) . والربح الأمثل $\pi(95) = 30,000$

(*c*) $\pi = -7x^2 + 3500x - 12,500$

قمة الرأس (250, 425,000) . والربح الأمثل $\pi(250) = 425,000$

(*d*) $\pi = -9x^2 + 5940x - 19,600$

قمة الرأس (330, 960,500) . والربح الأمثل $\pi(330) = 960,500$

الفصل الرابع

نظم المعادلات Systems of Equations

4.1 مفاهيم وتعريفات Concepts and Definitions

لقد تركز العرض إلى الآن على تحليل المعادلات الفردية . وأغلب النماذج الرياضية تتطلب أكثر من معادلة . ومعادلات مثل هذه النماذج يقال أنها تمثل نظام المعادلات (System Equation) . والحل لنظام المعادلات هو عبارة عن مجموعة من القيم التى تحقق جميع معادلات النظام . ويتكون نظام المعادلات من (n) من المعادلات و(v) من المتغيرات ، يرمز له بنظام ($n \times v$) أو نظام أبعاده ($n \times v$) .

ولكى يكون هناك حل وحيد (unique Solution) لنظام المعادلات ، يجب أن يوجد على الأقل عدد المعادلات مساويًا لعدد المتغيرات . ويسمى النظام الذى يتساوى فيه عدد المعادلات وعدد المتغيرات ($n = v$) بالنظام المقيد بالضبط (Exactly Constrained System) . أما النظام تحت المقيد (Underconstrained System) فيكون عدد معادلاته أقل من عدد متغيراته ($n < v$) . والنظام فوق المقيد (Overconstrained system) فيكون عدد معادلاته أكبر من عدد متغيراته ($n > v$) والنظام تحت المقيد له عدد غير محدد من الحلول أو ليس له حل أو حل وحيد . والنظام المقيد بالضبط أو فوق المقيد فله حل وحيد أو عدد لا نهائى من الحلول أو ليس له حل . هذا الفصل يتعامل مع الطرق المختلفة لحل نظم المعادلات والتطبيقات العديدة المختلفة لمثل تلك النظم فى الإدارة والاقتصاد .

مثال 1 : حددت أبعاد نظم المعادلات التالية أدناه :

EXAMPLE 1. The dimensions of the following systems of equations are specified below.

(*a*) $y = 5x + 7$
$y = 8x - 3$

(*b*) $y = 3x_1 + 7x_2 - 4x_3$
$y = 9x_1 - 5x_2 + 2x_3$

(*c*) $y = 6x - 12$
$y = 9x + 15$
$y = 7x - 11$

النظام (a) له معادلتان ومتغيران : x ، y . إنه نظام (2×2) ولذلك فهو نظام مقيد بالضبط .

النظام (b) له معادلتان وأربعة متغيرات : x_1 ، x_2 ، x_3 ، y . إنه نظام (2×4) ولذلك فهو نظام تحت المقيد .

النظام (c) له ثلاث معادلات ومتغيران : x ، y . إنه نظام فوق المقيد مع أبعاد (3×2) .

4.2 الحلول البيانية Graphical Solutions

الرسم البيانى للنظام الخطى للمعادلات (2×2) يتكون من خطين مستقيمين . فإذا تقاطع الخطان عند نقطة (x_1, y_1) فإن هذه النقطة (x_1, y_1) تحقق المعادلتين وإحداثيات النقطة تمثل حل وحيد للنظام . فإذا لم يتقاطع الخطان ، فلا توجد نقطة تحقق كلا المعادلتين ولذلك لا يوجد حل والمعادلتان غير متسقتين . وأخيرًا إذا كان للمعادلات أشكال عمودية ، فإن لها عدد غير محدد من النقاط والنظام له عدد لا نهائى من الحلول . ومثل هذه

المعادلات تسمى معادلات متكافئة أو تابعة (Dependent Equations) وشروط إمكانيات الحلول المختلفة الثلاثة مختصرة أدناه وموضحة فى المثال 2 .

عرض النظام الخطى للمعادلات (2×2) فى صيغة ميل الحد القاطع فى المعادلة (2.2)

$$y = m_1x + b_1$$
$$y = m_2x + b_2$$

1. إذا كانت $m_1 \neq m_2$. يوجد حل وحيد للنظام .
2. إذا كانت $m_1 = m_2$ و $b_1 \neq b_2$. المعادلات غير متسقة ولا يوجد حل للنظام .
3. إذا كانت $m_1 = m_2$ و $b_1 = b_2$. المعادلات متكافئة ويوجد عدد لانهائى من الحلول للنظام .

مثال 2 : النظم المختلفة للمعادلات معطاة أدناه والحل البيانى كما يلى :

EXAMPLE 2. The different systems of equations given below are solved by graphing as follows:

(*a*) $x - 2y = -2$ $\quad 6x + 3y = 33$

(*b*) $10x + 2y = 30$ $\quad 15x + 3y = 75$

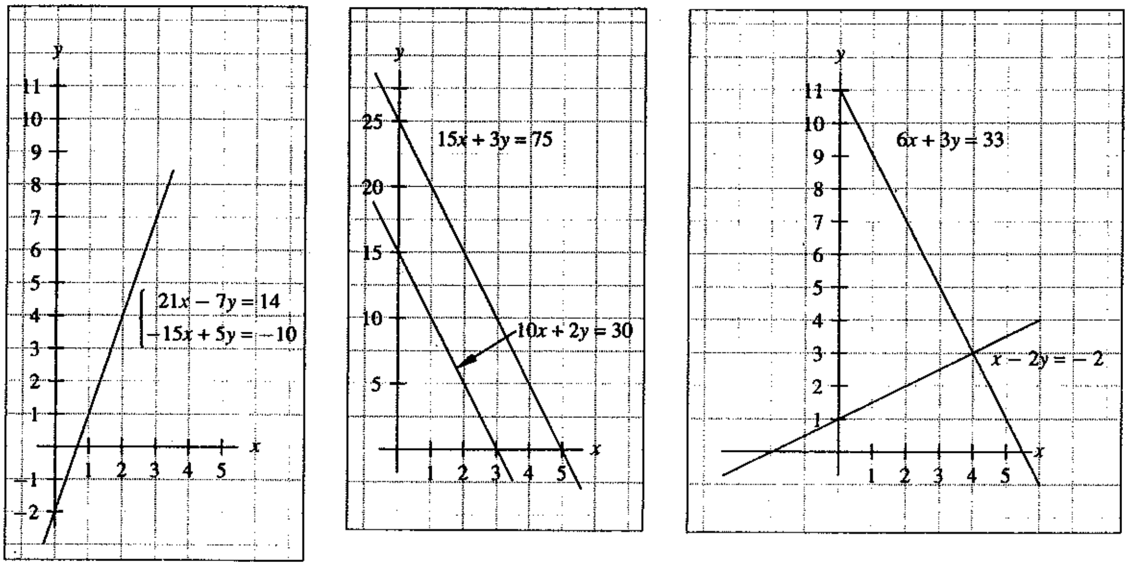
(*c*) $21x - 7y = 14$ $\quad -15x + 5y = -10$

وبتحويل المعادلات إلى صيغة ميل الحد القاطع والتمثيل بيانيًا كما فى الشكل (1–4) نجد ما يلى :

(*a*) $y = \frac{1}{2}x + 1$ $\quad y = -2x + 11$

(*b*) $y = -5x + 15$ $\quad y = -5x + 25$

(*c*) $y = 3x - 2$ $\quad y = 3x - 2$



(*c*) (*b*) (*a*)

شكل (1–4)

(*a*) الحل $x = 4$ ، $y = 3$ إنه حل وحيد لأن النظام تحدد بالضبط $(n = \upsilon)$ والمعادلات متسقة ومستقلة $(m_1 \neq m_2)$.

(*b*) لا يوجد حل وحيد . النظام تحدد بالضبط $(n = \upsilon)$ ولكن المعادلات غير متسقة $(m_1 = m_2$ ولكن $b_1 \neq b_2)$.

(*c*) يوجد عدد لا نهائى من الحلول يحقق المعادلتين فى آن واحد . النظام تحدد بالضبط ولكن المعادلات متكافئة أو تابعة $(m_1 = m_2$ ولكن $b_1 = b_2)$.

4.3 تحليل العرض والطلب Supply and Demand Analysis

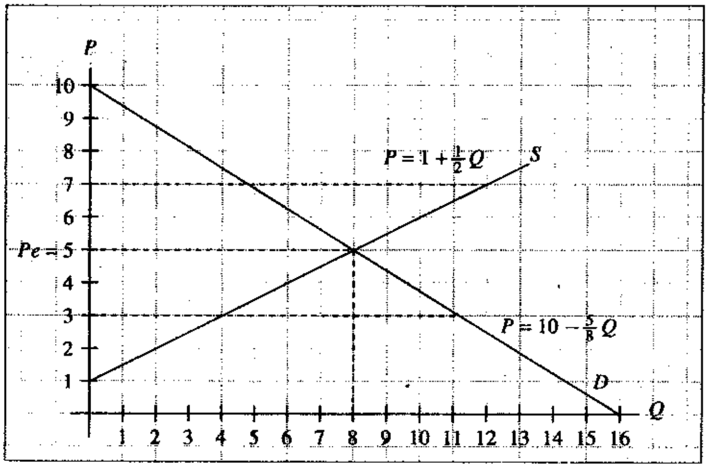
يعبر عن تحليل العرض والطلب فى مبادئ علم الاقتصاد بدلالة الأشكال البيانية . وطبقًا لما تعارف عليه ، فإن P (السعر) تعامل كمتغير تابع وتمثل بيانيًا على المحور y . والكمية Q تعتبر متغير مستقل وتمثل على المحور x . ونقطة تقاطع منحنى العرض S والطلب D تمثل نقطة توازن فى النموذج . والتوازن ينشأ عند سعر وحيد P_e يسمى سعر التوازن ، وعنده تكون الكمية المعروضة Q_s تساوى الكمية Q_d . والنقطة التى عندها $Q_s = Q_d$ تسمى كمية التوازن Q_e . وهذا موضح فى المثال 3 .

وتحليل العرض ـ الطلب يعالج أيضًا بالمعادلات . والهدف يتمثل فى إيجاد قيمة P_e ، Q_e . وبما أن P_e يظهر فيها $Q_s = Q_d = Q_e$ ، فالمطلوب فقط مساوات معادلة الطلب بمعادلة العرض فى أى صيغة تعرض . وبيان هذه الطريقة مقدم فى المثال 4 والمسائل 4.4 و 4.5 .

مثال 3 : الحل البيانى لنظام معادلات العرض والطلب التالية يعرض فى الشكل (2–4) ويتبع ببعض الملاحظات :

EXAMPLE 3. The graphical solution to the following system of supply and demand equations is presented in Fig. 4-2, followed by observations:

$$\text{العرض} : P = 1 + \tfrac{1}{2}Q$$
$$\text{الطلب} : P = 10 - \tfrac{5}{8}Q$$



شكل (2–4)

الحل لنظام معادلات الطلب والعرض يوجد عند $P = 5 = P_e$ وأن $Q = 8 = Q_e$ لاحظ أن :

1. عند $P_e = 5$ ، $Q_s = Q_d = 8 = Q_e$. وأنه عند $Q_e = 8$ ، $P_s = P_d = 5 = P_e$.
2. عند $P > 5$ ، $Q_s > Q_d$. عند $P = 7$ مثلاً . $Q_s = 12$ ، $Q_d = 4.8$ وعندما $Q_s > Q_d$ ، فإنه يسمى فائض . وفى سوق المنافسة الكاملة ، فالفائض يميل إلى دفع السعر إلى أسفل نحو P_e .
3. عند $P < 5$ ، $Q_d > Q_s$. عند $P = 3$ مثلاً . $Q_d = 11.2$ ، $Q_s = 4$ وعندما $Q_d > Q_s$. فإنه يسمى عجز . وفى السوق الحرة ، فالعجز يدفع الأسعار إلى أعلى نحو P_e .
4. وطالما أن سوق المنافسة الكاملة تتجه نحو P_e كما شرحنا فى البنود 2 و 3 أعلاه ، فإنه يقال عليه يتوازن ذاتيًا .

مثال 4 : يكون أحيانًا من الملائم حل نظام معادلات العرض والطلب جبريًا إذا أعطيت مجموعة مختلفة من المعادلات حيث Q يعبر عنها كمتغير تابع كما يحدث بالضبط فى الاقتصاد الرياضى .

EXAMPLE 4. Sometimes it is more convenient to solve a system of supply and demand equations algebraically. Consider a different set of equations in which Q is now expressed as the dependent variable, as typically happens in mathematical economics.

العرض : $Q = -50 + 6P$

الطلب : $Q = 230 - 8P$

وبما أننا نبحث عن السعر الذى يجلب التوازن إلى السوق ، والتوازن يوجد عندما $Q_s = Q_d$ فإننا نضع المعادلات مساوية لبعضها البعض ونوجد قيمة P .

$$Q_s = Q_d$$

$$-50 + 6P = 230 - 8P$$

$$14P = 280$$

$$P = 20 = P_e$$

ثم نوجد Q_e من خلال التعويض بقيمة $P_e = 20$ إما فى (a) معادلة العرض أو (b) الطلب .

(a) $Q_s = -50 + 6(20)$

$Q_s = -50 + 120 = 70 = Q_e$

(b) $Q_d = 230 - 8(20)$

$Q_d = 230 - 160 = 70 = Q_e$

4.4 تحليل نقطة التعادل Break-Even Analysis

عند التخطيط لمشروع تجارى جديد من المهم أن نتعرف على الحجم الأدنى من المبيعات المطلوب لتحقيق الربح . وتقدير النقطة التى عندها تتحرك ميزانية المنشأة من الخسارة إلى الربح يسمى تحليل نقطة التعادل . وتعرف نقطة التعادل بأنها مستوى المبيعات الذى عنده (1) الربح يساوى صفرًا أو (2) الإيراد الكلى يسوى التكلفة الكلية . ونقطة التعادل توجد جبريًا وبيانيًا للدوال الخطية فى المثال 5 وللدوال من الدرجة الثانية فى المثال 6 .

مثال 5 : إذا علمت أن الإيراد الكلى $R(x) = 80x$ والتكلفة الكلية $C(x) = 30x + 2000$ ومن ثم فإن الربح : $\pi(x) = R(x) - C(x) = 50x - 2000$ ويمكن إيجاد نقطة التعادل بأى من الطرق الثلاث التالية :

EXAMPLE 5. Given total revenue $R(x) = 80x$, total cost $C(x) = 30x + 2000$, then profit $\pi(x) = R(x) - C(x) = 50x - 2000$, and the break-even point can be found in any of the three following ways:

(a) بوضع $\pi = 0$ وإيجاد قيمة x

$$50x - 2000 = 0$$

$x = 40$ مستوى الناتج عند نقطة التعادل

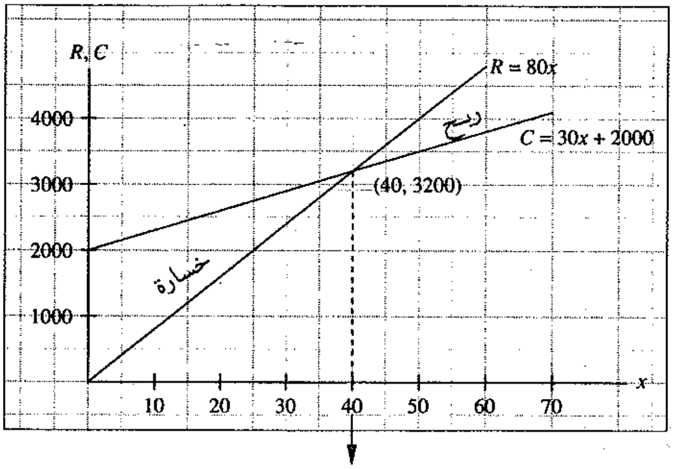
(b) بوضع $R(x) = C(x)$ وإيجاد قيمة x .

$$80x = 30x + 2000$$

$$50x = 2000$$

$x = 40$ مستوى الناتج عند نقطة التعادل

(c) بتمثيل $R(x)$ و $C(x)$ بيانيًا وإيجاد نقطة التقاطع كما فى الشكل (3–4) .



شكل (4-3)

لاحظ أنه إذا كانت $x < 40$ فإن $C(x) > R(x)$ ، وهذا يعنى خسارة . أما إذا كانت $x > 40$ فـإن $R(x) > C(x)$ وهذا يعنى وجود الربح . انظر أيضًا المسألة 4.6.

مثال 6 : افترض أن $R(x) = -3x^2 + 48x$ وأن $C(x) = 6x + 120$ ومن ثم فإن $\pi(x) = R(x) - C(x) = -3x^2 + 42x - 120$. ويمكن إيجاد نقطة التعادل كما فى المثال 5 . فى أى من الطرق التالية :

EXAMPLE 6. Assume $R(x) = -3x^2 + 48x$ and $C(x) = 6x + 120$, then $\pi(x) = R(x) - C(x) = -3x^2 + 42x - 120$ and the break-even point can be found as in Example 5 in any of the following ways.

(*a*) بوضع $\pi(x) = 0$ وبالقسمة على 3- ثم تحليل العوامل لإيجاد x .

$$-3x^2 + 42x - 120 = 0$$

$$x^2 - 14x + 40 = 0$$

$$(x - 4)(x - 10) = 0$$

مستويات الناتج عند نقطة التعادل $x = 4, \qquad x = 10$

(*b*) بوضع $R(x) = C(x)$ ثم تحليل العوامل كما فى (*a*) لإيجاد x

$$-3x^2 + 48x = 6x + 120$$

$$-3x^2 + 42x - 120 = 0$$

مستويات الناتج عند نقطة التعادل $x = 4, \qquad x = 10$

(*c*) بتمثيل $R(x) = C(x)$ وإيجاد نقاط التقاطع . واستخدام أساليب القسم 3.6 لرسم الدالة من الدرجة الثانية $R(x) = -3x^2 + 48x$.

1) حيث إن $a < 0$ فإن القطع المكافئ يفتح لأسفل .

2) $$x = \frac{-b}{2a} \qquad y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$x = \frac{-(48)}{2(-3)} = 8 \qquad y = \frac{4(-3)(0) - (48)^2}{4(-3)} = \frac{-2304}{-12} = 192$$

إحداثيات قمة الرأس : $(8, 192)$.

3) بوضع $R(x) = 0$ والتحليل لإيجاد الحدود القاطعة x .

$$-3x^2 + 48x = 0$$

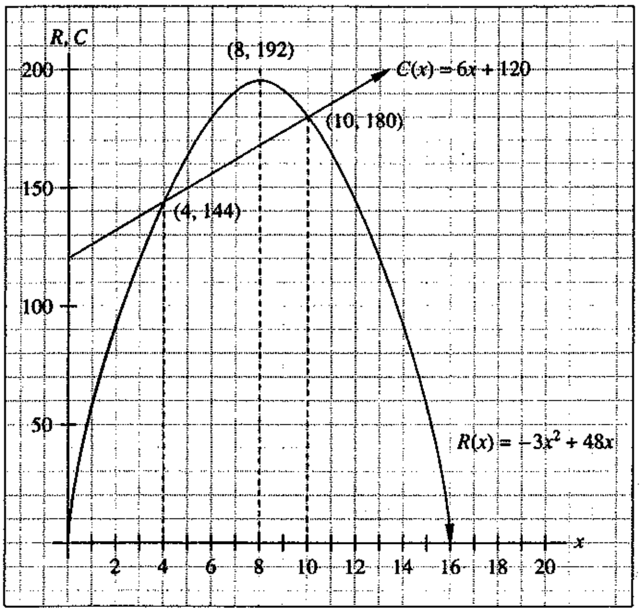
$$-3x(x - 16) = 0$$

$$-3x = 0 \qquad x - 16 = 0$$

$$x = 0 \qquad x = 16$$

إذًا الحدود القاطعة $(0, 0)$ ، $(16, 0)$. انظر الشكل (4–4) . ومن نقاط التقاطع فى الشكل (4–4) فإن نقاط التعادل هى $(4, 144)$ ، $(10, 180)$. ولاحظ أنه إذا كانت $x < 4$ فإن $C(x) > R(x)$ ولذلك توجد خسارة . أما إذا كانت $4 < x < 10$ فإن $R(x) > C(x)$ ومن ثم يوجد ربح . أما إذا كانت $x > 10$ توجد خسارة مرة ثانية .

انظر أيضًا المسألة (4.7) .



شكل (4–4)

4.5 طرق الحذف والتعويض Elimination and Substitution Methods

لإيجاد حل وحيد لنظام المعادلات فإن (1) المعادلات يجب أن تكون متسقة (غير متناقضة) . (2) وأن تكون مستقلة (ليست معادلات تمويلية مثل المعادلات المتعددة أو المربعة أو الجذور المربعة) . (3) وأن يكون عدد المعادلات مساويًا لعدد المتغيرات (النظام المقيد بالضبط) . وهناك وسيلتان معروفتان لحل مثل هذه النظام وهى (*a*) طريقة الحذف و (*b*) طريقة التعويض .

وطريقة الحذف تسمى بهذا الاسم لأن الإجراء يتطلب إزالة أو إنهاء متغير واحد لكى يبقى متغير وحيد يساوى ثابت . ولكى نستخدم طريقة الحذف لحل نظام (2×2) فى x ، y مثلاً نختار متغير واحد (وليكن x) ليزال من كلا المعادلتين ونحدد المقام المشترك أو المقام المشترك الأصغر . نضرب المعادلة الأولى فى معامل x الخاص بالمعادلة الثانية ، ثم نضرب المعادلة الثانية فى معامل x الخاص بالمعادلة الأولى ولذلك نحصل دائمًا على المقام المشترك وليس بالضرورة المقام المشترك الأصغر . ومعاملات x متماثلة فى قيمتها المطلقة ، ونحتاج فقط إلى جمع أو طرح المعادلتين لإنهاء x وإيجاد الحل لـ y . انظر مثال 7 (*a*) . ولحل نظام (3×3) انظر المسألة 4.14 .

وطريقة التعويض بنظام (2×2) فى x ، y تستلزم حل إحدى المعادلات بالنسبة لأحد المتغيرات بدلالة

الأخرى (وليكن y بدلالة x) ثم نعوض بالقيمة الموجدة الجديدة لهذا المتغير فى المعادلة الأخرى ونوجد قيمة x . انظر مثال 7 (b) .

EXAMPLE 7. The system of simultaneous equations

مثال 7 : نظام المعادلات الآتية :

$$2x + 5y = 52 \qquad (4.1)$$

$$3x - 4y = -14 \qquad (4.2)$$

وتحل أدناه بالطريقتين المختلفتين :

(a) طريقة الحذف

1) نختار حذف المتغير x ونضرب المعادلة (4.1) فى 3 والمعادلة (4.2) فى 2 .

$$3(2x + 5y = 52) = 6x + 15y = 156 \qquad (4.3)$$

$$2(3x - 4y = -14) = 6x - 8y = -28 \qquad (4.4)$$

2) نعوض بقيمة x من (4.5) فى المعادلة الأصلية الأخرى (4.2) .

$$23y = 184$$

$$y = 8$$

3) ثم نعوض $y = 8$ فى (4.1) أو (4.2) لإيجاد x .

$$2x + 5(8) = 52$$

$$x = 6$$

(b) طريقة التعويض

1) نحل إحدى المعادلات الأصلية لـ x أو y ، وهنا نحل (4.1) بالنسبة لـ x .

$$2x = 52 - 5y$$

$$x = 26 - 2.5y \qquad (4.5)$$

2) نعوض بقيمة x من (4.5) فى المعادلة الأصلية الأخرى (4.2) .

$$3(26 - 2.5y) - 4y = -14$$

$$78 - 7.5y - 4y = -14$$

$$-11.5y = -92$$

$$y = 8$$

3) ثم نعوض $y = 8$ فى (4.1) أو (4.2) . ولتكن هنا (4.2)

$$3x - 4(8) = -14$$

$$x = 6$$

انظر أيضًا المسائل 4.8 إلى 4.13 . ولحل نظام (3×3) انظر المسألة 4.14 . هناك ما زالت طرق أخرى توجد فى فصول الجبر الخطى . انظر القسم 5.10 (طريقة حذف جاوس ـ Gaussian Elimination Method) والقسم 6.3 (قاعدة كرامر ـ Gramer's Rule) والقسم 6.6 (معكوس المصفوفة ـ Matrix Inversion) .

4.6 نماذج تحديد الدخل Income Determination Models

نماذج تحديد الدخل بشكل عام تعبر عن مستوى توازن الدخل فى اقتصاد ذى أربعة قطاعات مثل :

$$Y = C + I + G + (X - Z)$$

حيث : الدخل = y ، الاستهلاك = C ، الاستثمار = I ، الإنفاق الحكومى = G ، الصادرات = x ، والواردات = Z وبالتعويض بالمعلومات المتوفرة فى النموذج ، يصبح إيجاد مستوى توازن الدخل من الأمور السهلة . وتجميع المتغيرات على الطرف الأيمن من المعادلة يسمح أيضًا للمعادلة بأن تمثل بيانيًا فى بعدين . انظر المثال 8 والمسائل 4.15 إلى 4.20 .

مثال 8 : افترض نموذج اقتصادى ذا قطاعين حيث $y = C + I$ ، $C = C_0 + bY$ وأن $I = I_0$. وافترض أيضًا $C_0 = 95$، $b = 0.8$ ، $I_0 = 75$. ومستوى توازن الدخل يحسب بدلالة (a) المعاملات العامة و (b) بالقيم الخاصة المحددة لتلك المعاملات .

EXAMPLE 8. Assume a simple two-sector economic model in which $Y = C + I$, $C = C_0 + bY$, and $I = I_0$. Assume further that $C_0 = 95$, $b = 0.8$, and $I_0 = 75$. The equilibrium level of income can be calculated in terms of (*a*) the general parameters and (*b*) the specific values assigned to these parameters.

(a) معادلة التوازن

$$Y = C + I$$

بالتعويض عن C ، I

$$Y = C_0 + bY + I_0$$

وإيجاد قيمة y

$$Y - bY = C_0 + I_0$$

$$(1 - b)Y = C_0 + I_0$$

$$Y = \frac{1}{1 - b}(C_0 + I_0) = Y_e$$

والحل بهذه الصيغة يسمى صيغة الاختزال . ومعادلة صيغة الاختزال تعبر عن المتغير الداخلى أو المتغير التابع (وهنا y) كدالة صريحة للمتغيرات الخارجية أو المستقلة (C_0, I_0) والمعاملات (b) . والدالة الصريحة هى الدالة التى يكون المتغير الداخلى فيها بمفرده على الطرف الأيسر من المعادلة وكل المتغيرات الخارجية والمعاملات على الطرف الأيمن .

(b) يمكن أن يحسب مستوى التوازن الخاص للدخل عن طريق التعويض بالقيم العددية للمعاملات إما (1) فى المعادلة الأصلية أو (2) فى معادلة صيغة الاختزال .

(1)

$$Y = C_0 + bY + I_0$$

$$Y = 95 + 0.8Y + 75$$

$$Y - 0.8Y = 170$$

$$0.2Y = 170$$

$$Y_e = 850$$

(2)

$$Y = \frac{1}{1 - b}(C_0 + I_0)$$

$$Y = \frac{1}{1 - 0.8}(95 + 75)$$

$$Y = \frac{1}{0.2}(170)$$

$$Y = 5(170)$$

$$Y_e = 850$$

يسمى الحد $1/(1-b)$ مضاعف الإنفاق التلقائى فى الإقتصاد (Autonomous-Expenditure Multiplier) ويقيس الأثر المضاعف للإنفاق التلقائى لكل درجة على مستوى توازن الدخل وبما أن b تساوى الميل الحدى للاستهلاك (MPC) فى نموذج تحديد الدخل ، فإن المضاعف يساوى $1/(1-\text{MPC})$. انظر المسائل 4.15 إلى 4.20 .

4.7 تحليل IS-LM   IS-LM Analysis

جدول IS هو المحل الهندسى للنقاط التى تمثل جميع التوليفات المختلفة لمعدلات الفائدة ومستويات الدخل المتسقة مع التوازن فى سوق السلع . وجدول LM هو المحل الهندسى للنقاط التى تمثل جميع التوليفات المختلفة لمعدلات الفائدة ومستويات الدخل المتسقة مع التوازن فى سوق النقود . وتحليل IS-LM يبحث فى إيجاد مستوى الدخل ومعدل الفائدة عندما يكون كل من سوق السلع وسوق النقود فى حالة توازن . وهذا يتلائم مع الأساليب المستخدمة فى حل نظام المعادلات الآنية . وبخلاف نموذج تحديد الدخل فى القسم 4.6 فإن تحليل IS-LM يتعامل صراحة مع معدل الفائدة ويندمج أثره فى النموذج . انظر المثال 9 والمسائل 4.21 إلى 4.24 .

مثال 9 : يكون سوق السلع لاقتصاد بسيط ذى قطاعين فى حالة توازن عندما $y = C + I$ وسوق النقود يكون فى حالة توازن عندما يساوى عرض النقود M_s الطلب على النقود M_d والذى بدوره يتكون من الطلب على النقود لأغراض المبادلات والطوارئ M_t والطلب على النقود لأغراض المضاربة M_w وافترض اقتصاد ذى قطاعين حيث أن $C = 34 + 0.9Y$ ، $I = 41 - 80i$ ، $M_s = 325$ ، $M_t = 0.4Y$ ، $M_w = 65 - 124i$.

EXAMPLE 9. The commodity market for a simple two-sector economy is in equilibrium when $Y = C + I$. The money market is in equilibrium when the supply of money M_s equals the demand for money M_d, which in turn is composed of the *transaction-precautionary demand* for money M_t and the *speculative demand* for money M_w. Assume a two-sector economy where $C = 34 + 0.9Y$, $I = 41 - 80i$, $M_s = 325$, $M_t = 0.4Y$, and $M_w = 65 - 124i$.

يتحقق التوازن فى سوق السلع (IS) عندما $y = C + I$. وبالتعويض بالقيم المعطاة فى المعادلة .

$$Y = 34 + 0.9Y + 41 - 80i$$

$$Y - 0.9Y = 75 - 80i$$

$$0.1Y + 80i - 75 = 0 \tag{4.6}$$

ويتحقق التوازن فى سوق النقود (LM) عندما $M_s = M_t + M_w$. بالقيم المعطاة فى المعادلة .

$$325 = 0.4Y + 65 - 124i$$

$$0.4Y - 124i - 260 = 0 \tag{4.7}$$

ويتحقق التوازن الآنى فى كلا السوقين عن طريق حل (4.6) و (4.7) آنيًا :

$$0.1Y + 80i - 75 = 0 \qquad (4.6)$$

$$0.4Y - 124i - 260 = 0 \qquad (4.7)$$

وباستخدام طريقة الحذف من القسم 4.5 وتبسيط الإجراء عن طريق ضرب المعادلة (4.6) فى 4– لنحصل على (4.8) ثم نقوم بعملية الجمع لحذف y وإيجاد قيمة i . ونحصل على .

$$\begin{array}{r} -0.4Y - 320i + 300 = 0 \\ 0.4Y - 124i - 260 = 0 \\ \hline -444i + 40 = 0 \end{array} \qquad (4.8)$$

$$i = \frac{-40}{-444} \approx 0.09 = 9\% = i_e$$

وبالتعويض عن $i = 0.09$ فى (4.6) أو (4.7) لإيجاد Y .

$$0.1Y + 80(0.09) - 75 = 0$$

$$0.1Y = 67.8$$

$$Y_e = 678$$

سوف تكون أسواق السلع والنقود فى حالة توازن آنى عندما $y = 678$ و $i = 0.09$. وعند هذه النقطة $C = 34 + 0.9(678) = 644.2$ ، $I = 41 - 80(0.09) = 33.8$ ، $M_t = 0.4(678) = 271.2$ ، $M_w = 65 - 124(0.09) = 53.8$.

وبالتحقق من الحل : $y = C + I = 644.2 + 33.8 = 678$ ، و $M_d = M_t + M_w = 271.2 + 53.8 = 325 = M_s$.

4.8 النمذجة الرياضية والاقتصادية (اختيارى)

Economic and Mathematical Modeling (Optional)

يختلف النموذج الاقتصادى عن النموذج الرياضى بأسلوب ما فى أوقات محيرة . افترض أن نظام المعادلات الخطية للعرض والطلب التالى عرض فى الصيغة .

$$\text{العرض} : 6P - 3Q = 36 \qquad (4.9a)$$

$$\text{الطلب} : 8P + 2Q = 192 \qquad (4.9b)$$

فى الاقتصاد ، حيث نعامل السعر على أساس أنه متغير تابع طبقًا لتقاليد الاقتصادى الإنجليزى الفريد مارشال ، فإن صيغ الميل-الحد القاطع للمعادلات توجد من خلال حل كل معادلة لـ P بدلالة Q أى جعل P دالة فى Q .

$$\text{العرض} : P = \tfrac{1}{2}Q + 6 \qquad (4.10a)$$

$$\text{الطلب} : P = -\tfrac{1}{4}Q + 24 \qquad (4.10b)$$

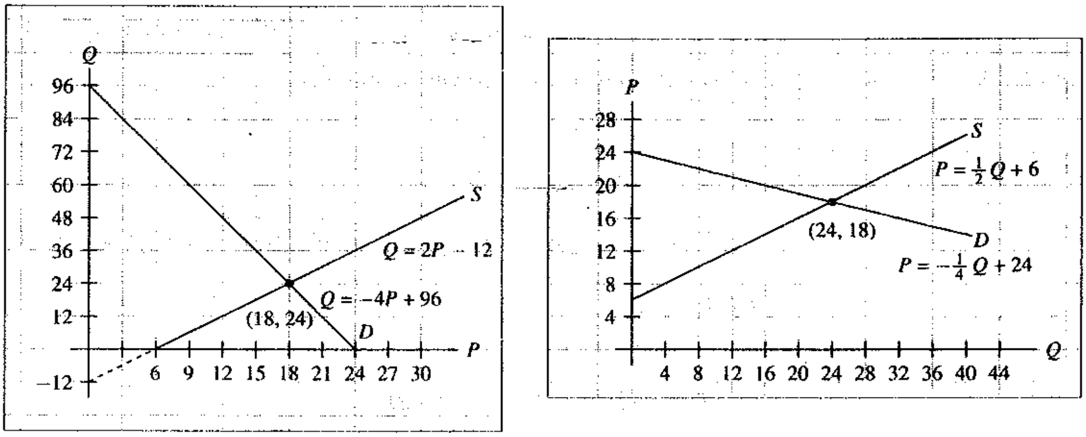
فى النماذج الرياضية ، حيث نعتبر Q متغير تابع كما درسه فى الأصل الاقتصادى الفرنسى ليون والراس ، فإن صيغ ميل الحد القاطع للمعادلات توجد من خلال حل كل معادلة لـ Q بدلالة P ، أى جعل Q فى P .

$$\text{العرض} : Q = 2P - 12 \qquad (4.11a)$$

$$\text{الطلب} : Q = -4P + 96 \qquad (4.11b)$$

وعند التمثيل بيانيًا فإن المتغيرات التابعة المختلفة تقاس على المحور y . وقد يحدث ارتباك لأول وهلة ولكن هذا فقط موقع الرسوم البيانية ولا يؤثر على الحلول . انظر الشكل (4-5) .

بينما أغلب الاقتصاديين اليوم يفكرون مثل "والراس" ويتفقون بأن السعر يحدد الكمية المطلوبة والكمية المعروضة ، ويواصلون التمثيل البيانى مثل مارشال حيث يضعون Q على المحور الأفقى و P على المحور الرأسى . وهذا يتضمن أن الكمية المعروضة والكمية المطلوبة تحدد السعر .



(a)

(b)

شكل (4–5)

4.9 الدوال الضمنية والدوال العكسية (اختيارى)

Implicit Functions and Inverse Functions (Optional)

اعتبر صيغة بديلة لمعادلة العرض (*4.9a*) :

$$6P - 3Q - 36 = 0 \tag{4.12}$$

تتضمن المعادلة علاقة بين P و Q ولكن لا تحدد أى متغير يعتمد على الآخر . ونعيد كتابة المعادلة مثل :

$$f(P, Q) = 6P - 3Q - 36 = 0 \tag{4.13}$$

ويرمز لها بالدالة الضمنية لأن كل من المتغيرين على جانب واحد من علامة التساوى وأنها توحى بتبعية ممكنة بين المتغيرات ولكن لا تحدد بشكل خاص طبيعة التبعية . فإذا تمكنا من حل الدالة الضمنية جبريًا لأحد المتغيرات بدلالة الآخر مثلما الحال فى (*4.10a*) أو (*4.11a*) فإنه يمكن إعادة كتابتها كدالة صريحة .

$$P = g(Q) = \tfrac{1}{2}Q + 6 \tag{4.14}$$

$$Q = h(P) = 2P - 12 \tag{4.15}$$

والدالة الصريحة يكون متغيرها التابع على الجانب الأيسر من علامة التساوى والمتغير المستقل على الجانب الأيمن ولذلك يظهر بشكل واضح نظام وطبيعة التبعية .

وعندما تكون الدالة ضمنية مثل (*4.13*) فإنه يمكن تحويلها إلى دالتين صريحتين مختلفتين مثل (*4.14*) و(*4.15*) والدوال الصريحة تسمى دوال عكسية لبعضها البعض . والدوال العكسية مهمة بسبب الطرق المختلفة للاقتصاديين والرياضيين للتعامل مع تحليل العرض والطلب . بينما أغلب الدوال التى تواجهنا فى مبادئ الاقتصاد لها دوال عكسية وليست كل الدوال فإن الدالة العكسية تكتب ـ إذا أعطيت الدالة $y = f(x)$ فإن الدالة العكسية $x = f^{-1}(y)$ توجد إذا كانت فقط لكل قيمة من y قيمة واحدة من x . ومن وجهة النظر العملية إذا رغبنا فى إيجاد معكوس الدالة الاقتصادية العادية فإنه يجب حل المعادلة المعطاة جبريًا بالنسبة للمتغير المستقل بدلالة المتغير التابع مثل الموضح بالمثال 10 .

مثال 10 : الدوال (*4.14*) و (*4.15*) دوال عكسية لبعضها البعض

EXAMPLE 10. The functions (*4.14*) and (*4.15*) are inverse functions of each other:

$$g(Q) = h^{-1}(Q) \tag{4.16}$$

$$h(P) = g^{-1}(P) \tag{4.17}$$

العلاقة العكسية فى (*4.16*) يمكن اختبارها بحل (*4.15*) جبريًا لـ P بدلالة Q .

$$h(P): \quad Q = 2P - 12$$

$$-2P = -Q - 12$$

$$P = \tfrac{1}{2}Q + 6 = h^{-1}(Q) = g(Q)$$

وبالمثل العلاقة العكسية فى (*4.17*) يمكن اختبارها بحل (*4.14*) جبريًا لـ Q بدلالة P .

$$g(Q): \quad P = \tfrac{1}{2}Q + 6$$

$$-\tfrac{1}{2}Q = -P + 6$$

$$Q = 2P - 12 = g^{-1}(P) = h(P)$$

مسائل محلولة

Systems of Equations نظم المعادلات

4.1. بين أبعاد كل من نظم المعادلات التالية ، حدد ما إذا كان النظام مقيد بالضبط أو تحت المقيد أو فوق المقيد .

4.1. Give the dimensions of each of the following systems of equations and indicate whether the system is exactly constrained, underconstrained, or overconstrained.

(*a*) $y = 4x_1 - 7x_2 - 6x_3$, $y = 9x_1 + 8x_2 - 4x_3$, $y = 7x_1 - 3x_2 + 2x_3$

(*b*) $5x + 2y - 8z = 42$, $9x - 7y + 4z = 37$, $6x - 3y - 5z = -9$

(*c*) $2x + 5y = 9$, $7x - 4y = 2$, $3x + 8y = 7$

(*a*) حيث يوجد ثلاث معادلات (n) وأربعة متغيرات (v) ـ x_1 ، x_2 ، x_3 ، y فإن النظام (4×3) وحيث إن $v > n$ فالنظام تحت المقيد .

(*b*) طالما يوجد ثلاث معادلات (n) وثلاثة متغيرات (v) فإن النظام (3×3) وحيث إن $v = n$ فالنظام مقيد بالضبط .

(*c*) مع $n = 3$ و $v = 2$ فالنظام (2×3) ولأن $v < n$ فالنظام فوق المقيد .

4.2. حدد ما نوع الحلول الممكنة للنظم المختلفة للمعادلات فى المسألة 4.1 :

4.2. Indicate what types of solutions are possible for the different systems of equations in Problem 4.1.

(*a*) النظام تحت المقيد له عدد غير محدد من الحلول الممكنة أو ليس لـه حـل ، ولكنـه ليس لـه حـل وحيد لعدم كفاية المعادلات .

(*b*) النظام المقيد بالضبط له حل وحيد أو حلول متعددة أو ليس له حل . فالنظام سوف يكون له حلـول متعددة إذا كانت معادلتان أو أكثر معادلات تابعة أو معادلات متكافئة . والنظـام ليـس لـه حـل إذا كانت معادلتان أو أكثر غير متسقة .

(*c*) النظام فوق المقيد له حل وحيد أو حلول متعددة أو ليس له حل . وإنه عمليًا ليس له حل إذا كانت المعادلات غير تابعة وغير متسقة .

الحلول البيانية Graphical Solutions

4.3. حل المعادلات التالية جبريًا (1) بإيجاد صيغ الميل-الحد القاطع و (2) والتمثيل بيانيًا :

4.3. Solve each of the following systems of equations graphically by (1) finding the slope-intercept forms and (2) graphing:

(*a*) $12x + 3y = 21 \qquad -2x + 4y = -8$

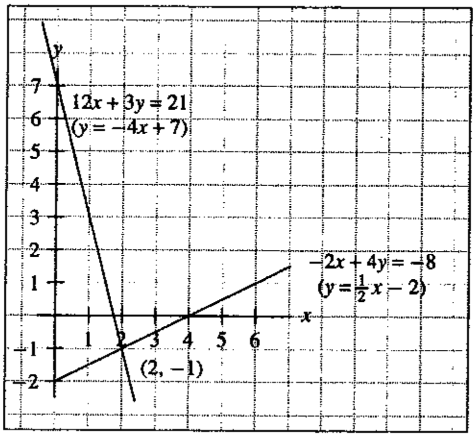
(1) بإيجاد صيغ الميل-الحد القاطع وذلك بحل المعادلة لـ y بدلالة x :

$$12x + 3y = 21 \qquad -2x + 4y = -8$$

$$y = -4x + 7 \qquad y = \tfrac{1}{2}x - 2$$

(2) انظر الشكل (4–6) .

وكما ترى من نقطة التقاطع فى الشكل (4–6) ،
فالحل : $x = 2$ ، $y = -1$.



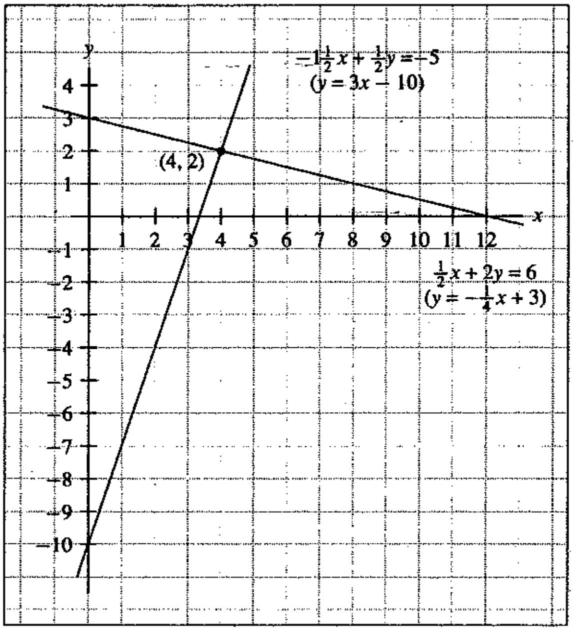
شكل (4–6)

(*b*) $\tfrac{1}{2}x + 2y = 6 \qquad -1\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y = -5$

(1) $y = -\tfrac{1}{4}x + 3 \qquad y = 3x - 10$

(2) انظر الشكل (4–7)

وكما ترى فى الشكل (4–7) فالحل : $x = 4$ ، $y = 2$.



شكل (4–7)

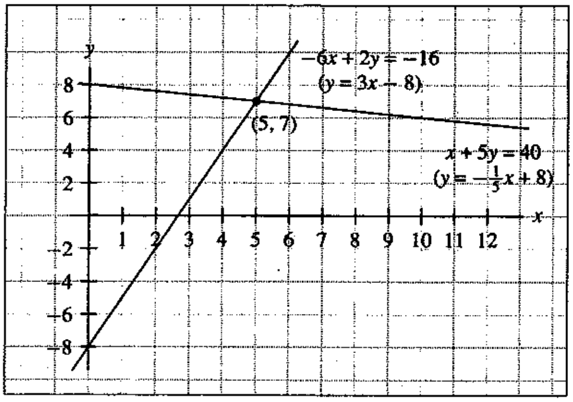
(*c*) $-6x + 2y = -16$ $\qquad x + 5y = 40$

(1) $y = 3x - 8$ $\qquad y = -\frac{1}{5}x + 8$

(2) انظر الشكل (4–8)

وكما ترى فى الشكل (4–8)

فالحل : $x = 5$ ، $y = 7$.



شكل (4–8)

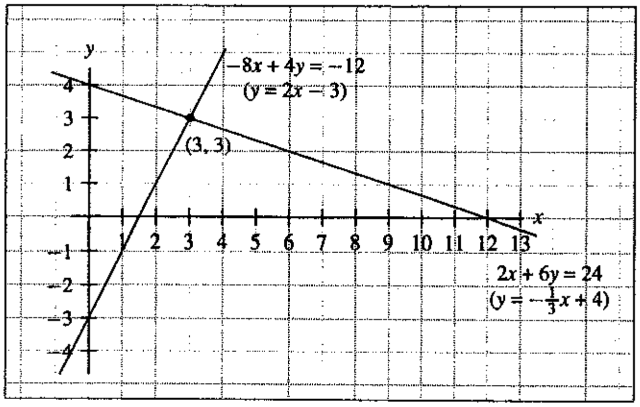
(*d*) $-8x + 4y = -12$ $\qquad 2x + 6y = 24$

(1) $y = 2x - 3$ $\qquad y = -\frac{1}{3}x + 4$

(2) انظر الشكل (4–9)

وكما ترى فى الشكل (4–9)

فالحل : $x = 3$ ، $y = 3$.



شكل (4–9)

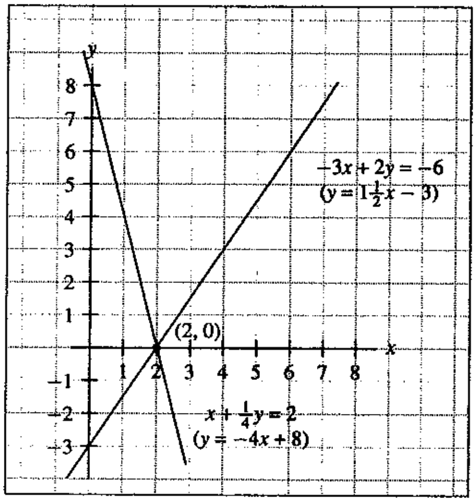
(e) $-3x+2y=-6$ $\qquad$ $x+\frac{1}{4}y=2$

(1) $y=1\frac{1}{2}x-3$ $\qquad$ $y=-4x+8$

(2) انظر الشكل (4–10)

وكما ترى فى الشكل (4–10)

فالحل : $x=2$ ، $y=0$.



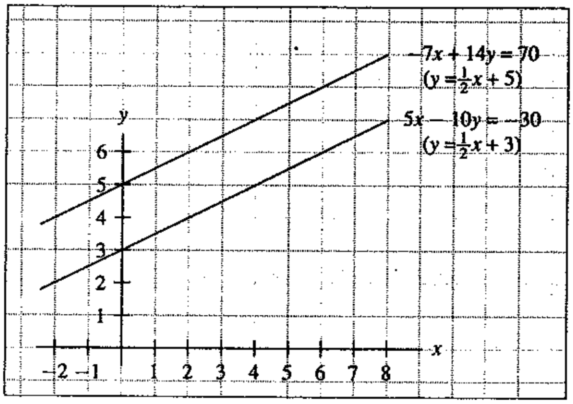
شكل (4–10)

(f) $5x-10y=-30$ $\qquad$ $-7x+14y=70$

(1) $y=\frac{1}{2}x+3$ $\qquad$ $y=\frac{1}{2}x+5$

(2) انظر الشكل (4–11)

وكما ترى فى الشكل (4–11) لا توجد نقطة تقاطع ومن ثم لا يوجد حل . والمعادلات غير متسقة لأنه بمفهوم القسم 4.2 : $m_1 = m_2$ ولكن $b_1 \neq b_2$. والمعادلات غير المتسقة تمثل بيانيًا كخطوط متوازية .



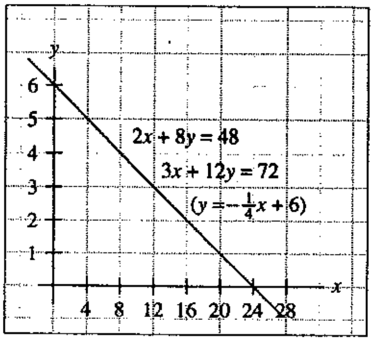
شكل (4–11)

(g) $2x+8y=48$ $\qquad$ $3x+12y=72$

(1) $y=-\frac{1}{4}x+6$ $\qquad$ $y=-\frac{1}{4}x+6$

(2) انظر الشكل (4–12)

وكما ترى فى الشكل (4–12) يوجد عدد لانهائى من الحلول ولا يوجد حل وحيد لأن المعادلتين تابعتان أو متكافئتان . وبمفهوم القسم 4.2 : $m_1 = m_2$ ، $b_1 \neq b_2$. وحيث إن المعادلتين متكافئتان فيوجد فقط معادلة مستقلة واحدة والنظام يكون تحت المقيد .



شكل (4–12)

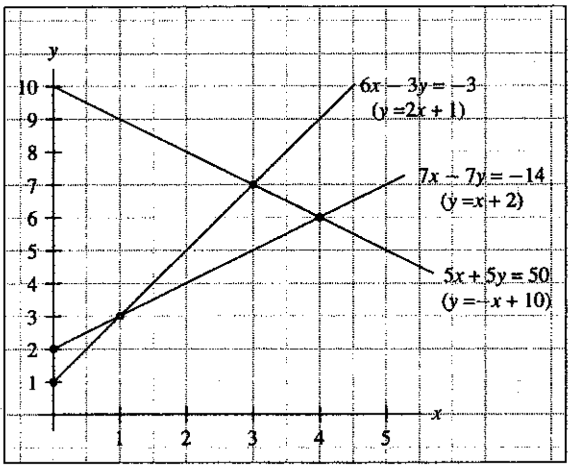
والنظام تحت المقيد له حلول متعددة أو ليس له حل وليس له حل وحيد .

$(h)\quad 6x - 3y = -3 \qquad 7x - 7y = -14 \qquad 5x + 5y = 50$

$(1)\quad y = 2x + 1 \qquad y = x + 2 \qquad y = -x + 10$

(2) انظر شكل 4–13 .

وكما ترى فى الشكل (4–13) لا يوجد حل وحيد لأنه لا توجد نقطة واحدة تتقاطع عندها الرسوم البيانية فى آن واحد . والنظام فوق المقيد $n > v$ ليس له حل وحيد .



شكل (4–13)

العرض والطلب Supply and demand

4.4. حدد سعر التوازن P_e وكمية التوازن Q_e للأسواق التالية مستخدمًا (1) المعادلات (2) الرسوم البيانية .

4.4. Find the equilibrium price P_e and quantity Q_e for each of the following markets using (1) equations and (2) graphs:

(a) العرض : $P = 3Q + 10$

الطلب : $P = -\frac{1}{2}Q + 80$

(1) بوضع $P_s = P_d$ عند التوازن وإيجاد قيمة Q .

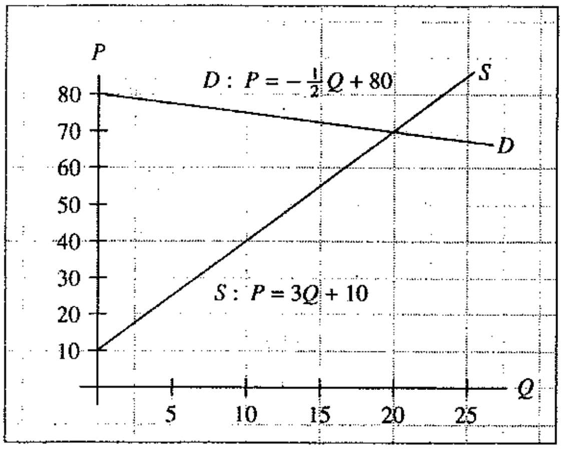
$$3Q + 10 = -\tfrac{1}{2}Q + 80$$
$$3\tfrac{1}{2}Q = 70$$
$$Q = 20 = Q_e$$

وبالتعويض عن قيمة $Q = 20$ فى معادلة العرض أو الطلب .

$P = 3(20) + 10$

$P = 70 = P_e$

(2) انظر الشكل 4–14 .



شكل (4–14)

(b) العرض : $P = \frac{1}{4}Q + 200$

الطلب : $P = -\frac{1}{2}Q + 800$

(1) $\frac{1}{4}Q + 200 = -\frac{1}{2}Q + 800$

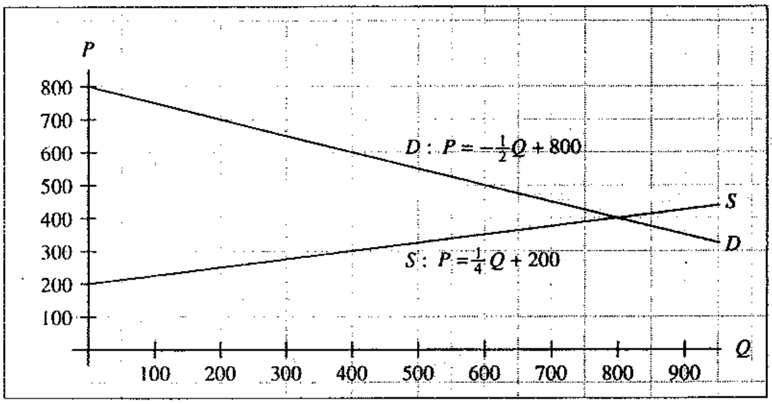
$$\frac{3}{4}Q = 600$$

$$Q = 800 = Q_e$$

بالتعويض عن $Q_e = 800$ فى معادلة الطلب أو العرض .

$$P = \frac{1}{4}(800) + 200 = 400 = P_e$$

(2) انظر الشكل (4–15) .



شكل (4–15)

4.5. أوجد سعر التوازن وكمية التوازن للنماذج الرياضية التالية للعرض والطلب ، مستخدمًا (1) المعادلات و(2) الرسوم البيانية .

4.5. Find the equilibrium price and quantity for the following mathematical models of supply and demand, using (1) equations and (2) graphs.

(a) العرض : $Q = 5P + 10$

الطلب : $Q = -3P + 50$

(1) بوضع $Q_s = Q_d$ للتوازن وإيجاد قيمة P

$$5P + 10 = -3P + 50$$

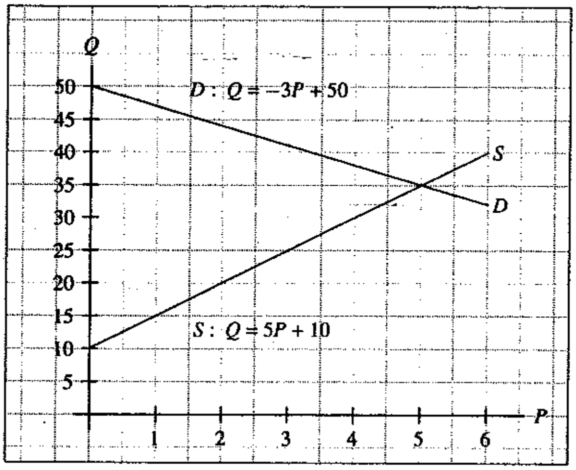
$$8P = 40$$

$$P = 5 = P_e$$

وبالتعويض عن قيمة $P_e = 5$ فى معادلة العرض أو الطلب :

$$Q = 5(5) + 10 = 35 = Q_e$$

(2) انظر شكل (4–16) . ولاحظ أن Q وضعت على المحور y .



شكل (4–16)

(b) العرض : $Q = \frac{2}{3}P + 150$

الطلب : $Q = -\frac{1}{3}P + 450$

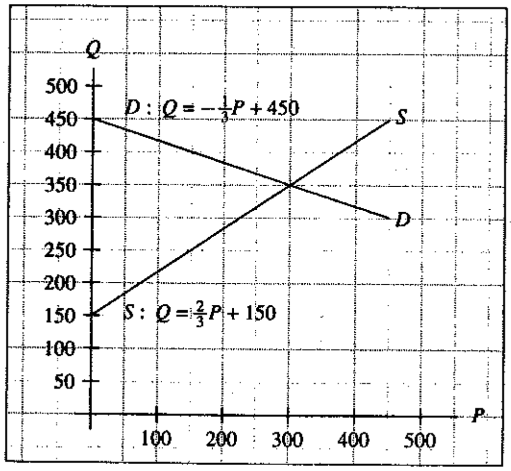
(1) $\frac{2}{3}P + 150 = -\frac{1}{3}P + 450$

$$P = 300 = P_e$$

بالتعويض عن $P_e = 300$ فى معادلة الطلب أو العرض .

$$Q = \frac{2}{3}(300) + 150 = 350 = Q_e$$

(2) انظر الشكل (4–7) .



شكل (4–17)

تحليل نقطة التعادل Break-even Analysis

4.6 أوجد نقطة التعادل للمنشآت ذات الدوال الخطية للإيراد الكلى $R(x)$ والتكلفة الكليـة $C(x)$ التاليـة عـن طريق (1) إيجاد دالة الربح $\pi(x)$ بوضعها مساوية للصفر والحل لـ x و (2) بوضع $R(x) = C(x)$ والحـل لـ x و (3) تمثيل $R(x)$ و $C(x)$ بيانيًا وإيجاد نقطة التقاطع .

4.6. Find the break-even point for the firms with the following linear total revenue $R(x)$ and total cost $C(x)$ functions by (1) finding the profit $\pi(x)$ function, setting it equal to zero, and solving for x, (2) setting $R(x) = C(x)$ and solving for x, and (3) graphing $R(x)$ and $C(x)$ and finding the point of intersection.

(*a*) $R(x) = 55x$

$C(x) = 30x + 250$

(1) إيجاد دالة الربح $\pi(x)$.

$$\pi(x) = R(x) - C(x) = 55x - (30x + 250) = 25x - 250$$

وبوضعها مساوية للصفر والحل لـ x .

$$25x - 250 = 0$$

مستوى ناتج نقطة التعادل $x = 10$

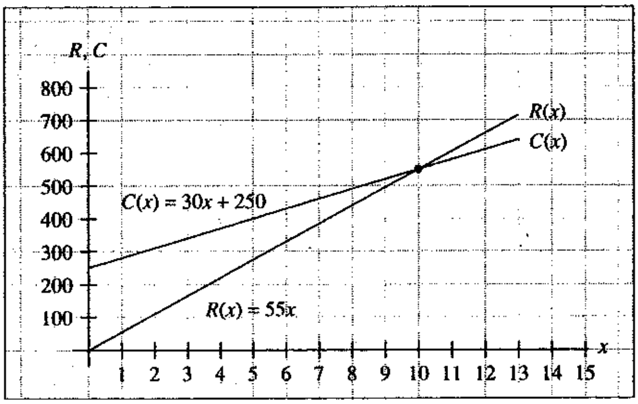
(2) بوضع $R(x) = C(x)$ والحل لـ x

$$55x = 30x + 250$$

$$25x = 250$$

مستوى ناتج نقطة التعادل $x = 10$

(3) انظر الشكل (4–18) .



شكل (4–18)

(*b*) $R(x) = 50x$

$C(x) = 35x + 90$

(1) بوضع $\pi(x) = 0$ والحل لـ x

$$\pi(x) = 50x - (35x + 90) = 0$$

$$15x - 90 = 0$$

مستوى ناتج نقطة التعادل $x = 6$

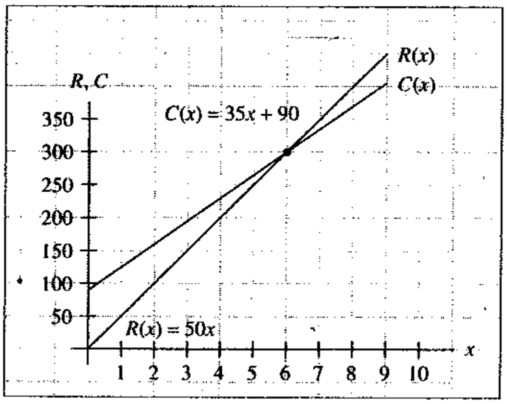
(2) بوضع $R(x) = C(x)$ والحل لـ x

$$50x = 35x + 90$$

$$15x = 90$$

مستوى ناتج نقطة التعادل $x = 6$

(3) انظر الشكل (19–4) .



شكل (19–4)

4.7. أوجد نقطة التعادل للمنشآت ذات الدوال من الدرجة الثانية للإيـراد الكلـى $R(x)$ التاليـة عـن طريـق (1) إيجاد دالة الربح $\pi(x)$ وذلك بوضع دالة الربح مساوية للضوء وإيجاد قيمة x و (2) بوضع $R(x) = C(x)$ وإيجاد قيم x و (2) و (3) تمثيل $R(x)$ و$C(x)$ بيانيًا وتحديد نقطة التقاطع .

4.7. Find the break-even point for the firms with the following quadratic total revenue $R(x)$ functions by (1) finding the profit $\pi(x)$ function, setting it equal to zero, and solving for the x's; (2) setting $R(x) = C(x)$ and solving for the x's; and (3) graphing $R(x)$ and $C(x)$ and finding the point of intersection.

(*a*) $R(x) = -4x^2 + 72x \qquad C(x) = 16x + 180$

(1) $\pi(x) = -4x^2 + 72x - (16x + 180) = -4x^2 + 56x - 180$

وبوضع $\pi(x) = 0$ والتحليل

$$-4x^2 + 56x - 180 = 0$$

$$-4(x^2 - 14x + 45) = 0$$

$$(x - 5)(x - 9) = 0$$

مستويات ناتج نقطة التعادل $x = 5 \quad x = 9$

(2) بوضع $R(x) = C(x)$

$$-4x^2 + 72x = 16x + 180$$

$$-4x^2 + 56x - 180 = 0$$

وبالتحليل كما فى (1) .

مستويات ناتج نقطة التعادل $x = 5 \quad x = 9$

(3) وباستخدام أسلوب القسم 3.6 لرسم الدالة من الدرجة الثانية $R(x) = -4x^2 + 72x$

(i) حيث $a = -4 < 0$ فإن القطع المكافئ يفتح لأسفل .

(ii) $x = \frac{-b}{2a}$ $\qquad$ $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$

$$x = \frac{-(72)}{2(-4)} = 9 \qquad y = \frac{4(-4)(0) - (72)^2}{4(-4)} = \frac{-5184}{-16} = 324$$

قمة الرأس : (9, 324)

(iii) بوضع $R(x) = 0$ والتحليل لإيجاد الحدود القاطعة لـ x

$$-4x^2 + 72x = 0$$

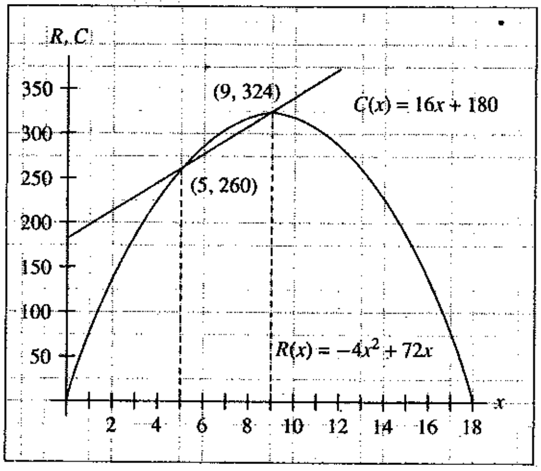
$$-4x(x - 18) = 0$$

$$-4x = 0 \qquad x - 18 = 0$$

$$x = 0 \qquad x = 18$$

إذًا الحدود القاطعة لـ x : (0, 0) ، (18, 0) .

انظر الشكل (4-20) للرسم البيـانى لـ $R(x)$ و$C(x)$ ونقاط التقاطع .



شكل (4–20)

(b) $R(x) = -5x^2 + 750x \quad C(x) = 100x + 20{,}000$

(1) بوضع $\pi = 0$ وتحليل العوامل

$$\pi = -5x^2 + 650x - 20{,}000 = 0$$

$$-5(x^2 - 130x + 4000) = 0$$

$$(x - 50)(x - 80) = 0$$

مستويات ناتج نقطة التعادل $\quad x = 80 \quad x = 50$

(2) بوضع $R(x) = C(x)$

$$-5x^2 + 750x = 100x + 20{,}000$$

وتحليل العوامل كما فى (1) .

مستويات ناتج نقطة التعادل $\quad x = 80 \quad x = 50$

(3) وتمثيل الدالة $R(x) = -5x^2 + 750x$.

(i) حيث إن $a = -5 < 0$ فالقطع المكافئ يفتح لأسفل .

(ii) $x = \frac{-(750)}{2(-5)} = 75 \qquad y = \frac{4(-5)(0) - (750)^2}{4(-5)} = \frac{-562,500}{-20} = 28,125$

قمة الرأس : (75, 28,125)

(iii) بوضع $R(x) = 0$ والتحليل لإيجاد الحدود القاطعة لـ x

$$-5x^2 + 750x = 0$$

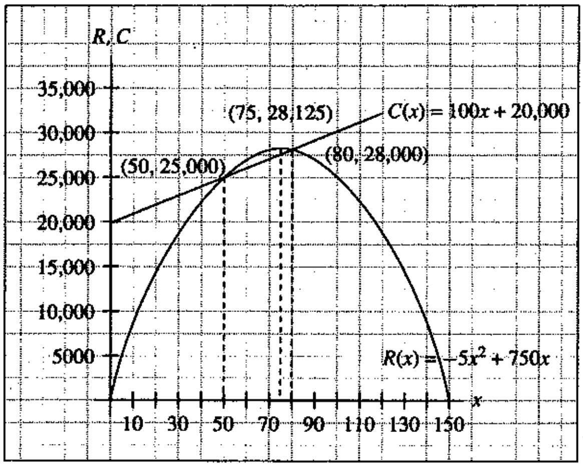
$$-5x(x - 150) = 0$$

$$-5x = 0 \qquad x - 150 = 0$$

$$x = 0 \qquad x = 150$$

إذًا الحدود القاطعة x : (0, 0) ، (150, 0)

انظر الشكل (21–4) .



شكل (21–4)

Elimination and Substitution Methods طرق الحذف والتعويض

4.8. حل نظم المعادلات الآنية التالية مستخدمًا طريقة الحذف .

4.8. Solve the following systems of simultaneous equations, using the elimination method.

(*a*)

$$3x + 4y = 37 \tag{4.18}$$

$$8x + 5y = 76 \tag{4.19}$$

بضرب المعادلة (4.18) فى 8 والمعادلة (4.19) فى 3 ولكى يحذف x

$$24x + 32y = 296 \tag{4.20}$$

$$24x + 15y = 228 \tag{4.21}$$

وبطرح (4.21) من (4.20) لحذف x

$$17y = 68$$

$$y = 4$$

وبالتعويض بـ $y = 4$ فى المعادلة (4.18) أو (4.19) لإيجاد x

$$3x + 4(4) = 37$$

$$x = 7$$

(*b*)

$$5x + 2y = 46 \tag{4.22}$$

$$9x - 7y = -2 \tag{4.23}$$

وهنا نفضل حذف y وذلك بضرب المعادلة (4.22) فى 7 والمعادلة (4.23) فى 2 .

$$35x + 14y = 322 \tag{4.24}$$

$$18x - 14y = -4 \tag{4.25}$$

ثم نجمع (4.24) و (4.25) لحذف y .

$$53x = 318$$

$$x = 6$$

وبالتعويض بقيمة $x = 6$ فى المعادلة (4.22) أو المعادلة (4.23) .

$$5(6) + 2y = 46$$

$$y = 8$$

4.9. حل نظم المعادلات الآنية التالية مستخدمًا طريقة التعويض .

4.9. Solve the following systems of simultaneous equations, using the substitution method.

(*a*)

$$12x - 7y = 106 \tag{4.26}$$

$$8x + y = 82 \tag{4.27}$$

ويحل المعادلة (4.27) لـ y

$$y = 82 - 8x \tag{4.28}$$

وبالتعويض بقيمة y من المعادلة (4.28) فى المعادلة الأخرى (4.26) .

$$12x - 7(82 - 8x) = 106$$

$$12x - 574 + 56x = 106$$

$$x = 10$$

وبالتعويض بقيمة $x = 10$ فى المعادلة (4.26) أو (4.27) .

$$12(10) - 7y = 106$$

$$y = 2$$

(*b*)

$$5x + 24y = 100 \tag{4.29}$$

$$7x - 15y = -103 \tag{4.30}$$

ويحل المعادلة (4.29) لـ x

$$5x = 100 - 24y$$

$$x = 20 - 4.8y \tag{4.31}$$

وبالتعويض بالمعادلة (4.31) فى المعادلة الأخرى (4.30) .

$$7(20 - 4.8y) - 15y = -103$$

$$140-33.6y-15y=-103$$

$$-48.6y=-243$$

$$y=5$$

وأخيرًا بالتعويض بقيمة $y=5$ فى المعادلة (4.29) أو (4.30) .

$$5x+24(5)=100$$

$$x=-4$$

4.10. إذا أعطيت نظم المعادلات الآنية التالية لسلعتين بديلتين ، اللحم b والدجاج p ، أوجد سعر التوازن وكمية التوازن لكل سوق مستخدمًا طريقة التعويض .

4.10. Given the following system of simultaneous equations for two substitute goods, beef b and pork p, find the equilibrium price and quantity for each market, using the substitution method.

$$Q_b^s=15P_b-5 \qquad Q_p^s=32P_p-6$$

$$Q_b^d=-3P_b+P_p+82 \qquad Q_p^d=2P_b-4P_p+92$$

بوضع $Q^s=Q^d$ عند توازن كل سوق :

$$Q_b^s=Q_b^d \qquad Q_p^s=Q_p^d$$

$$15P_b-5=-3P_b+P_p+82 \qquad 32P_p-6=2P_b-4P_p+92$$

$$18P_b-P_p=87 \qquad -2P_b+36P_p=98$$

وهذا يختزل المسألة فى معادلتين ومجهولين .

$$18P_b-P_p=87 \tag{4.32}$$

$$-2P_b+36P_p=98 \tag{4.33}$$

وبحل المعادلة (4.32) بالنسبة P_p

$$P_p=18P_b-87 \tag{4.34}$$

وبالتعويض بالمعادلة (4.34) فى (4.33) ، المعادلة الأخرى ، وإيجاد P_b .

$$-2P_b+36(18P_b-87)=98$$

$$-2P_b+648P_b-3132=98$$

$$P_b=5$$

والآن نعوض بـ $P_b=5$ فى (4.32) أو (4.33) لإيجاد P_p .

$$18(5)-P_p=87$$

$$P_p=3$$

وأخيرًا نعوض بالقيم $P_b=5$ ، $P_p=3$ فى معادلات الطلب أو العرض لكل سوق لإيجاد Q_b ، Q_p .

$$Q_b^d=-3(5)+(3)+82 \qquad Q_p^d=2(5)-4(3)+92$$

$$Q_b^d=70=Q_b^s \qquad Q_p^d=90=Q_p^s$$

4.11. إذا أعطيت نظم المعادلات التالية لسلعتين متكاملتين ، البنطلونات t والجاكيتات j ، أوجد سعر التوازن وكمية التوازن باستخدام طريقة الحذف .

4.11. Given the following system of equations for two complementary goods, trousers t and jackets j, find the equilibrium price and quantity, using the elimination method.

$$Q_t^s = 3P_t - 60 \qquad Q_j^s = 2P_j - 120$$

$$Q_t^d = -5P_t - 2P_j + 410 \qquad Q_j^d = -P_t - 3P_j + 295$$

بوضع $Q_s = Q_d$ عند التوازن فى كل سوق :

$$Q_t^s = Q_t^d \qquad Q_j^s = Q_j^d$$

$$3P_t - 60 = -5P_t - 2P_j + 410 \qquad 2P_j - 120 = -P_t - 3P_j + 295$$

$$8P_t + 2P_j = 470 \qquad P_t + 5P_j = 415$$

فيكون معادلتين ومجهولين .

$$8P_t + 2P_j = 470 \tag{4.35}$$

$$P_t + 5P_j = 415 \tag{4.36}$$

وبضرب المعادلة (4.36) فى 8 .

$$8P_t + 40P_j = 3320 \tag{4.37}$$

وبطرح المعادلة (4.37) من المعادلة الأخرى (4.35) . وهذا يتطلب تغيير إشارات كل حد فى المعادلة (4.37) قبل جمعهم إلى المعادلة (4.35) .

$$-38P_j = -2850$$

$$P_j = 75$$

وبالتعويض عن $P_j = 75$ فى المعادلة (4.35) أو (4.36) .

$$8P_t + 2(75) = 470$$

$$P_t = 40$$

وبالتعويض $P_j = 75$ ، $P_t = 40$ فى المعادلة (4.35) أو (4.36) .

$$Q_t^d = -5(40) - 2(75) + 410 \qquad Q_j^d = -(40) - 3(75) + 295$$

$$Q_t^d = 60 = Q_t^s \qquad Q_j^d = 30 = Q_j^s$$

4.12. يمكن أيضًا أن تستخدم طرق الحذف والتعويض فى حل نظم المعادلات التربيعية . حل نظام المعادلات التربيعية للعرض والطلب التالية مستخدمًا طريقة التعويض .

4.12. The elimination and substitution methods can also be used to solve systems of quadratic equations. Solve the following system of quadratic supply and demand equations, using the substitution method.

العرض : $P - 3Q^2 + 10Q - 5 = 0$ (4.38)

الطلب : $P + Q^2 + 3Q - 20 = 0$ (4.39)

حل المعادلة (4.38) لـ P بدلالة Q .

$$P = 3Q^2 - 10Q + 5 \tag{4.40}$$

وبالتعويض بقيمة P من المعادلة (4.40) فى المعادلة الأخرى (4.39) .

$$(3Q^2 - 10Q + 5) + Q^2 + 3Q - 20 = 0$$
$$4Q^2 - 7Q - 15 = 0$$

استخدم الصيغة التربيعية من القسم 3.5 لإيجاد قيم Q .

$$Q = 3 \qquad Q = -1.25$$

وبما أن P ، Q مقتصرة على القيم الموجبة فى الاقتصاد ، $Q = 3$ نعوض بقيمة $Q = 3$ فى المعادلة (4.38) ، (4.39) أو (4.40) .

$$P - 3(3)^2 + 10(3) - 5 = 0$$
$$P = 2$$

4.13. استخدم طريقة الحذف لإيجاد P_e و Q_e إذا أعطيت :

4.13. Use the elimination method to find P_e and Q_e, given

$$\text{العرض}: \quad P - 2Q^2 + 3Q + 71 = 0 \tag{4.41}$$
$$\text{الطلب}: \quad 3P + Q^2 + 5Q - 102 = 0 \tag{4.42}$$

وبضرب المعادلة (4.41) فى 3 .

$$3P - 6Q^2 + 9Q + 213 = 0 \tag{4.43}$$

وبطرح (4.43) من (4.42) مع تغيير الإشارة لكل حد فى المعادلة (4.43) قبل الجمع .

$$7Q^2 - 4Q - 315 = 0$$

وباستخدام الصيغة التربيعية

$$Q = 7 \qquad Q \approx -6.43$$

وبالتعويض $Q = 7$ فى المعادلة (4.41) أو (4.42) .

$$P - 2(7)^2 + 3(7) + 71 = 0$$
$$P = 6$$

4.14. يمكن أيضًا أن يتضمن تحليل العرض والطلب علاقات متبادلة لأكثر من سوقين . استخدم طريقة الحذف لإيجاد P_e و Q_e لكل من الأسواق الثلاثة إذا أعطيت نظام المعادلات :

4.14. Supply-and-demand analysis can also involve more than two interrelated markets. Use the elimination method to find P_e and Q_e for each of the three markets, given the system of equations:

$$Q_{s_1} = 6P_1 - 8 \qquad Q_{d_1} = -5P_1 + P_2 + P_3 + 23$$
$$Q_{s_2} = 3P_2 - 11 \qquad Q_{d_2} = P_1 - 3P_2 + 2P_3 + 15$$
$$Q_{s_3} = 3P_3 - 5 \qquad Q_{d_3} = P_1 + 2P_2 - 4P_3 + 19$$

وعند التوازن فى كل سوق :

$$Q_{s_1} = Q_{d_1}$$

$$6P_1 - 8 = -5P_1 + P_2 + P_3 + 23$$

$$11P_1 - P_2 - P_3 = 31 \tag{4.44}$$

$$Q_{s_2} = Q_{d_2}$$

$$3P_2 - 11 = P_1 - 3P_2 + 2P_3 + 15$$

$$-P_1 + 6P_2 - 2P_3 = 26 \tag{4.45}$$

$$Q_{s_3} = Q_{d_3}$$

$$3P_3 - 5 = P_1 + 2P_2 - 4P_3 + 19$$

$$-P_1 - 2P_2 + 7P_3 = 24 \tag{4.46}$$

وهذا يخلف ثلاث معادلات وثلاثة مجاهيل .

$$11P_1 - P_2 - P_3 = 31 \tag{4.44}$$

$$-P_1 + 6P_2 - 2P_3 = 26 \tag{4.45}$$

$$-P_1 - 2P_2 + 7P_3 = 24 \tag{4.46}$$

لحل نظام (3×3) فالخطوات التالية أثبتت أنها مفيدة بشكل عام :

1. استخدم أى معادلتين لحذف واحد من المتغيرات الثلاثة .
2. ثم استخدم المعادلة الثالثة مع أى من المعادلات الأخرى التى استخدمت لحذف نفس المتغير .
3. وهذا سيترك فقط معادلتين مع مجهولين واللتان يمكن حلهما بالطرق المعروفة مثلما هو موضح أدناه :

(1) نختار حذف P_2 ونضرب المعادلة (4.44) فى 2 .

$$22P_1 - 2P_2 - 2P_3 = 62 \tag{4.47}$$

وبطرح (4.47) من (4.46) .

$$-23P_1 + 9P_3 = -38 \tag{4.48}$$

(2) نضرب المعادلة (3.46) فى 3 .

$$-3P_1 - 6P_2 + 21P_3 = 72 \tag{4.49}$$

ثم نضيف هذه المعادلة إلى (4.45) ، وهى المعادلة التى لم تستخدم سابقًا .

$$-4P_1 + 19P_3 = 98 \tag{4.50}$$

(3) وهذا يخلف معادلتين ومجهولين .

$$-23P_1 + 9P_3 = -38 \tag{4.48}$$

$$-4P_1 + 19P_3 = 98 \tag{4.50}$$

ويمكن حل تلك المعادلات بالطرق السابقة حيث نجد أن :

$$P_1 = 4 \qquad P_3 = 6$$

وبالتعويض بقيم $P_1 = 4$ ، $P_3 = 6$ فى (4.44) ، (4.45) أو (4.46)

$$11(4) - P_2 - (6) = 31$$

$$P_2 = 7$$

Income Determination Models نماذج تحديد الدخل

4.15 (a) أوجد معادلة الشكل المختزل ، (b) أوجد مستوى الدخل التوازنى (1) مباشرة و (2) من خلال معادلة الشكل المختزل إذا أعطيت :

4.15. (*a*) Find the reduced-form equation and (*b*) solve for the equilibrium level of income (1) directly and (2) with the reduced-form equation, given

$$Y = C + I + G \qquad C = C_0 + bY \qquad I = I_0 \qquad G = G_0$$

حيث : $C_0 = 135$ ، $b = 0.8$ ، $I_0 = 75$ ، $G_0 = 30$.

(a) من القسم 4.6 .

$$Y = C + I + G$$

بالتعويض بالقيم المعطاة وإيجاد y بدلالة المعاملات (b) والمتغيرات الخارجية (C_0, I_0, G_0) .

$$Y = C_0 + bY + I_0 + G_0$$

$$Y - bY = C_0 + I_0 + G_0$$

$$(1 - b)Y = C_0 + I_0 + G_0$$

$$Y_e = \frac{1}{1 - b}(C_0 + I_0 + G_0)$$

(*b*) (1)

$$Y = C + I + G$$

$$Y = 135 + 0.8Y + 75 + 30$$

$$Y - 0.8Y = 240$$

$$0.2Y = 240$$

$$Y_e = 1200$$

(2)

$$Y = \frac{1}{1 - b}(C_0 + I_0 + G_0)$$

$$Y = \frac{1}{1 - 0.8}(135 + 75 + 30)$$

$$Y = \frac{1}{0.2}(240)$$

$$Y = 5(240)$$

$$Y_e = 1200$$

4.16 أوجد مستوى توازن الدخل (Y_e) إذا علمت :

4.16. Find the equilibrium level of income (Y_e), given

$$Y = C + I + G$$

حيث : $C = 125 + 0.8y$ ، $I = 45$ ، $G = 90$.

من المسألة 4.15 نعلم أن معادلة الشكل المختزل هى :

$$Y_e = \frac{1}{1 - b}(C_0 + I_0 + G_0)$$

وأنه عندما $b = \text{MBC} = 0.8$ ، فإن المضاعف يساوى $1/(1 - b) = 5$ وباستخدام هذه المعلومة يمكن إيجاد Y_e مباشرة .

$$Y_e = 5(125 + 45 + 90) = 1300$$

4.17 أوجد (*a*) معادلة الشكل المختزل . (*b*) قيمة مستوى توازن الدخل Y_e ، (*c*) والأثر على المضاعف . إذا أعطيت النموذج التالى حيث الاستثمار متغير غير تلقائى ولكنه دالة فى الدخل .

4.17. Find (*a*) the reduced form, (*b*) the value of the equilibrium level of income Y_e, and (*c*) the effect on the multiplier, given the following model in which investment is not autonomous but a function of income:

$$Y = C + I \qquad C = C_0 + bY \qquad I = I_0 + aY$$

وأن : $C_0 = 65$ ، $I_0 = 70$ ، $b = 0.6$ ، $a = 0.2$.

(*a*)

$$Y = C + I$$
$$Y = C_0 + bY + I_0 + aY$$
$$Y - bY - aY = C_0 + I_0$$
$$(1 - b - a)Y = C_0 + I_0$$
$$Y_e = \frac{1}{1 - b - a}(C_0 + I_0)$$

(*b*) وبالحل مباشرة ، على الرغم أنه يمكن استخدام الصيغة المختزلة أيضًا .

$$Y = C + I$$
$$Y = 65 + 0.6Y + 70 + 0.2Y$$
$$Y - 0.6Y - 0.2Y = 135$$
$$0.2Y = 135$$
$$Y_e = 675$$

(*c*) عندما يكون الاستثمار دالة فى الدخل وليس متغيرًا تلقائيًا فإن المضاعف يتغير من (1/1–*b*) إلى (1/1 – *b* – *a*) . وهذا يزيد قيمة المضاعف لأنه يخفض كسر المقام ويجعل خارج القسمة كبيرًا ، حينما نعوض بقيم المعاملات فى المسألة :

$$\frac{1}{1 - b} = \frac{1}{1 - 0.6} = \frac{1}{0.4} = 2.5$$

بينما

$$\frac{1}{1 - b - a} = \frac{1}{1 - 0.6 - 0.2} = \frac{1}{0.2} = 5$$

4.18 أوجد (*a*) معادلة الشكل المختزل . (*b*) القيمة العددية لـ Y_e . (*c*) الأثر على المضاعف عندما نضيف ضريبة الرأس (lump-sum tax) للنموذج ويصبح الاستهلاك دالة فى الدخل المتاح y_d (disposable income) إذا أعطيت :

4.18. Find (*a*) the reduced form, (*b*) the numerical value of Y_e, and (*c*) the effect on the multiplier when a lump-sum tax is added to the model and consumption becomes a function of disposable income (Y_d), given

$$Y = C + I \qquad C = C_0 + bY_d \qquad I = I_0 \qquad Y_d = Y - T$$

حيث : $C_0 = 100$ ، $b = 0.6$ ، $I_0 = 40$ ، $T = 50$.

(*a*)

$$Y = C + I = C_0 + bY_d + I_0$$

$$Y = C_0 + b(Y - T) + I_0 = C_0 + bY - bT + I_0$$

$$Y - bY = C_0 + I_0 - bT$$

$$Y_e = \frac{1}{1-b}(C_0 + I_0 - bT) \qquad (4.51)$$

(*b*)

$$Y = 100 + 0.6Y_d + 40 = 140 + 0.6(Y - T)$$

$$Y = 140 + 0.6(Y - 50) = 140 + 0.6Y - 30$$

$$Y - 0.6Y = 110$$

$$0.4Y = 110$$

$$Y_e = 275$$

أو بالتعويض فى (4.51) .

$$Y = \frac{1}{1-0.6}[100 + 40 - 0.6(50)]$$

$$Y = \frac{1}{0.4}(110)$$

$$Y_e = 275$$

(*c*) وكما رأينا من الجزء (*a*) فإن إدخال ضريبة الرأس فى النموذج لا يغير قيمة المضاعف حيث يظل يساوى (1/1–*b*) تتغير فقط القيمة المجمعة للمتغيرات الخارجية بمقدار يساوى $-bT$. وإدخال المتغيرات التلقائية الأخرى مثل G_0 ، X_0 أو Z_0 لا يغير قيمة المضاعف .

4.19. أوجد (*a*) معادلة الشكل المختزل . (*b*) القيمة العددية لـ Y_e . (*c*) الأثر على المضاعف إذا أدخلت ضريبة الدخل T مع العنصر المناسب (*t*) فى النموذج . إذا أعطيت :

4.19. Find (*a*) the reduced form, (*b*) the numerical value of Y_e, and (*c*) the effect on the multiplier if an income tax T with a proportional component t is incorporated into the model, given

$$Y = C + I \qquad C = C_0 + bY_d \qquad T = T_0 + tY \qquad Y_d = Y - T \qquad I = I_0$$

حيث $C_0 = 85$ ، $I_0 = 30$ ، $T_0 = 20$ ، $b = 0.75$ ، $t = 0.2$.

(*a*)

$$Y = C + I = C_0 + bY_d + I_0$$

$$Y = C_0 + b(Y - T) + I_0 = C_0 + b(Y - T_0 - tY) + I_0$$

$$Y = C_0 + bY - bT_0 - btY + I_0$$

$$Y - bY + btY = C_0 + I_0 - bT_0$$

$$(1 - b + bt)Y = C_0 + I_0 - bT_0$$

$$Y_e = \frac{1}{1-b+bt}(C_0 + I_0 - bT_0) \qquad (4.52)$$

(*b*)

$$Y = C + I = 85 + 0.75Y_d + 30 = 115 + 0.75(Y - T)$$

$$Y = 115 + 0.75(Y - 20 - 0.2Y)$$

$$Y = 115 + 0.75Y - 15 - 0.15Y$$

$$Y - 0.75Y + 0.15Y = 100$$

$$0.4Y = 100$$

$$Y_e = 250$$

أو بالتعويض فى المعادلة (4.52)

$$Y = \frac{1}{1 - 0.75 + (0.75)(0.2)}[85 + 30 - 0.75(20)]$$

$$Y_e = \frac{1}{0.4}(100) = 250$$

(*c*) لقد تغير المضاعف من (1/1–*b*) إلى 1/(1 – *b* + *bt*) . وهذا يخفض حجم المضاعف لأنه يجعل المقام أكبر والكسر أقل .

$$\frac{1}{1-b} = \frac{1}{1-0.75} = \frac{1}{0.25} = 4$$

$$\frac{1}{1-b+bt} = \frac{1}{1-0.75+0.75(0.2)} = \frac{1}{1-0.75+0.15} = \frac{1}{0.4} = 2.5$$

4.20. إذا أضيف قطاع العالم الخارجى إلى النموذج وكان الميل الحدى للاستيراد *z* موجب . أوجد (*a*) معادلة الشكل المختزل . (*b*) مستوى توازن الدخل . (*c*) الأثر على المضاعف . إذا أعطيت

4.20. If the foreign sector is added to the model and there is a positive marginal propensity to import *z*, find (*a*) the reduced form, (*b*) the equilibrium level of income, and (*c*) the effect on the multiplier, given

$$Y = C + I + G + (X - Z) \qquad C = C_0 + bY \qquad Z = Z_0 + zY$$

$$I = I_0 \qquad G = G_0 \qquad X = X_0$$

حيث $C_0 = 70$ ، $I_0 = 90$ ، $G_0 = 65$ ، $X_0 = 80$ ، $Z_0 = 40$ ، $b = 0.9$ ، $z = 0.15$

(*a*)

$$Y = C + I + G + (X - Z)$$

$$Y = C_0 + bY + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0 - zY$$

$$Y - bY + zY = C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0$$

$$(1 - b + z)Y = C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0$$

$$Y_e = \frac{1}{1-b+z}(C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0) \tag{4.53}$$

(*b*) استخدم معادلة الشكل المختزل (4.53) .

$$Y = \frac{1}{1 - 0.9 + 0.15}(70 + 90 + 65 + 80 - 40)$$

$$Y_e = \frac{1}{0.25}(265) = 1060$$

(*c*) إدخال الميل الحدى للاستيراد فى النموذج يخفض حجم المضاعف بجعل مقام المضاعف كبيرًا :

$$\frac{1}{1-b} = \frac{1}{1-0.9} = \frac{1}{0.1} = 10$$

$$\frac{1}{1-b+z} = \frac{1}{1-0.9+0.15} = \frac{1}{0.25} = 4$$

انظر أيضًا المسائل 13.25 و 13.26 .

تحليل IS-LM   IS-LM Analysis

4.21. أوجد (*a*) مستوى الدخل ومعدل الفائدة اللذين يحدثان التوازن فى الاقتصاد . (*b*) قدر مستوى الاستهلاك C والاستثمار I ، والطلب على النقود لأغراض المبادلات والطوارئ M_t والطلب على النقود لأغراض المضاربة M_w عندما يكون عرض النقود $M_s = 300$ ، $C = 102 + 0.7y$ ، $I = 150 - 100i$ ، $M_t = 0.25y$ ، $M_w = 124 - 200i$.

4.21. Find (*a*) the level of income and the rate of interest that concurrently bring equilibrium to the economy and (*b*) estimate the level of consumption C, investment I, the transaction-precautionary demand for money M_t, and the speculative demand for money M_w, when the money supply $M_s = 300$, and

$$C = 102 + 0.7Y \qquad I = 150 - 100i \qquad M_t = 0.25Y \qquad M_w = 124 - 200i$$

(*a*) يتحقق التوازن فى سوق السلع عندما

$$Y = C + I = 102 + 0.7Y + 150 - 100i$$

وبتحريك كل الحدود إلى اليسار

$$Y - 0.7Y - 102 - 150 + 100i = 0$$

$$0.3Y + 100i - 252 = 0 \qquad (4.54)$$

ويتحقق التوازن فى سوق النقود عندما :

$$M_s = M_t + M_w$$

$$300 = 0.25Y + 124 - 200i$$

$$0.25Y - 200i - 176 = 0 \qquad (4.55)$$

التوازن الآنى فى كل الأسواق يتطلب أن :

$$\text{IS:} \quad 0.3Y + 100i - 252 = 0 \qquad (4.54)$$

$$\text{LM:} \quad 0.25Y - 200i - 176 = 0 \qquad (4.55)$$

بضرب المعادلة (4.54) فى 2 مثلما شرحنا فى القسم 4.5 .

$$0.6Y + 200i - 504 = 0 \qquad (4.56)$$

وبإضافة (4.56) إلى (4.55) لحذف i .

$$0.85Y - 680 = 0$$

$$Y_e = 800$$

ثم بالتعويض $y = 800$ فى (4.54) أو (4.55) .

$$0.3(800) + 100i - 252 = 0$$

$$100i = 12$$

$$i_e = 0.12$$

(*b*) عند $y_e = 800$ و $i_e = 0.12$.

$$C = 102 + 0.7(800) = 662 \qquad M_t = 0.25(800) = 200$$

$$I = 150 - 100(0.12) = 138 \qquad M_w = 124 - 200(0.12) = 100$$

$$C + I = Y \qquad M_t + M_w = M_s$$

$$662 + 138 = 800 \qquad 200 + 100 = 300$$

4.22. إذا زاد عرض النقود فى المسألة 4.21 بمقدار 17 . (a) ماذا يحدث لمستوى توازن الدخل ومعدل الفائدة ؟ (b) ما هى قيم C ، I ، M_t ، M_w عند مستوى التوازن الجديد ؟

4.22. If the money supply in Problem 4.21 increases by 17, (*a*) what happens to the equilibrium level of income and rate of interest? (*b*) What are C, I, M_t, and M_w at the new equilibrium?

(a) إذا زاد عرض النقود بمقدار 17 فإن معادلة LM تصبح :

$$M_s = M_t + M_w$$

$$317 = 0.25Y + 124 - 200i$$

$$0.25Y - 200i - 193 = 0 \tag{4.57}$$

ومعادلة IS تبقى دون تغيير من (4.54) :

$$0.3Y + 100i - 252 = 0 \tag{4.58}$$

بضرب المعادلة (4.58) فى 2 .

$$0.6Y + 200i - 504 = 0 \tag{4.59}$$

وبجمع (4.59) إلى (4.57) .

$$0.85Y - 697 = 0$$

$$Y_e = 820$$

وبالتعويض بـ $Y = 820$ فى (4.57) أو (4.58)

$$0.25(820) - 200i - 193 = 0$$

$$200i = 12$$

$$i_e = 0.06$$

الزيادة فى عرض النقود ـ مع بقاء الأشياء الأخرى ثابتة ـ تؤدى إلى زيادة فى مستوى توازن الدخل ونقص فى معدل الفائدة .

(b) عند $y_e = 820$ و $i_e = 0.06$

$$C = 102 + 0.7(820) = 676 \qquad M_t = 0.25(820) = 205$$

$$I = 150 - 100(0.06) = 144 \qquad M_w = 124 - 200(0.06) = 112$$

وأن $C + I = Y$ وأن $M_s = M_t + M_w$

$$676 + 144 = 820 \qquad 317 = 205 + 112$$

4.23. أوجد (a) مستوى الدخل التوازنى ومعدل الفائدة و (b) مستويات C ، I ، M_t ، M_w عندما $M_s = 275$ و

4.23. Find (*a*) the equilibrium income level and interest rate, and (*b*) the levels of C, I, M_t, and M_w, when $M_s = 275$, and

$$C = 89 + 0.6Y \qquad I = 120 - 150i \qquad M_t = 0.1Y \qquad M_w = 240 - 250i$$

(a) معادلة IS

$$Y = 89 + 0.6Y + 120 - 150i$$

$$0.4Y + 150i - 209 = 0 \qquad (4.60)$$

معادلة LM

$$M_s = M_t + M_w$$

$$275 = 0.1Y + 240 - 250i$$

$$0.1Y - 250i - 35 = 0 \qquad (4.61)$$

وعند التوازن

$$0.4Y + 150i - 209 = 0 \qquad (4.60)$$

$$0.1Y - 250i - 35 = 0 \qquad (4.61)$$

بضرب (4.61) فى 4

$$0.4Y - 1000i - 140 = 0 \qquad (4.62)$$

وبطرح (4.62) من (4.60) لحذف y

$$1150i - 69 = 0$$

$$i_e = 0.06$$

وبالتعويض $i_e = 0.06$ فى (4.60) أو (4.61) .

$$0.4Y + 150(0.06) - 209 = 0$$

$$0.4Y = 200$$

$$Y_e = 500$$

(b) وعند $y_e = 500$ و $i_e = 0.06$

$$C = 89 + 0.6(500) = 389 \qquad M_t = 0.1(500) = 50$$

$$I = 120 - 150(0.06) = 111 \qquad M_w = 240 - 250(0.06) = 225$$

وأن

$$C + I = Y \qquad M_t + M_w = M_s$$

$$389 + 111 = 500 \qquad 50 + 225 = 275$$

4.24 وضح ماذا يحدث لحالات التوازن فى المسألة (4.23) إذا انخفض الاستثمار التلقائى إلى 97 .

4.24. **Show what happens to the equilibrium conditions in Problem 4.23 if autonomous investment drops to 97.**

عندما $I_0 = 97$ فإن معادلة IS تصبح :

$$Y = 89 + 0.6Y + 97 - 150i$$

$$0.4Y + 150i - 186 = 0 \qquad (4.63)$$

أما معادلة LM فتظل كما فى (4.61) .

$$0.1Y - 250i - 35 = 0 \qquad (4.64)$$

وعند التوازن

$$0.4Y + 150i - 186 = 0 \qquad (4.63)$$

$$0.1Y - 250i - 35 = 0 \qquad (4.64)$$

بضرب المعادلة (4.64) فى 4

$$0.4Y - 1000i - 140 = 0 \tag{4.65}$$

ويطرح (4.65) من (4.64)

$$1150i - 46 = 0$$

$$i_e = 0.04$$

وبالتعويض $i_e = 0.04$ فى (4.63) أو (4.64)

$$0.4Y + 150(0.04) - 186 = 0$$

$$0.4Y - 180 = 0$$

$$Y_e = 450$$

الانخفاض فى الاستثمار التلقائى مع بقاء الأشياء الأخرى ثابتة يؤدى إلى انخفاض مستوى توازن الدخل وانخفاض معدل الفائدة .

Modeling and Inverse Functions النمذجة والدوال العكسية

4.25. إذا أعطيت معادلات العرض والطلب الخطية التالية فى الصيغة العامة :

4.25. Given the following linear supply and demand equations in standard form

$$\text{العرض}: \ -7P + 14Q = -42 \tag{4.66}$$

$$\text{الطلب}: \ 3P + 12Q = 90 \tag{4.67}$$

(*a*) حول هذه المعادلات إلى صيغة الميل-الحد القاطع إلى درجة كافية (1) للنموذج الاقتصادى و (2) النموذج الرياضى ، و (*b*) أوجد سعر التوازن P_e *وكمية التوازن* Q_e لكل نموذج جبريًا . و(*c*) ارسم بيانيًا مجموعتى المعادلات لإيجاد P_e و Q_e .

(*a*) convert them to the slope-intercept form in a manner conformable to (1) economic modeling and (2) mathematical modeling; (*b*) find the equilibrium price and quantity P_e and Q_e for each model algebraically; and (*c*) graph both sets of equations to find P_e and Q_e.

(*a*) (1) طالما أن الاقتصاديين يعتقدون أن $P = f(Q)$ فإن صيغ الميل-الحد القاطع توجد بحل كل معادلة لـ P بدلالة Q .

$$\text{العرض}: \ P = 2Q + 6 \tag{4.68}$$

وبحل (4.67) لـ P بدلالة Q .

$$\text{الطلب}: \ P = -4Q + 30 \tag{4.69}$$

(2) طالما أن الرياضيين يعتقدون أن $Q = f(Q)$ فإن صيغ الميل-الحد القاطع توجد بحل كل معادلة لـ Q بدلالة P .

$$\text{العرض}: \ Q = \tfrac{1}{2}P - 3 \tag{4.70}$$

وبحل (4.67) لـ Q بدلالة P .

$$\text{الطلب}: \ Q = -\tfrac{1}{4}P + 7\tfrac{1}{2} \tag{4.71}$$

(b) (1) عند التوزان $P_s = P_d = P_e$. وبوضع P في (4.86) مساوية لـ P فى (4.69) والحل جبريًا .

$$2Q + 6 = -4Q + 30$$

$$6Q = 24 \qquad Q = 4 = Q_e$$

وبالتعويض بـ $Q = 4$ فى (4.68) أو (4.69)

$$P = 2(4) + 6 = 14 = P_e$$

(2) عند التوازن $P_s = P_d = P_e$. وبوضع Q فى (4.70) مساوية لـ Q فى (4.69) والحل جبريًا .

$$\tfrac{1}{2}P - 3 = -\tfrac{1}{4}P + 7\tfrac{1}{2}$$

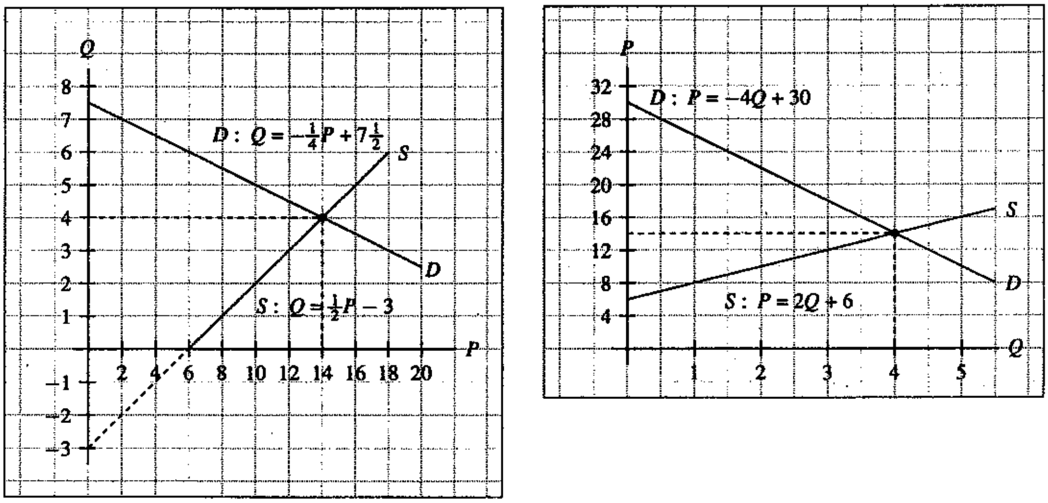
$$\tfrac{3}{4}P = 10\tfrac{1}{2} \qquad P = 14 = P_e$$

وبالتعويض بـ $Q = 14$ فى (4.70) أو (4.71)

$$Q = \tfrac{1}{2}(14) - 3 = 4 = Q_e$$

(c) عند التمثيل البيانى للنموذج الاقتصادى فإن Q تقاس على المحور x و P تقاس على المحور y كما يتضح من الشكل (a)(4–22) .

وعند التمثيل البيانى للنموذج الاقتصادى فإن P تقاس على المحور x و Q تقاس على المحور y كما يتضح من الشكل (b)(4–22) .



(b) (a)

شكل (4–22)

4.26. إذا أعطيت معادلات العرض والطلب الخطية التالية فى الصيغة العامة :

4.26. Given the following linear supply and demand equations in standard form,

$$\text{العرض} : \; 10P - 8Q = 50 \qquad (4.72)$$

$$\text{الطلب} : 20P + 8Q = 700 \qquad (4.73)$$

(a) حول هذه المعادلات إلى صيغة الميل-الحد القاطع إلى درجة كافيــة (1) للنمـوذج الاقتصـادى و (2)

للنموذج الرياضى . (*b*) وأوجد سعر التوازن P_e وكمية التوازن Q_e لكل نموذج جبريًا، (*c*) ومثل بيانيًا المعادلات لإيجاد P_e ، Q_e .

(*a*) (1) النموذج الرياضى :

من المعادلة (4.72)

$$\text{العرض} : \quad P = \tfrac{4}{5}Q + 5 \tag{4.74}$$

من المعادلة (4.73)

$$\text{الطلب} : \quad P = -\tfrac{2}{5}Q + 35 \tag{4.75}$$

(2) النموذج الرياضى :

من المعادلة (4.72)

$$\text{العرض} : \quad Q = 1\tfrac{1}{4}P - 6\tfrac{1}{4} \tag{4.76}$$

من المعادلة (4.73)

$$\text{الطلب} : \quad Q = -2\tfrac{1}{2}P + 87\tfrac{1}{2} \tag{4.77}$$

(*b*) (1) بوضع P فى (4.74) مساوية لـ P فى (4.75) .

$$\tfrac{4}{5}Q + 5 = -\tfrac{2}{5}Q + 35$$

$$\tfrac{6}{5}Q = 30 \qquad Q = 25 = Q_e$$

وبالتعويض $Q = 25$ فى (4.74) أو (4.75)

$$P = \tfrac{4}{5}(25) + 5 = 25 = P_e$$

(2) بوضع Q فى (4.76) مساوية لـ Q فى (4.77) .

$$1\tfrac{1}{4}P - 6\tfrac{1}{4} = -2\tfrac{1}{2}P + 87\tfrac{1}{2}$$

$$3\tfrac{3}{4}P = 93\tfrac{3}{4} \qquad P = 25 = P_e$$

وبالتعويض بـ $P = 25$ فى (4.76) أو (4.77) .

$$Q = 1\tfrac{1}{4}(25) - 6\tfrac{1}{4} = 25 = Q_e$$

(*c*) التمثيل البيانى الاقتصادى موضحًا فى الشكل (4–23)(*a*) حيث Q تقاس على المحور x و P تقاس على المحور y . والتمثيل البيانى الرياضى موضح فى الشكل (4–23)(*b*) حيث P تقاس على المحور x و Q تقاس على المحور y . [الأشكال فى الصفحة القادمة]

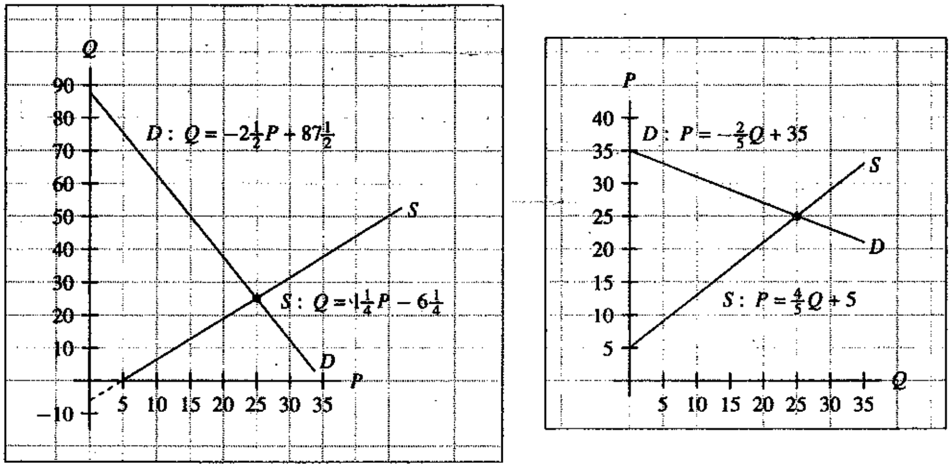
4.27. إذا أعطيت الدالة الضمنية :

4.27. Given the implicit function

$$f(x, y) = 5x + 12y - 180 = 0 \tag{4.78}$$

أوجد الدوال الصريحة (*a*) $y = g(x)$ ، (*b*) $x = h(g)$ إذا وجدت :

find the explicit functions (*a*) $y = g(x)$ and (*b*) $x = h(y)$, if they exist.



(b) (a)

شكل (4–23)

(a) لإيجاد الدالة الصريحة $y = g(x)$ إذا وجدت فإننا نحل الدالة الضمنية $f(x, y)$ جبريًا لـ y بدلالـة x . فإذا كانت لكل قيمة من x ، توجد فقط قيمة واحد لـ y فإنه توجد الدالة الصريحة $y = g(x)$. ومـن ثم فمن المعادلة (4.78)

$$12y = -5x + 180$$

$$y = -\frac{5}{12}x + 15$$

وطالما توجد فقط قيمة واحدة لـ y لكل قيمة من x

$$y = g(x) = -\frac{5}{12}x + 15 \qquad (4.79)$$

(b) لإيجاد الدالة الصريحة $x = h(y)$ إن وجدت فإننا نحل الدالة الضمنية $f(x, y)$ جبريًا لـــ x بدلالـة y . فإذا كانت لكل قيمة y توجد فقط قيمة واحدة لـ x فإنه توجد الدالة الصريحة $x = h(y)$. ومن ثم فمن المعادلة (4.78)

$$5x = -12y + 180$$

$$x = -\frac{12}{5}y + 36$$

وطالما توجد فقط قيمة واحدة لـ x لكل قيمة من y

$$x = h(y) = -\frac{12}{5}y + 36 \qquad (4.80)$$

لاحظ أنه عندما يمكن اشتقاق الدالتين الصريحتين من نفس الدالة الضمنية ذات المتغيرين فإن الدوال الصريحة تكون دوال عكسية لبعضها البعض كما ترى فى المسألة (4.28) .

4.28. إذا أعطيت $y = f(x)$ والدالة العكسية تكتب $x = f^{-1}(y)$ حيث تقرآن "x دالة عكسية لـ y" . أوجد الدوال العكسية للدوال فى المسألة (4.27) .

4.28. Given $y = f(x)$, the inverse function is written $x = f^{-1}(y)$, which reads "x is an inverse function of y." Find the inverse functions for the functions in Problem 4.27:

(a) $$y = g(x) = -\tfrac{5}{12}x + 15 \qquad (4.79)$$

(b) $$x = h(y) = -\tfrac{12}{5}y + 36 \qquad (4.80)$$

لإيجاد الدالة العكسية ، حل جبريًا للمتغير التابع بدلالة المتغير المستقل ثم تأكد بأنها دالة . وهكذا

(a) حل $y=g(x)=-\frac{5}{12}x+15$ من المعادلة (4.79) للمتغير x بدلالة y .

$$\tfrac{5}{12}x = -y + 15$$

$$x = -\tfrac{12}{5}y + 36$$

وطالما توجد قيمة واحدة فقط للمتغير التابع (x) لكل قيمة من المتغير المستقل (y) فإن الدالة العكسية $g^{-1}(y)$ توجد ، وتكتب :

$$x = g^{-1}(y) = -\tfrac{12}{5}y + 36 \qquad (4.81)$$

(b) حل $x=g(y)=-\frac{12}{5}y+36$ من المعادلة (4.80) للمتغير y بدلالة x .

$$\tfrac{12}{5}y = -x + 36$$

$$y = -\tfrac{5}{12}x + 15$$

وطالما توجد قيمة واحدة فقط للمتغير التابع (y) لكل قيمة من المتغير المستقل (x) فإن الدالة العكسية $h^{-1}(x)$ توجد ، وتكتب :

$$y = h^{-1}(x) = -\tfrac{5}{12}x + 15 \qquad (4.82)$$

لاحظ أن الدالة العكسية $g^{-1}(y)$ فى (4.81) تعادل $h(y)$ فى (4.80) وأن الدالة العكسية $h^{-1}(x)$ فى (4.82) تعادل $g(x)$ فى (4.79) وهذه تؤكد الملاحظة السابقة التى ترى أنه حينما توجد دالة ضمنية فى متغيرين مثل (4.78) فينتج عنها دالتان صريحتان مختلفتان مثل (4.79) و (4.80) . والدوال الصريحة هى دوال عكسية لبعضها البعض فمن (4.79) و (4.82)

$$g(x) = h^{-1}(x) = -\tfrac{5}{12}x + 15$$

ومن (4.80) و (4.81)

$$h(y) = g^{-1}(y) = -\tfrac{12}{5}y + 36$$

لاحظ أيضًا أن ميل الدالة العكسية هو مقلوب ميل الدالة الأولية أو الأصلية :

4.29 اختبر (a) جبريًا ، (b) بيانيًا لنرى ما إذا كانت توجد دالة عكسية لـ : $y=x^2$.

4.29. Test (a) algebraically and (b) graphically to see if the inverse function exists for

$$y = x^2 \qquad (4.83)$$

(a) حل (4.83) لـ x بدلالة y .

$$x = \pm\sqrt{y}$$

وطالما توجد قيمتان لـ x لكل قيمة من y ـ واحدة موجبة وواحدة سالبة ـ فإن $x=\pm\sqrt{y}$ ليست دالة عكسية لـ $y=x^2$ لأن $x=\pm\sqrt{y}$ ليست دالة .

(b) ارسم الجداول الخاصة ثم مثل بيانيًا $y=x^2$ فى الشكل (4–24)(a) و $x=\pm\sqrt{y}$ فى الشكل (4–24)(b)

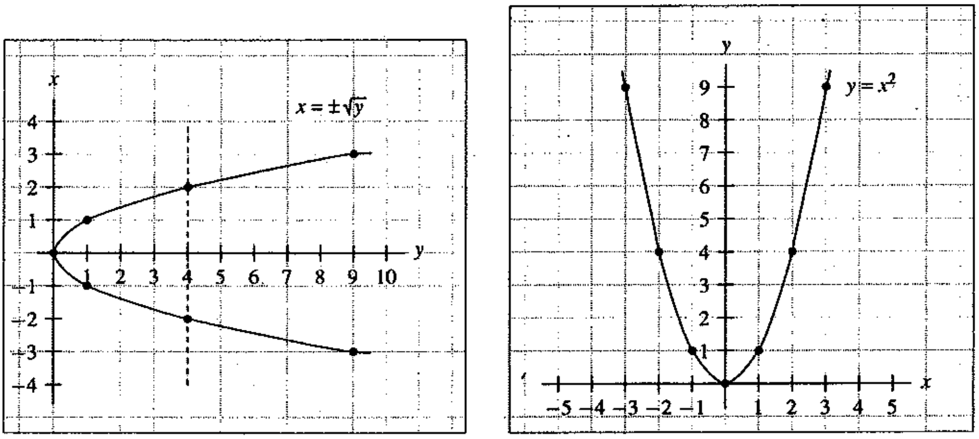
فإننا نرى أن الرسم البيانى لـ $x=\pm\sqrt{y}$ لم يجتاز اختبار الخط العمودى .

$y = x^2$

x	y
−3	9
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

$x = \pm\sqrt{y}$

y	x
0	0
1	±1
4	±2
9	±3



(b) (a)

شكل (4–24)

4.30. إذا أعطيت نطاقًا مقيدًا $x \ge 0$ ، بين (a) جبريًا ، (b) بيانيًا بأنه توجد دالة عكسية لـ $y=x^2$.

4.30. Given the domain restriction $x \geq 0$, show (*a*) algebraically and (*b*) graphically that the inverse function exists for $y = x^2$.

(a) إذا أعطيت $y = x^2$ والنطاق المقيد $x \ge 0$ فإن الدالة العكسية هى :

$$x = \sqrt{y}$$

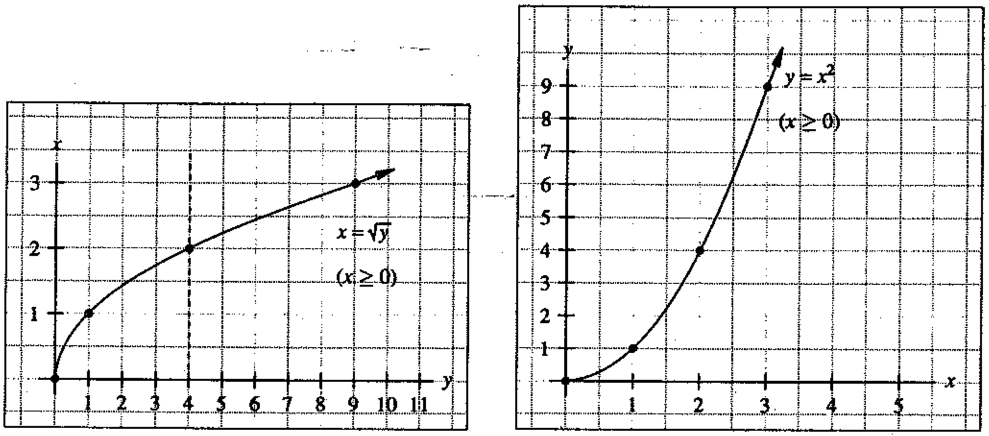
(b) أنشئ الجداول وارسم الأشكال البيانية المناسبة فى الشكل (4–25) ، من الواضح أن الرسم البيانى للدالة العكسية يجتاز اختبار الخط العمودى لكل قيم $x \ge 0$.

(a) $y = x^2$

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9

(b) $x = \sqrt{y}$

y	x
0	0
1	1
4	2
9	3



(b) (a)

شكل (4–25)

مسائل إضافية

Systems of Equations نظم المعادلات

4.31. Give the dimensions of the following systems of equations:

4.31. بين أبعاد نظم المعادلات التالية :

(a) $z = 4w + 3x + 6y$
$z = 7w - 2x - 8y$
$z = 9w - 4x + 5y$

(b) $y = 6x_1 + 5x_2$
$y = 4x_1 + 9x_2$
$y = 3x_1 + 8x_2$

(c) $y = 8x + 5$
$y = 2x + 9$
$y = 3x + 7$

4.32. استخدم الأشكال البيانية لحل نظم المعادلات الخطية التالية :

4.32. Use graphs on your own to solve each of the following systems of linear equations:

(a) $7x + 2y = 33$
$4x - 9y = -42$

(b) $6x - 8y = 10$
$5x + 3y = 47$

(c) $3x + 4y = 26$
$-x + 9y = 74$

(d) $6x - 2y = 26$
$15x - 5y = 85$

Supply and Demand العرض والطلب

4.33. استخدم الرسوم البيانية ـ مع قياس P على المحور الرأسى كما فى الاقتصاد ـ فى إيجاد كمية التوازن Q_e وسعر التوازن P_e لكل من الأسواق التالية :

4.33. Using graphs on your own, with P on the vertical axis as in economics, find the equilibrium quantity and price (Q_e, P_e) in each of the following markets:

(a) العرض: $P = \frac{1}{4}Q + 2$
الطلب: $P = -\frac{3}{4}Q + 22$

(b) العرض: $P = \frac{2}{5}Q + 3$
الطلب: $P = -\frac{3}{5}Q + 33$

(c) العرض: $P = \frac{3}{8}Q + 1$
الطلب: $P = -\frac{1}{2}Q + 22$

(d) العرض: $P = \frac{2}{3}Q - 4$
الطلب: $P = -\frac{1}{6}Q + 11$

4.34. حل جبريًا كل من النظم التالية لمعادلات العرض والطلب الخطية والمعبر عنها فى الشكل الرياضى : $Q = f(P)$.

4.34. Solve algebraically each of the following systems of linear supply and demand equations expressed in the mathematical format $Q = f(P)$:

(*a*) العرض: $Q = 25P - 185$
الطلب: $Q = -32P + 1240$

(*b*) العرض: $Q = 18P + 60$
الطلب: $Q = -22P + 1260$

(*c*) العرض: $Q = 42P + 58$
الطلب: $Q = -37P + 2112$

(*d*) العرض: $Q = 19P + 8$
الطلب: $Q = -13P + 2184$

Break-even Analysis تحليل نقطة التعادل

4.35. أوجد نقطة التعادل للمنشآت التالية التى تعمل فى سوق المنافسة الكاملة إذا أعطيت دوال الإيراد الكلى $R(x)$ والتكلفة الكلية $C(x)$ لكل من :

4.35. Find the break-even point for each of the following firms operating in a purely competitive market, given total revenue $R(x)$ and total cost $C(x)$ functions for each:

(*a*) $R(x) = 125x$
$C(x) = 85x + 5200$

(*b*) $R(x) = 37.5x$
$C(x) = 22.25x + 1586$

(*c*) $R(x) = 495x$
$C(x) = 350x + 40,600$

(*d*) $R(x) = 85.5x$
$C(x) = 79.75x + 5888$

4.36. أوجد نقطة التعادل لكل من المنشآت الاحتكارية التالية إذا أعطيت :

4.36. Find the break-even point for each of the following monopolistic firms, given

(*a*) $R(x) = -x^2 + 22x$
$C(x) = 7x + 36$

(*b*) $R(x) = -5x^2 + 163x$
$C(x) = 23x + 800$

(*c*) $R(x) = -2x^2 + 85x$
$C(x) = 11x + 420$

(*d*) $R(x) = -3x^2 + 201x$
$C(x) = 6x + 2250$

Elimination and Substitution Methods طرق الحذف والتعويض

4.37. استخدم طريقة التعويض لحل النظم التالية للمعادلات الآنية :

4.37. Use the substitution method to solve each of the following systems of simultaneous equations:

(*a*) $3x - y = 1$
$4x + 6y = 38$

(*b*) $7x + 2y = 62$
$x + 6y = 26$

(*c*) $5x + y = 26$
$8x - 3y = 60$

(*d*) $18x - 2y = 32$
$12x + 5y = -23$

4.38. استخدم طريقة الحذف لحل النظم التالية للمعادلات الآنية :

4.38. Use the elimination method to solve each of the following systems of simultaneous equations:

(*a*) $4x - 3y = 22$
$7x - 6y = 34$

(*b*) $-5x + 8y = 42$
$15x + 9y = 6$

(*c*) $24x - 7y = 37$
$-6x + 9y = 27$

(*d*) $11x + 3y = 53$
$4x - 18y = 172$

Income determination Models نماذج تحديد الدخل

4.39. أوجد مستوى الدخل التوازني Y_e إذا أعطيت :

4.39. Find the equilibrium level of income Y_e, given
(*a*) $Y = C + I,\ C = 150 + 0.75Y,\ I = 35$
(*b*) $Y = C + I,\ C = 275 + 0.75Y,\ I = 40 + 0.15Y$
(*c*) $Y = C + I + G,\ C = 320 + 0.65Y,\ I = 65 + 0.25Y,\ G = 150$
(*d*) $Y = C + I + G,\ C = 240 + 0.8Y_d,\ Y_d = Y - T,\ I = 70,\ G = 120,\ T = 50$
(*e*) $Y = C + I + G,\ C = 160 + 0.8Y_d,\ Y_d = Y - T,\ I = 80,\ G = 120,\ T = 40 + 0.25Y$
(*f*) $Y = C + I + G + (X - Z),\ C = 420 + 0.85Y,\ I = 130,\ G = 310,\ X = 90,\ Z = 30 + 0.25Y$

IS-LM Curves منحنيات IS-LM

4.40. أوجد مستوى الدخل y ومعدل الفائدة i اللذين يؤديان إلى توازن الاقتصاد وقدر مستوى الاستهلاك C ، والاستثمار I ، والطلب على النقود لأغراض المضاربة M_w ، والطلب على النقود لأغراض المبادلات والطوارئ M_t عندما :

(*a*) عرض النقود $M_s = 1000$ ، $C = 950 + 0.75y$ ، $I = 310 - 125i$ ، $M_t = 0.150y$ ، $M_w = 264 - 175i$.

(*b*) $M_s = 800$ ، $C = 1200 + 0.6y$ ، $I = 227 - 180i$ ، $M_w = 277 - 180i$ ، $M_t = 0.2y$.

حل المسائل الإضافية

4.31. (*a*) 3 × 4; تحت المقيدة (*b*) 3 × 3; مقيدة بالضبط (*c*) 3 × 2; فوق المقيدة

4.32. (*a*) (3, 6) (*b*) (7, 4) (*c*) (−2, 8) (*d*) لا

4.33. (*a*) (20, 7) (*b*) (30, 15) (*c*) (24, 10) (*d*) (18, 8)

4.34. (*a*) $P_e = 25,\ Q_e = 440$ (*b*) $P_e = 30,\ Q_e = 600$
(*c*) $P_e = 26,\ Q_e = 1150$ (*d*) $P_e = 68,\ Q_e = 1300$

4.35. (*a*) $x = 130$ (*b*) $x = 104$ (*c*) $x = 280$ (*d*) $x = 1024$

4.36. (*a*) $x = 3, x = 12$ (*b*) $x = 8, x = 20$ (*c*) $x = 7, x = 30$ (*d*) $x = 15, x = 50$

4.37. (*a*) $x = 2, y = 5$ (*b*) $x = 8, y = 3$ (*c*) $x = 6, y = -4$ (*d*) $x = 1, y = -7$

4.38. (*a*) $x = 10, y = 6$ (*b*) $x = -2, y = 4$ (*c*) $x = 3, y = 5$ (*d*) $x = 7, y = -8$

4.39. (*a*) $Y_e = 740$ (*b*) $Y_e = 3150$ (*c*) $Y_e = 5350$ (*d*) $Y_e = 1950$ (*e*) $Y_e = 820$
(*f*) $Y_e = 2300$

4.40. (*a*) $Y = 5000,\ i = 0.08,\ C = 4700,\ I = 300,\ M_w = 250,\ M_t = 750$
(*b*) $Y = 3500,\ i = 0.15,\ C = 3300,\ I = 200,\ M_w = 100,\ M_t = 700$

الفصل الخامس

الجبر الخطى (المصفوفة)

Linear (or Matrix) Algebra

5.1 مقدمة Introduction

الجبر الخطى (المصفوفة) يتيح الفرصة للتعبير عن نظام المعادلات الخطية بطريقة محكمة وبسيطة وإنه يزودنا بطريقة مختصرة لتحديد ما إذا كان يوجد حل قبل إجراء المحاولة . كما يمدنا بوسائل حل نظام المعادلة . وعلى الرغم من ملائمته فقط للمعادلات الخطية إلا أن للجبر الخطى فائدته الكبيرة فى الاقتصاد والإدارة لأن أغلب العلاقات الاقتصادية تقترب من الدوال الخطية أو تحول إلى علاقات خطية . انظر القسم 7.11 .

مثال 1 : إذا كان لدى شركة ما محلات مختلفة ومتعددة تبيع مجموعة منتجات من صنف واحد ، فإن المصفوفة تزودنا بطريقة مختصرة لتسلسل المخزون السلعى .

EXAMPLE 1. For a company with several different retail stores selling the same line of products, a matrix provides a concise way of keeping track of stock.

المحل	PCs	Printer	Monitor	Modems
1	120	145	130	85
2	165	105	155	90
3	110	115	95	80
4	185	170	165	105

وبالقراءة عبر صف المصفوفة ، فإن المبيعات تستطيع أن تحدد مستوى المخزون فى أى من منافذ البيع . وبالقراءة عبر عمود المصفوفة فإن المنشأة تستطيع أن تحدد مستوى المخزون من منتجات أى خط إنتاجى .

5.2 تعريفات ومصطلحات Definitions and Terms

المصفوفة هى ترتيب متعامد لأعداد $[7 \;\; 2 \;\; 6]$ أو معاملات $[a \;\; b \;\; c]$ أو متغيرات $[x \;\; y \;\; z]$ توضع فى نظام ذى معنى أو هدف . ويشار إلى الأعداد أو المعادلات أو المتغيرات بأنها عناصر المصفوفة . وتشكل العناصر فى الخط الأفقى صف المصفوفة والعناصر فى الخط العمودى تشكل عمود المصفوفة . وعدد الصفوف (r) والأعمدة (c) فى المصفوفة تحدد أبعاد المصفوفة $(r \times c)$ والتى تقرأ r فى c . وإنه من المهم أن نلاحظ أن رقم الصف يسبق دائمًا رقم العمود . وفى المصفوفة المربعة عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة (أى $r = c$) . والمصفوفة المكونة من عدة صفوف وعمود وحيد مثل التى أبعادها $(r \times 1)$ تسمى متجه العمود والمصفوفة التى تتكون من عدة أعمدة وصف وحيد التى أبعادها $(1 \times c)$ تسمى متجه الصف . والمصفوفة المدورة (المنقولة) التى يرمز لها A' أو A^T هى المصفوفة A التى حولت صفوفها إلى أعمدة والأعمدة إلى صفوف .

EXAMPLE 2. Assume

مثال 2 : افترض

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 5 & 2 & 9 \end{bmatrix} \quad C = [4 \quad 7 \quad 1] \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

المصفوفة A هى (3×3) مصفوفة عامة حيث كل عنصر ممثل بنفس المعامل a مع تمييز أحد العناصر عن الآخر بزوج من الرموز السفلية . والرموز السفلية تستخدم لتحديد موقع العنصر فى المصفوفة . فالرمز الأول يوضح الصف الذى يظهر فيه العنصر والرمز الثانى يحدد العمود . وتذكر دائمًا أن رقم الصف يسبق رقم العمود ، ولاحظ أن a_{13} يعنى أن العنصر فى الصف الأول والعمود الثالث بينما a_{31} يعنى أن العنصر فى الصف الثالث والعمود الأول .

المصفوفة B هى (2×3) . ولتحديد عدد الصفوف فى المصفوفة نعد دائمًا باتجاه الأسفل . ولإيجاد عدد الأعمدة نعد دائمًا أفقيًا . ففى B فإن العنصر b_{12} هو 8 والعنصر b_{21} هو 5 . والمصفوفة C هى متجه صف من الأعداد بأبعاد (1×3) . والمصفوفة x هى متجه عمود من المتغيرات وأبعادها (3×1) . الرموز الوحيدة فى المصفوفة x تستخدم للتمييز بين المتغيرات وهى لا تحدد الموقع .

وبأخذ صفوف A وتحويلهم إلى أعمدة (أو بشكل متساوى بأخذ أعمدة A وتحويلهم إلى صفوف) نحصل على المصفوفة المدورة (المنقولة) A' .

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

وبالمثل فإن تدوير (نقل) المصفوفة X

$$X' = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]$$

5.3 جمع وطرح المصفوفات Addition and Subtraction of Matrices .

يتطلب جمع وطرح أى مصفوفتين $(A \pm B)$ أن تكون لهما نفس الأبعاد . فكل عنصر من المصفوفة الأولى يضاف إلى (أو يطرح من) العنصر المناظر له فى المصفوفة الأخرى . ولذلك فإن b_{11} فى المصفوفة B يضاف إلى (أو يطرح من) a_{11} فى المصفوفة A و b_{12} إلى a_{12} وهكذا . انظر الأمثلة 3 ، 4 والمسائل 4.5 إلى 5.7 .

مثال 3 : إذا أعطيت المصفوفة A ، B فإن مجموعهما $A + B$ يحسب كالآتى :

EXAMPLE 3. The sum $A + B$ is calculated below, given the matrices

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 7+3 & 4+9 \\ 6+8 & 5+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 13 \\ 14 & 7 \end{bmatrix}$$

وإذا أعطيت المصفوفة C ، D فإن الفرق $C - D$ يحسب كالآتى :

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C - D = \begin{bmatrix} 8-5 & 3-7 \\ 2-8 & 9-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$$

EXAMPLE 4. Given

مثال 4 : إذا أعطيت

$$D = \begin{bmatrix} 20 & 15 & 35 & 10 \\ 25 & 5 & 30 & 15 \\ 10 & 40 & 25 & 20 \\ 15 & 20 & 35 & 10 \end{bmatrix}$$

حيث تمثل D السلع المسلمة إلى المحلات المختلفة فى المثال 1 . أوجد مستوى المخزون الجديد .

لإيجاد مستوى المخزون الجديد ، نرمز للمصفوفة الأصلية فى المثال 1 بالحرف S . ونوجد $S + D$. نجمع العناصر المناظرة فى كل مصفوفة على النحو التالى :

$$S + D = \begin{bmatrix} 120+20 & 145+15 & 130+35 & 85+10 \\ 165+25 & 105+5 & 155+30 & 90+15 \\ 110+10 & 115+40 & 95+25 & 80+20 \\ 185+15 & 170+20 & 165+35 & 105+10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 140 & 160 & 165 & 95 \\ 190 & 110 & 185 & 105 \\ 120 & 155 & 120 & 100 \\ 200 & 190 & 200 & 115 \end{bmatrix}$$

5.4 ضرب العُددى Scalar Multiplication

فى الجبر الخطى ، يسمى الرقم الحقيقى مثل 7 ، ‎-5 أو 0.08 عُددى . وعند ضرب المصفوفة فى عُددى فإن هذا يتطلب ضرب كل عناصر المصفوفة بالعددى . وهذه العملية تسمى الضرب العُددى لأنها ترفع أو تخفض المصفوفة طبقًا لقيمة العُددى . انظر مثال 5 والمسائل 5.9 إلى 5.11 .

EXAMPLE 5. The result of scalar multiplication Ak, given $k = 5$ and

مثال 5 : إذا أعطيت $k = 5$ و

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

فإن نتيجة الضرب العددى Ak هى :

$$Ak = \begin{bmatrix} 4(5) & 9(5) \\ 2(5) & 6(5) \\ 3(5) & 7(5) \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 20 & 45 \\ 10 & 30 \\ 15 & 35 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

5.5 ضرب المتجه Vector Multiplication

ضرب متجه الصف A فى متجه العمود B يتطلب كشرط مسبق أن يكون كل متجه له بالضبط نفس العدد من العناصر . ويوجد الناتج بفعل ضرب العناصر الفردية لكل متجه صف فى العناصر المنظرة له فى متجه العمود ثم نجمع النواتج .

$$AB = (a_{11} \,.\, b_{11}) + (a_{12} \,.\, b_{21}) + (a_{13} \,.\, b_{31}) + \cdots$$

وناتج ضرب الصف ـ العمود سوف يكون عنصرًا وحيدًا . وضرب متجه الصف ـ العمود له أهمية خاصة لأنه الأساس لجميع ضرب المصفوفات . انظر المثال 6 والمسائل 5.12 إلى 5.16 .

مثال 6 : أوجد الناتج AB إذا أعطيت متجه الصف A ومتجه العمود B .

EXAMPLE 6. The product AB of the row vector A and the column vector B, given

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 & 8 \end{bmatrix}_{1\times 4} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}_{4\times 1}$$

حيث إن A ، B لهما نفس العدد من العناصر فيمكن حسابها كالآتى :

$$AB = [2(7) + 6(3) + 5(9) + 8(4)] = [14 + 18 + 45 + 32] = [109]$$

والناتج للمتجهات :

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 9 \end{bmatrix}_{1\times 3} \qquad D = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

وحيث إن المتجهات لها نفس العدد من العناصر فإن CD :

$$CD = [6(8) + 1(5) + 9(3)] = [48 + 5 + 27] = [80]$$

ويلاحظ إنه عندما نعكس نظام الضرب فى أى من الحالات السابقة والحصول على ضرب العمود الصف (BA أو DC) فسوف نحصل على حلول مختلفة كلية . انظر المسألة 5.27 .

5.6 ضرب المصفوفات Multiplication of Matrices

تتطلب عملية ضرب المصفوفتين AB ذات الأبعاد $(r_1 \times c_1)$ و $(r_2 \times c_2)$ أن تكونا متماثلتين ، حيث $c_1 = r_2$ بمعنى أن عدد الأعمدة فى المصفوفة الأولى والتى تسمى "المصفوفة المتقدمة" يساوى عدد الصفوف فى المصفوفة الثانية والتى تسمى "المصفوفة الأخيرة" . وكل متجه صف فى المصفوفة المتقدمة يضرب فى كل متجه عمودى فى المصفوفة المتأخرة مستخدمًا قواعد ضرب متجهات الصف والعمود التى شرحت فى القسم 5.5 . وحاصل ضرب كل صف ـ عمود يسمى حاصل الضرب الداخلى وبالتالى يشكل عنصرًا فى المصفوفة الجديدة . فمثلاً كل عنصر c_{ij} من المصفوفة الجديدة C هو عدد مشتق من ضرب الصف i فى المصفوفة المتقدمة والعمود j فى المصفوفة الأخيرة . انظر الأمثلة 7 ، 8 والمسائل 5.17 إلى 5.31 .

EXAMPLE 7. Given

مثال 7 : إذا أعطيت :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 11 \\ 7 & 12 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 6 & 20 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 16 & 2 \\ 4 & 3 & 9 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

فى الواقع قبل إجراء عملية ضرب أى مصفوفة يجب أن نتحقق من تماثل المصفوفتين وأسهل طريقة لذلك هى أن نضع أبعاد المجموعتين فى الترتيب الذى ستضرب به ثم نعمل دائرة على العدد الأخير من المجموعة الأولى والعدد الأول من المجموعة الثانية . فإذا كان العددان متساويين ، أى عدد الأعمدة فى المصفوفة المتقدمة يساوى عدد الصفوف فى المصفوفة الأخيرة . فالمصفوفتان متماثلتان لعملية الضرب فى الترتيب المعطى . كما أن الأعداد خارج الدائرة تعطينا أبعاد المصفوفة الجديدة . ولذلك فإنه لـ AB

$$\underbrace{2 \times \boxed{3 = 3} \times 2}_{2 \times 2}$$

عدد الأعمدة فى المصفوفة (A) يساوى عدد الصفوف فى المصفوفة الأخيرة (B) ، 3 = 3 ، والمصفوفات متماثلة لعملية الضرب فى الترتيب المعطى . وأبعاد المصفوفة الجديدة سوف تكون 2 × 2 . وعندما تكون المصفوفتان مثل AB متماثلتين لعملية الضرب فإن المصفوفة الجديدة تسمى مصفوفة محددة (defined) .

أما BC

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] 3 \arrow[dr] & \times \boxed{2 = 2} \times & 3 \arrow[dl] \\ & 3 \times 3 & \end{tikzcd}$$

عدد الأعمدة فى B يساوى عدد الصفوف فى C ، 2 × 2 ، و B ، C متماثلتين فى الترتيب المعطى . والمصفوفة الجديدة BC محددة وسوف تكون مصفوفة أبعادها 3 × 3 .

أما AC

$$2 \times \boxed{3 \neq 2} \times 3$$

المصفوفتان A ، C غير متماثلتين لعملية الضرب ومن ثم فإن AC غير محددة .

مثال 8 : إذا أعطيت المصفوفتين المتماثلتين A و B من المثال 7 . فإننا نستطيع إيجاد المصفوفة الجديدة AB . وتذكر دائمًا أننا نستخدم الصفوف R من المصفوفة المتقدمة والأعمدة فقط C من المصفوفة الأخيرة حيث نضرب الصف الأول R_1 من المصفوفة المتقدمة فى العمود الأول C_1 من المصفوفة الأخيرة من أجل إيجاد العنصر الأول d_{11} (R_1C_1) من المصفوفة الجديدة D . وبعدئذ نضرب الصف الأول R_1 من المصفوفة المتقدمة فى العمود الثانى C_2 من المصفوفة الأخيرة لإيجاد d_{12} (R_1C_2) وحيث إنه لا يوجد أكثر من عمودين فى المصفوفة الأخيرة فإننا ننتقل إلى الصف الثانى من المصفوفة المتقدمة . وبعدئذ نضرب الصف الثانى R_2 من المصفوفة المتقدمة فى العمود الأول C_1 من المصفوفة الأخيرة لنحصل على d_{21} (R_2C_1) . وأخيرًا نضرب الصف الثانى R_2 من المصفوفة المتقدمة فى العمود الثانى C_2 من المصفوفة الأخيرة لنحصل على d_{22} (R_2C_2) . وهكذا فإن

$$AB = D = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 \\ R_2C_1 & R_2C_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4(8) + 9(6) + 11(7) & 4(2) + 9(20) + 11(12) \\ 7(8) + 12(6) + 3(7) & 7(2) + 12(20) + 3(12) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 163 & 320 \\ 149 & 290 \end{bmatrix}$$

كما أننا نحسب المصفوفة الجديدة AC باستخدام نفس الإجراء :

$$BC = E = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & R_1C_3 \\ R_2C_1 & R_2C_2 & R_2C_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8(5) + 2(4) & 8(16) + 2(3) & 8(2) + 2(9) \\ 6(5) + 20(4) & 6(16) + 20(3) & 6(2) + 20(9) \\ 7(5) + 12(4) & 7(16) + 12(3) & 7(2) + 12(9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & 134 & 34 \\ 110 & 156 & 192 \\ 83 & 148 & 122 \end{bmatrix}$$

انظر أيضًا المسائل 5.17 إلى 5.31 .

مثال 9 : افترض فى المثال رقم 1 أن سعر PC's $900 و Printers $500 و Monitors $350 و Modems $200 . ولإيجاد القيمة V للمخزون فى المحلات المختلفة ، عبر عن الأسعار كمتجه عمود P واضرب S فى P :

EXAMPLE 9. Referring to Example 1, assume that the price of PCs is $900, printers $500, monitors $350, and modems $200. To find the value V of the stock in the different stores, express the prices as a column vector P, and multiply S by P:

$$V = SP = \begin{bmatrix} 120 & 145 & 130 & 85 \\ 165 & 105 & 155 & 90 \\ 110 & 115 & 95 & 80 \\ 185 & 170 & 165 & 105 \end{bmatrix}_{4\times 4} \begin{bmatrix} 900 \\ 500 \\ 350 \\ 200 \end{bmatrix}_{4\times 1}$$

المصفوفات متماثلة والمصفوفة الجديدة سوف تكون 4×1 .

$$4 \times (4 = 4) \times 1$$

$$4 \times 1$$

وهكذا فإن :

$$V = \begin{bmatrix} R_1C_1 \\ R_2C_1 \\ R_3C_1 \\ R_4C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120(900) + 145(500) + 130(350) + 85(200) \\ 165(900) + 105(500) + 155(350) + 90(200) \\ 110(900) + 115(500) + 95(350) + 80(200) \\ 185(900) + 170(500) + 165(350) + 105(200) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 243{,}000 \\ 273{,}250 \\ 205{,}750 \\ 330{,}250 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن الناتج SP محدد أعلى حينما تضرب P متأخرة فى S . وبخلاف الجبر العادى فإنه حينما نضرب P متقدمة فى S فإن الناتج PS غير محدد .

$$4 \times (1 \neq 4) \times 4$$

5.7 المصفوفة ونظام المعادلات الخطية

Matrix Expression of a system of Linear Equations

يتيح الجبر الخطى الفرصة للتعبير بشكل مختصر لنظام المعادلات الخطية . فإذا أعطيت نظام المعادلات الخطية التالى :

$$5x_1 + 12x_2 = 32 \qquad (5.1a)$$

$$7x_1 - 3x_2 = 25 \qquad (5.1b)$$

حيث إن الحدود المتشابهة مرتبة فى نفس العمود كما هو الحال فى الجبر العادى .

(*a*) عين مصفوفة المعاملات A وذلك بنسخ المعاملات بنفس النظام كما أعطى أعلاه .

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} \qquad (5.2)$$

(*b*) عين متجه عمود المتغيرات X حيث تقرأ المتغيرات باتجاه الأسفل فى نفس النظام كما يظهرون من اليسار إلى اليمين .

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad (5.3)$$

(*c*) عين متجه العمود للثوابت B .

$$B=\begin{bmatrix}32\\25\end{bmatrix} \tag{5.4}$$

ومن ثم يمكن التعبير عن نظام المعادلات ببساطة ليكون

$$AX=B \tag{5.5}$$

كما هو موضح فى الأمثلة 10 ، 11 والمسائل 5.32 ، 5.33 .

مثال 10 : لكى نثبت أن $AX=B$ فإننا نمثل نظام المعادلات فى $(5.1)(a)$ ، $(5.1)(b)$ ونوجد الناتج AX ونعوض فى (5.5) .

EXAMPLE 10. To show that $AX=B$ accurately represents the system of equations in (*5.1a*) and (*5.1b*), find the product AX and substitute in (*5.5*).

فمن (5.2) و (5.3) .

$$AX=\begin{bmatrix}5 & 12\\7 & -3\end{bmatrix}_{2\times2}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}_{2\times1}=\begin{bmatrix}5x_1+12x_2\\7x_1-\ \ 3x_2\end{bmatrix}_{2\times1}$$

ونعوض فى (5.5) .

$$AX=B:\ \begin{bmatrix}5x_1+12x_2\\7x_1-3x_2\end{bmatrix}_{2\times1}=\begin{bmatrix}32\\25\end{bmatrix}_{2\times1}\qquad \text{Q.E.D.}$$

وهنا AX هو (2×1) متجه عمود لأن كل صف مكون من عنصر وحيد ولا نستطيع أن نختصره أكثر من خلال الطرح أو الجمع .

مثال 11 : باتباع الإجراء المحدد فى القسم 5.7 وعملية ضرب المصفوفة فإن نظام المعادلات :

EXAMPLE 11. By following the procedure outlined in Section 5.7 and mentally reversing the process of matrix multiplication, the system of equations

$$9w+4x-\ 5y+2z=10$$
$$3w-7x+11y-6z=-2$$

يمكن أن نعبر عنه برموز المصفوفة على النحو الآتى :

$$\begin{bmatrix}9 & 4 & -5 & 2\\3 & -7 & 11 & -6\end{bmatrix}_{2\times4}\begin{bmatrix}w\\x\\y\\z\end{bmatrix}_{4\times1}=\begin{bmatrix}10\\-2\end{bmatrix}_{2\times1}$$

وبوضع A تساوى مصفوفة المعاملات ، W تساوى متجه عمود المتغيرات ، و B تساوى متجه عمود الثوابت فإن نظام المعادلات يمكن أن نعبر عنه بصيغة المصفوفة .

$$A_{2\times4}W_{4\times1}=B_{2\times1}$$

وتأكد من خلال عملية الضرب .

5.8 المصفوفة الممددة Augmented Matrix

إذا أعطيت نظام المعادلات فى صيغة المصفوفة $AX=B$ فإن المصفوفة الممددة A/B هى مصفوفة المعاملات A مع متجه عمود الثوابت B الذى وضع بجوارها ومفصولاً عنها بخط . ولذلك فإن لنظام المعادلات فى $(5.1)(a)$ و $(5.1)(b)$.

$$A|B = \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 12 & 32 \\ 7 & -3 & 25 \end{array}\right]$$

مثال 12 : المصفوفة الممددة A/B لـ

EXAMPLE 12. The augmented matrix $A|B$ for

$$3x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 58$$

$$6x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 22$$

$$x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 18$$

وتكون

$$A|B = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 8 & 4 & 58 \\ 6 & 5 & -2 & 22 \\ 1 & -7 & 9 & 18 \end{array}\right]$$

5.9 عمليات الصف Row Operations

تتطلب عمليات الصف تطبيق العمليات الجبرية البسيطة على صفوف المصفوفة . وهـذه العمليـات لا تحـدث تغييرًا فى العلاقة الخطية وهى : (1) يمكن تبديل أى صفين من صفوف المصفوفة (2) ويمكن ضرب أى صف أو صفوف بمقدار ثابت (3) الصف الذى ضرب بمقدار ثابت يمكن جمعه أو طرحه من أى صف آخر كما هو مبيـن بالمثال 13 .

مثال 13 : عمليات الصف موضحة أسفل بدلالة الجبر العادى . فإذا أعطيت :

EXAMPLE 13. Row operations are demonstrated below in terms of ordinary algebra for simplicity. Given

$$6x + 5y = 43 \qquad (5.6)$$

$$8x + 12y = 84 \qquad (5.7)$$

ودون أى تغير فى العلاقة الخطية يمكن إجراء ما يلى :

1. استبدال الصفين .

$$8x + 12y = 84$$

$$6x + 5y = 43$$

2. ضرب أى صف بمقدار ثابت . وهنا نضرب $8x + 12y = 84$ فى $\frac{1}{4}$ لنحصل على

$$2x + 3y = 21$$

$$6x + 5y = 43$$

3. نطرح الصف الذى ضرب من الآخر . وهنا نطرح $3(2x + 3y = 21)$ من $6x + 15y = 43$ لنحصل على

$$\begin{array}{r} 6x + 5y = 43 \\ \underline{-6x - 9y = -63} \\ -4y = -20 \end{array}$$

$$y = 5$$

4. وبالتعويض عن $y = 5$ فى (4.6) أو (5.7) نحصل على :

$$6x + 5(5) = 43$$

$$x = 3$$

5.10 طريقة جاوس لحل المعادلات الخطية

Gaussian Method of Solving Linear Equations

لكى تستخدم طريقة الحذف لجاوس فى حل نظام المعادلات الخطية فإننا نعبر عن نظام المعادلات كمصفوفة ممددة ثم نطبق عمليات الصف على المصفوفة الممددة حتى يتم اختصار مصفوفة المعاملات الأصلية والتى على يسار الخط إلى مصفوفة الوحدة ـ ومصفوفة الوحدة هى مصفوفة مربعة والتى يتكون قطرها من عناصر يساوى كل منها واحد وأما بقية العناصر فمساوية للصفر . وحل نظام المعادلات الأصلية يوجد فى متجه العمود إلى اليمين من الخط انظر مثال 14 .

ولكى نحول مصفوفة المعاملات إلى مصفوفة الوحدة فإنه يجب أن نعمل على طول القطر . فأولاً نحصل على 1 فى الموقف a_{11} لمصفوفة المعاملات ، ثم نستخدم عمليات الصف للحصول على صفر فى أى مكان آخر فى العمود الأول . وبعدها نحصل على 1 فى الموقف a_{22} لمصفوفة المعاملات ونستخدم عمليات الصف للحصول على صفر فى أى مكان آخر فى العمود الثانى . واستمر فى الحصول على الوحدات طوال القطر ونستمر فى تسوية الأعمدة حتى تكتمل مصفوفة الوحدة . انظر مثال 14 والمسائل 5.34 إلى 5.39 .

مثال 14 : طريقة الحذف لجاوس مستخدمة أسفل لحل X_1 و X_2 إذا أعطيت نظام المعادلات الخطية .

EXAMPLE 14. The Gaussian elimination method is used below to solve for x_1 and x_2, given the system of linear equations:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 12x_2 &= 102 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 48 \end{aligned}$$

أولاً نعبر عن المعادلات فى صيغة المصفوفة الممددة :

$$A|B = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 12 & 102 \\ 4 & 5 & 48 \end{array}\right]$$

ثم

1a. نضرب الصف الأول فى $\frac{1}{3}$ لنحصل على 1 فى الموقع a_{11} .

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 34 \\ 4 & 5 & 48 \end{array}\right]$$

1b. نضرب الصف الأول فى 4 ونطرحه من الصف الثانى لتسوية العمود الأول .

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 34 \\ 0 & -11 & -88 \end{array}\right]$$

2a. نضرب الصف الثانى فى $-\frac{1}{11}$ لنحصل على 1 فى الموقع a_{22} .

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 34 \\ 0 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

2b. نضرب الصف الثانى فى 4 ونطرحه من الصف الأول لتسوية العمود الثانى

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

والحل هو $x_1 = 2$ ، $x_2 = 8$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\8\end{bmatrix}$$

$$x_1+0=2$$

$$0+x_2=8$$

مسائل محلولة

شكل المصفوفة Matrix Formal

5.1. (*a*) حدد أبعاد المصفوفات التالية . (*b*) أوجد المصفوفة المدورة وحدد أبعادها الجديدة .

5.1. **(*a*) Give the dimensions of each of the following matrices. (*b*) Find their transposes and indicate the new dimensions.**

$$A=\begin{bmatrix}4 & 8\\7 & 2\\3 & 5\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}3 & 4 & 4\\1 & 7 & 9\\9 & 2 & 6\\8 & 5 & 4\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}6\\13\\9\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}5 & 2 & 3 & 4\\9 & 8 & 1 & 9\end{bmatrix}\qquad E=[-9\quad 5\quad 2\quad -3\quad 7]\qquad F=\begin{bmatrix}6 & 8 & 3 & 4\\4 & 5 & 9 & 3\\7 & 1 & 2 & 9\end{bmatrix}$$

(*a*) أبعاد المصفوفات هى : $A=3\times2$ ، $B=4\times3$ ، $C=3\times1$ ، $D=2\times4$ ، $E=1\times5$ ، $F=3\times4$. ويسمى C متجه العمود و E متجه الصف .

(*b*) تدوير المصفوفة A يعنى تحويل صفوف A إلى أعمدة وأعمدة A إلى صفوف .

$$A'=\begin{bmatrix}4 & 7 & 3\\8 & 2 & 5\end{bmatrix}_{2\times3}\qquad B'=\begin{bmatrix}3 & 1 & 9 & 8\\4 & 7 & 2 & 5\\4 & 9 & 6 & 4\end{bmatrix}_{3\times4}\qquad C'=[6\quad 13\quad 9]_{1\times3}$$

$$D'=\begin{bmatrix}5 & 9\\2 & 8\\3 & 1\\4 & 9\end{bmatrix}_{4\times2}\qquad E'=\begin{bmatrix}-9\\5\\2\\-3\\7\end{bmatrix}_{5\times1}\qquad F'=\begin{bmatrix}6 & 4 & 7\\8 & 5 & 1\\3 & 9 & 2\\4 & 3 & 9\end{bmatrix}_{4\times3}$$

5.2. استخدم معرفتك بالرموز لتكملة المصفوفة التالية إذا أعطيت $a_{12}=9$ ، $a_{21}=-4$ ، $a_{13}=-5$ ، $a_{31}=2$ ، $a_{23}=7$ ، $a_{32}=3$.

5.2. Use your knowledge of subscripts and addresses to complete the following matrix, given $a_{12}=9$, $a_{21}=-4$, $a_{13}=-5$, $a_{31}=2$, $a_{23}=7$, and $a_{32}=3$.

$$A=\begin{bmatrix}8 & \_\_ & \_\_\\\_\_ & 1 & \_\_\\\_\_ & \_\_ & 6\end{bmatrix}$$

طالما أن الرموز تعطى دائمًا بنظام الصف ـ العمود فإن $a_{12}=9$ تعنى أن a تقع فى الصف الأول والعمود الثانى $a_{21}=-4$ تعنى أن 4- تظهر فى الصف الثانى والعمود الأول ، وهكذا . ولذلك

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 9 & -5 \\ -4 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

5.3. شركة ذات أربعة منافذ للبيع بالتجزئة لديها 35 جهاز تليفزيون (t) و 60 استريو (s) و 55 فيديو (v) و 45 آلة تصوير (c) فى المحل الأول و $80t$ ، $65s$ ، $50v$ ، $38c$ فى المحل الثانى و $29t$ ، $36s$ ، $24v$ ، $32c$ فى المحل الثالث و $62t$ ، $49s$ ، $54v$ ، $33c$ فى المحل الرابع . عبر عن المخزون الحالى فى صيغة مصفوفة .

5.3. A company with four retail stores has 35 TVs t, 60 stereos s, 55 VCRs (videocassette recorders) v, and 45 camcorders c in store 1; $80t$, $65s$, $50v$, and $38c$ in store 2; $29t$, $36s$, $24v$, and $32c$ in store 3; and $62t$, $49s$, $54v$, and $33c$ in store 4. Express present inventory in matrix form.

المحلات	t	s	v	c
1	35	60	55	45
2	80	65	50	38
3	29	36	24	32
4	62	49	54	33

Matrix Addition and Subtraction جمع وطرح المصفوفة

5.4. Find the sum $A + B$ for the following matrices:

5.4. أوجد مجموع المصفوفات $A + B$ التالية :

(*a*) $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} 6+3 & 5+7 \\ 8+9 & 2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 17 & 6 \end{bmatrix}$$

(*b*) $A = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -6 & -9 \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} -4+\ 5 & 7+(-2) \\ 1+(-6) & -8+(-9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -5 & -17 \end{bmatrix}$$

(*c*) $A = [15 \quad 4 \quad 3 \quad 11] \qquad B = [8 \quad -6 \quad -9 \quad 5]$

$$A + B = [23 \quad -2 \quad -6 \quad 16]$$

(*d*) $A = \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ -4 & 18 \\ 7 & -6 \\ 24 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 7 & -4 \\ 6 & 32 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} 21 & -3 \\ 3 & 14 \\ 13 & 26 \\ 19 & -6 \end{bmatrix}$$

5.5. فى المسألة 3.5 إذا أرسلت الشركة الأم إلى المحلات الفرعية التابعة لها مجموعة من المنتجات .

5.5. **The parent company in Problem 5.3 sends out deliveries to its stores:**

$$D = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 9 & 5 \\ 4 & 7 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 0 & 8 \\ 5 & 9 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

What is the new level of inventory?

ما المستوى الجديد للمخزون ؟

$$I_2 = I_1 + D = \begin{bmatrix} 35 & 60 & 55 & 45 \\ 80 & 65 & 50 & 38 \\ 29 & 36 & 24 & 32 \\ 62 & 49 & 54 & 33 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 6 & 9 & 5 \\ 4 & 7 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 0 & 8 \\ 5 & 9 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 66 & 64 & 50 \\ 84 & 72 & 55 & 40 \\ 35 & 39 & 24 & 40 \\ 67 & 58 & 61 & 37 \end{bmatrix}$$

5.6. أوجد الفرق $A - B$ بين المصفوفات التالية :

5.6. **Find the difference $A - B$ for each of the following:**

(*a*) $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A - B = \begin{bmatrix} 6-5 & 3-8 & 7-9 \\ 2-4 & 9-1 & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 \\ -2 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

(*b*) $A = \begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 18 \\ 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$A - B = \begin{bmatrix} 13-8 \\ 9-3 \\ 18-15 \\ 5-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(*c*) $A = \begin{bmatrix} 14 & 8 & -3 \\ 6 & 19 & 11 \\ 20 & -1 & 18 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 5 \\ -8 & 16 & 7 \\ 13 & 2 & 12 \end{bmatrix}$

$$A - B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -8 \\ 14 & 3 & 4 \\ 7 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

5.7. إذا كان التقرير الشهرى للمبيعات R للشركة فى المسألة 5.5 ؟

5.7. A monthly report R on sales for the company in Problem 5.5

$$R = \begin{bmatrix} 21 & 16 & 36 & 18 \\ 44 & 26 & 21 & 19 \\ 11 & 17 & 13 & 20 \\ 33 & 28 & 34 & 12 \end{bmatrix}$$

What is the inventory level I_3 at the end of the month?

ما مستوى المخزون I_3 فى نهاية الشهر ؟

$$I_3 = I_2 - R = \begin{bmatrix} 43 & 66 & 64 & 50 \\ 84 & 72 & 55 & 40 \\ 35 & 39 & 24 & 40 \\ 67 & 58 & 61 & 37 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 21 & 16 & 36 & 18 \\ 44 & 26 & 21 & 19 \\ 11 & 17 & 13 & 20 \\ 33 & 28 & 34 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 50 & 28 & 32 \\ 40 & 46 & 34 & 21 \\ 24 & 22 & 11 & 20 \\ 34 & 30 & 27 & 25 \end{bmatrix}$$

5.8. Given

5.8. إذا أعطيت :

$$A = [59 \quad 24] \qquad B = \begin{bmatrix} 39 \\ 44 \end{bmatrix} \qquad C = [7 \quad 4 \quad 8]$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 9 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 14 \\ 25 \\ 19 \end{bmatrix}$$

حدد ما إذا كانت النواتج محددة أى متماثلة لعملية الضرب على النحو المعطى . وإذا كانت متماثلة لعملية الضرب حدد أبعاد المصفوفة الجديدة .

(a) *AB* ، (b) *AE* ، (c) *EB* ، (d) *BE* ، (e) *CD* ، (f) *CF* ، (g) *DF* ، (h) *FD* ، (i) *FC* .

(a) أبعاد *AB* هى $1 \times \boxed{2 = 2} \times 1$. المصفوفة *AE* محددة وأبعادها 1×1 .
المصفوفة *AB* محددة لأن الأعداد داخل الدائرة المنقطعة تحدد أن عدد الأعمدة فى المصفوفة المتقدمة *A* يساوى عدد الصفوف فى المصفوفة الأخيرة *B* . والأعداد خارج الدائرة تحدد أن أبعاد المصفوفة الجديدة هى 1×1 .

(b) أبعاد *AE* هى $1 \times \boxed{2 = 2} \times 2$. المصفوفة *AE* محددة وأبعادها 1×2 .

(c) أبعاد *EB* هى $2 \times \boxed{2 = 2} \times 1$. المصفوفة *EB* محددة وأبعادها 2×1 .

(d) أبعاد *BE* هى $2 \times \boxed{1 \neq 2} \times 2$. المصفوفة *BE* غير محددة أو غير متماثلة لعملية الضرب فى الترتيب المعطى . لاحظ أن *EB* فى (c) محددة . وهذا يوضح أن ضرب المصفوفات غير تبادلى .

(e) أبعاد *CD* هى $1 \times \boxed{3 = 3} \times 3$. المصفوفة *CD* محددة وأبعادها 1×3 .

(f) أبعاد *CF* هى $1 \times \boxed{3 = 3} \times 1$. المصفوفة *CF* محددة وأبعادها 1×1 .

(g) أبعاد *DF* هى $3 \times \boxed{3 = 3} \times 1$. المصفوفة *DF* محددة وأبعادها 3×1 .

(h) أبعاد *FD* هى $3 \times \boxed{1 \neq 3} \times 3$. المصفوفات غير متماثلة لعملية الضرب فى الترتيب المعطى . على الرغم من أن *DF* فى (g) محددة ، ولكن *FD* غير محددة .

(i) أبعاد *FC* هى $3 \times \boxed{1 = 1} \times 3$. المصفوفة *FC* محددة وأبعادها 3×3 . قارن هذا الحل مع الناتج 1×1 للمصفوفة *CF* فى الجزء (f) .

Scalar and Vector Multiplication العددى وضرب المتجه

5.9 Determine *Ak*, given

5.9. حدد *Ak* إذا علمت

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 9 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \qquad k = 5$$

هنا *k* عدد وضرب العددى ممكن مع أى مصفوفة .

$$Ak = \begin{bmatrix} 6(5) & 1(5) \\ 9(5) & 2(5) \\ 7(5) & 4(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 5 \\ 45 & 10 \\ 35 & 20 \end{bmatrix}$$

5.10. Find kA, given

5.10. حدد Ak إذا علمت

$$k = -3 \qquad A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 2 \\ -9 & 5 & -6 \\ 1 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$kA = \begin{bmatrix} -3(7) & -3(-4) & -3(2) \\ -3(-9) & -3(5) & -3(-6) \\ -3(1) & -3(-8) & -3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 & 12 & -6 \\ 27 & -15 & 18 \\ -3 & 24 & -3 \end{bmatrix}$$

5.11. A محل لبيع أدوات التزحلق على الجليد يعطى خصمًا قدره 25% على السلع S ، p ، b فى نهاية فصل الشتاء . افترض أن V_1 هى قيمة المخزون فى ثلاثة من فروعه قبل الخصم . أوجد قيمة V_2 بعد الخصم حيث V_1 هى :

5.11. A ski shop discounts all its skis, poles, and bindings by 25 percent at the end of the season. Assuming that V_1 is the value of stock in its three branches prior to the discount, find the value V_2 after the discount when

$$V_1 = \begin{bmatrix} 8400 & 7200 & 6800 \\ 4600 & 5400 & 5600 \\ 6200 & 7800 & 7400 \end{bmatrix}$$

A تنخفض بمقدار 25% . هذا يعنى أن الأجهزة تباع 75% من قيمتها الأصلية ولذلك فإن $V_2 = 0.75\ V_1$

$$V_2 = 0.75 \begin{bmatrix} 8400 & 7200 & 6800 \\ 4600 & 5400 & 5600 \\ 6200 & 7800 & 7400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6300 & 5400 & 5100 \\ 3450 & 4050 & 4200 \\ 4650 & 5850 & 5550 \end{bmatrix}$$

5.12. Find AB, given

5.12. أوجد AB إذا أعطيت :

$$A = [8 \quad 3 \quad 6] \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

الناتج AB يعرف بـ $1 \times 3 = 3 \times 1$ والناتج سوف يكون مصفوفة 1×1 مشتقة من خلال ضرب كل عنصر من متجه الصف A فى العنصر المناظر له فى متجه العمود B ثم نجمع النواتج .

$$AB = [8(2) + 3(5) + 6(7)] = [16 + 15 + 42] = [73]$$

5.13. Find AB, given

5.13. أوجد AB إذا أعطيت

$$A = [5 \quad 12] \qquad B = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \end{bmatrix}$$

الناتج AB يعرف $1 \times 2 = 2 \times 1$

$$AB = [5(21) + 12(10)] = [225]$$

5.14. Find AB, given

5.14. أوجد AB إذا أعطيت

$$A = [6 \quad 3 \quad 5 \quad 8] \qquad B = \begin{bmatrix} 11 \\ 15 \\ 18 \\ 9 \end{bmatrix}$$

ويعرف الناتج $1 \times 4 = 4 \times 1$

$$AB = [6(11) + 3(15) + 5(18) + 8(9)] = [273]$$

5.15. إذا كان سعر التليفزيون $400 وسعر الاستريو $300 وسعر الفيديو $250 وسعر آلة التصوير $500 استخدم ضرب المتجه لإيجاد قيمة المخزون فى المنفذ الثانى فى المسألة 5.3 .

5.15. If the price of a TV is $400, the price of a stereo is $300, the price of a VCR is $250, and the price of a camcorder is $500, use vector multiplication to find the value of stock for outlet 2 in Problem 5.3.

قيمة المخزون هى $V = QP$ والحجم الطبيعى للمخزون فى المنفذ الثانى فى صيغة متجه هى $Q = [80\ 65\ 50\ 38]$. ومتجه السعر p يمكن كتابته كالآتى :

$$P = \begin{bmatrix} 400 \\ 300 \\ 250 \\ 500 \end{bmatrix}$$

إذاً الناتج QP يعرف $1 \times 4 = 4 \times 1$ ولذلك

$$V = QP = 80(400) + 65(300) + 50(250) + 38(500) = 83{,}000$$

5.16. أوجد قيمة المخزون فى المنفذ الثالث من المسألة 5.3 .

5.16. Redo Problem 5.15 for outlet 3 in Problem 5.3.

وهنا $Q = [29\ 36\ 24\ 32]$ أما P فتبقى كما هى

$$V = QP = 29(400) + 36(300) + 24(250) + 32(500) = 44{,}400$$

ضرب المصفوفة Matrix Multiplication

5.17. حدد ما إذا كان الناتج AB محدداً . وعين أبعاد المصفوفة وأوجد المصفوفة الجديدة ، إذا علمت أن :

5.17. Determine whether the product AB is defined, indicate what the dimensions of the product matrix will be, and find the product matrix, given

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

الناتج AB محدد حيث $2 \times 2 = 2 \times 2$ ، أبعاد المصفوفة الجديدة 2×2 .

ضرب المصفوفة ينجز بسلسلة بسيطة من عمليات ضرب متجه الصف ـ العمود لتحديد العناصر المختلفة من المصفوفة الجديدة . فالعنصر a_{11} من المصفوفة الجديدة يتحدد بضرب الصف الأول R_1 من المصفوفة المتقدمة والعمود الأول c_1 من المصفوفة الأخيرة . والعنصر a_{12} من المصفوفة الجديدة يتحدد بناتج الصف الأول R_1 من المصفوفة المتقدمة والعمود الثانى c_2 من المصفوفة الأخيرة . وبشكل عام فإن العنصر a_{ij} من المصفوفة الجديدة يتحدد بناتج الصف R_i من المصفوفة المتقدمة والعمود c_j من المصفوفة الأخيرة ولذلك :

$$AB = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 \\ R_2C_1 & R_2C_2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 8(2) + 5(4) & 8(7) + 5(1) \\ 6(2) + 3(4) & 6(7) + 3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 61 \\ 24 & 45 \end{bmatrix}$$

5.18. Redo Problem 5.17, given

5.18. إذا أعطيت :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 8 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الجديدة AB محددة $2 \times \boxed{2 = 2} \times 3$ ، وأبعاد المصفوفة هى 2×3 .

$$AB = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & R_1C_3 \\ R_2C_1 & R_2C_2 & R_2C_3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 4(3)+7(8) & 4(1)+7(2) & 4(6)+7(9) \\ 2(3)+5(8) & 2(1)+5(2) & 2(6)+5(9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 68 & 18 & 87 \\ 46 & 12 & 57 \end{bmatrix}$$

5.19. Redo Problem 5.17, given

5.19. إذا أعطيت :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 6 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

الناتج AB غير محدد $2 \times \boxed{2 \neq 3} \times 2$ ، المصفوفات غير متماثلة فى الترتيب المعطى ، عدد الأعمدة (2) فى A لا يساوى عدد الصفوف (3) فى B . ولذلك لا يمكن ضرب المصفوفات فى الترتيب المعطى .

5.20. Redo Problem 5.17 for *BA* in Problem 5.19.

5.20. أوجد AB من المسألة 5.19 .

الناتج AB محدد حيث $3 \times \boxed{2 = 2} \times 2$ ، أبعاد AB 3×2 .

$$BA = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 6 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 \\ R_2C_1 & R_2C_2 \\ R_3C_1 & R_3C_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8(3)+1(9) & 8(5)+1(2) \\ 6(3)+7(9) & 6(5)+7(2) \\ 4(3)+2(9) & 4(5)+2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 42 \\ 81 & 42 \\ 30 & 24 \end{bmatrix}$$

5.21. أوجد AB' من المسألة 5.19 حيث B' هى تدوير المصفوفة B .

5.21. Redo Problem 5.17 for AB' in Problem 5.19, where B' is the transpose of B:

$$B' = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

الناتج AB' محددة $2 \times \boxed{2 = 2} \times 3$ ، أبعاد AB' هى 2×3 .

$$AB' = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & R_1C_3 \\ R_2C_1 & R_2C_2 & R_2C_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3(8)+5(1) & 3(6)+5(7) & 3(4)+5(2) \\ 9(8)+2(1) & 9(6)+2(7) & 9(4)+2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 53 & 22 \\ 74 & 68 & 40 \end{bmatrix}$$

يلاحظ من المسائل من 5.19 إلى 5.21 أن $AB \neq BA \neq AB'$. يعكس ذلك حقيقة أن ضرب المصفوفات ليس إبدالى.

5.22. Find the product *CD*, given

5.22. أوجد الناتج CD إذا أعطيت

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 9 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

الناتج CD محددة $3 \times \boxed{2=2} \times 3$ ، أبعادها هى 3×3 .

$$CD = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & R_1C_3 \\ R_2C_1 & R_2C_2 & R_2C_3 \\ R_3C_1 & R_3C_2 & R_3C_3 \end{bmatrix}$$

$$CD = \begin{bmatrix} 4(5)+1(4) & 4(8)+1(3) & 4(6)+1(1) \\ 6(5)+9(4) & 6(8)+9(3) & 6(6)+9(1) \\ 7(5)+2(4) & 7(8)+2(3) & 7(6)+2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 35 & 25 \\ 66 & 75 & 45 \\ 43 & 62 & 44 \end{bmatrix}$$

5.23. Find EF, given

5.23. أوجد EF إذا أعطيت :

$$E = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

EF محددة $2 \times \boxed{3=3} \times 2$ وأبعادها 2×2 .

$$EF = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 \\ R_2C_1 & R_2C_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9(8)+2(2)+4(5) & 9(3)+2(7)+4(9) \\ 6(8)+5(2)+1(5) & 6(3)+5(7)+1(9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96 & 77 \\ 63 & 62 \end{bmatrix}$$

5.24. Find AB, given

5.24. أوجد AB إذا أعطيت :

$$A = [2 \quad 6 \quad 5] \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 9 \\ 4 & 3 & 6 \\ 5 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

AB محددة $3 \times \boxed{3=3} \times 1$ وأبعادها 3×1 .

$$AB = [R_1C_1 \quad R_1C_2 \quad R_1C_3]$$

$$= [2(7)+6(4)+5(5) \qquad 2(1)+6(3)+5(8) \qquad 2(9)+6(6)+5(2)]$$

$$= [63 \quad 60 \quad 64]$$

5.25. Find CD, given

5.25. أوجد CD إذا أعطيت :

$$C = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 5 & 9 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

CD غير محددة : $3 \times \boxed{1 \neq 3} \times 3$. والضرب غير ممكن فى الترتيب المعطى .

5.26. Find DC from Problem 5.25.

5.26. أوجد DC من المسألة 5.25 .

DC محددة : $1 \times \boxed{3=3} \times 3$ وأبعادها 1×3 .

$$DC = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 5 & 9 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R_1C_1 \\ R_2C_1 \\ R_3C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(3)+7(7)+4(5) \\ 5(3)+9(7)+1(5) \\ 3(3)+6(7)+2(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 83 \\ 61 \end{bmatrix}$$

5.27. Find EF, given

‏5.27. أوجد EF إذا أعطيت :

$$E=\begin{bmatrix}8\\2\\5\end{bmatrix}\qquad F=[3\quad 6\quad 4]$$

‏EF محددة $3\times\boxed{1=1}\times 3$. وأبعادها 3×3 .

$$EF=\begin{bmatrix}R_1C_1 & R_1C_2 & R_1C_3\\ R_2C_1 & R_2C_2 & R_2C_3\\ R_3C_1 & R_3C_2 & R_3C_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8(3) & 8(6) & 8(4)\\ 2(3) & 2(6) & 2(4)\\ 5(3) & 5(6) & 5(4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24 & 48 & 32\\ 6 & 12 & 8\\ 15 & 30 & 20\end{bmatrix}$$

5.28. Find AB, given

‏5.28. أوجد AB إذا أعطيت :

$$A=[6\quad 1\quad 9]\qquad B=\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$$

‏AB غير محددة $1\times\boxed{3\neq 2}\times 1$.

5.29. Find BA from Problem 5.28.

‏5.29. أوجد BA من المسألة 5.28 .

‏BA محددة : $3\times\boxed{1=1}\times 2$ وأبعادها 2×3 .

$$BA=\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}[6\quad 1\quad 9]$$

$$=\begin{bmatrix}R_1C_1 & R_1C_2 & R_1C_3\\ R_2C_1 & R_2C_2 & R_2C_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5(6) & 5(1) & 5(9)\\ 2(6) & 2(1) & 2(9)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30 & 5 & 45\\ 12 & 2 & 18\end{bmatrix}$$

‏5.30. استخدم مصفوفة المخزون للشركة من المسألة 5.3 ومتجه الأسعار من المسألة 5.15 لتحديد قيمة المخزون فى المنافذ الأربعة للشركة .

5.30. Use the inventory matrix for the company in Problem 5.3 and the price vector from Problem 5.15 to determine the value of the inventory in all four of the company's outlets.

‏$V=QP$ ، المصفوفة QP محددة $1\times\boxed{4=4}\times 4$ وأبعادها 1×4 .

$$V=\begin{bmatrix}35 & 60 & 55 & 45\\ 80 & 65 & 50 & 38\\ 29 & 36 & 24 & 32\\ 62 & 49 & 54 & 33\end{bmatrix}\begin{bmatrix}400\\300\\250\\500\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}R_1C_1\\R_2C_1\\R_3C_1\\R_4C_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}35(400)+60(300)+55(250)+45(500)\\ 80(400)+65(300)+50(250)+38(500)\\ 29(400)+36(300)+24(250)+32(500)\\ 62(400)+49(300)+54(250)+33(500)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}68{,}250\\83{,}000\\44{,}400\\69{,}500\end{bmatrix}$$

‏5.31. أوجد ناتج ضرب المصفوفات التالية ومصفوفات الوحدة المناظرة لها . إذا أعطيت

5.31. Find the product of the following matrices and their corresponding identity matrices, given

(*a*) $A=\begin{bmatrix}4 & 9\\ 3 & 7\end{bmatrix}$ (*b*) $B=\begin{bmatrix}2 & 9 & 4\\ 5 & 8 & 1\\ 3 & 7 & 6\end{bmatrix}$

(a)

$$AI = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 \\ R_2C_1 & R_2C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(1)+9(0) & 4(0)+9(1) \\ 3(1)+7(0) & 3(0)+7(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

(b)

$$BI = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 5 & 8 & 1 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & R_1C_3 \\ R_2C_1 & R_2C_2 & R_2C_3 \\ R_3C_1 & R_3C_2 & R_3C_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(1)+9(0)+4(0) & 2(0)+9(1)+4(0) & 2(0)+9(0)+4(1) \\ 5(1)+8(0)+1(0) & 5(0)+8(1)+1(0) & 5(0)+8(0)+1(1) \\ 3(1)+7(0)+6(0) & 3(0)+7(1)+6(0) & 3(0)+7(0)+6(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 5 & 8 & 1 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

بضرب المصفوفة فى مصفوفة الوحدة المتماثلة ـ بغض النظر عن ترتيب الضرب ـ لا يؤثر على المصفوفة الأصلية (أى تبقى كما هى) $AI = A = IA$ ، $BI = B = IB$ ، وهذا يكافئ الضرب فى واحد فى الجبر العادى .

Gaussian Method of Solving Linear Equations طريقة جاوس لحل المعادلات الخطية

5.32. عبر عن نظام المعادلات الخطية التالية (*a*) فى صيغة مصفوفة (*b*) فى صيغة مصفوفة ممتدة ، وافترض أن A هى مصفوفة المعاملات و X متجه عمودى للمتغيرات و B متجه عمودى للثوابت .

5.32. Express the following system of linear equations (*a*) in matrix form and (*b*) as an augmented matrix, letting $A =$ the coefficient matrix, $X =$ the column vector of variables, and $B =$ the column vector of constants.

$$8x_1 + 3x_2 = 28$$
$$5x_1 + 9x_2 = 46$$

(*a*)

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 46 \end{bmatrix}$$

(*b*)

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 8 & 3 & 28 \\ 5 & 9 & 46 \end{array}\right]$$

5.33. Redo Problem 5.32, given

5.33. أعد حل 5.32 إذا أعطيت :

$$5x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 35$$
$$4x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 32$$
$$x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 17$$

(*a*)

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 32 \\ 17 \end{bmatrix}$$

(*b*)

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 9 & 2 & 35 \\ 4 & 7 & 6 & 32 \\ 1 & 3 & 8 & 17 \end{array}\right]$$

يلاحظ من المسائل 5.32، 5.33 ترتيب المعادلات بحيث تكون المتغيرات منظمة تحت بعضها ، حتى تكون معاملات التغير الأول يمثلها العمود الأول ومعاملات التغير الثانى يمثلها العمود الثانى .. وهكذا. وبالتالى تكون مصفوفة المعاملات بنفس ترتيب نظام المعادلات الخطية . وحيث أن معاملات كل معادلة تكوّن صف منفصل ، يكون ضرب المصفوفات يمثل غالبًا عمليات صفوف ممتدة ، وغالبًا ما تمثل المتغيرات فى متجه عمودى له نفس الدرجة التى تظهر فى المعادلات . فإذا لم يظهر متغير ما فى معادلة معينة فإن معامله سوف يساوى صفرًا . انظر المسألة 5.39 .

5.34. استخدم طريقة الحذف لجاوس لحل نظام المعادلات الخطية التالية :

5.34. Use the Gaussian elimination method to solve the following system of linear equations:

$$3x_1 + 8x_2 = 53$$
$$6x_1 + 2x_2 = 50$$

أولاً عبر عن المعادلات فى صيغة مصفوفة ممددة .

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 8 & 53 \\ 6 & 2 & 50 \end{array}\right]$$

ثم نطبق عمليات الصف لتحويل مصفوفة المعاملات على الجانب الأيسر إلى مصفوفة الوحدة . والطريقة السهلة لعمل ذلك هى تحويل العنصر a_{11} إلى واحد ونصفى العمود الأول ثم نحول العنصر a_{22} إلى واحد ونصفى العمود الثانى وهلم جرًا كما يلى :

$1a$. نضرب الصف الأول فى $\frac{1}{3}$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{8}{3} & \frac{53}{3} \\ 6 & 2 & 50 \end{array}\right]$$

$1b$. نضرب الصف الأول فى 6 ونطرحه من الصف الثانى .

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{8}{3} & \frac{53}{3} \\ 0 & -14 & -56 \end{array}\right]$$

$2a$. نضرب الصف الثانى فى $-\frac{1}{14}$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{8}{3} & \frac{53}{3} \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$2b$. نضرب الصف الثانى فى $\frac{8}{3}$ ونطرحه من الصف الأول .

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

إذا $\bar{x}_1 = 7$ ، $\bar{x}_2 = 4$ حيث

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

5.35. أعد حل 5.34 إذا أعطيت :

5.35. Redo Problem 5.34, given

$$4x_1 + 9x_2 = 62$$
$$5x_1 + 8x_2 = 58$$

المصفوفة الممددة

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 9 & 62 \\ 5 & 8 & 58 \end{array}\right]$$

1a. نضرب الصف الأول فى $\frac{1}{4}$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{9}{4} & \frac{31}{2} \\ 5 & 8 & 58 \end{array}\right]$$

1b. نضرب الصف الأول فى 5 ونطرحه من الصف الثانى .

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{9}{4} & \frac{31}{2} \\ 0 & -\frac{13}{4} & -\frac{39}{2} \end{array}\right]$$

2a. نضرب الصف الثانى فى $-\frac{4}{13}$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{9}{4} & \frac{31}{2} \\ 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

2b. نضرب الصف الثانى فى $\frac{9}{4}$ ونطرحه من الصف الأول .

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

إذا $\bar{x}_1 = 2$ ، $\bar{x}_2 = 6$

5.36. أعد حل 5.34 إذا أعطيت :

5.36. Redo Problem 5.34, given

$$6x_1 + 4x_2 = 47$$
$$2x_1 + 9x_2 = 77$$

المصفوفة الممددة

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 47 \\ 2 & 9 & 77 \end{array}\right]$$

1a. نضرب الصف الأول فى $\frac{1}{6}$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{47}{6} \\ 2 & 9 & 77 \end{array}\right]$$

1b. نضرب الصف الأول فى 2 ونطرحه من الصف الثانى .

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{47}{6} \\ 0 & \frac{23}{3} & \frac{184}{3} \end{array}\right]$$

2a. نضرب الصف الثانى فى $\frac{3}{23}$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{47}{6} \\ 0 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

2b. نضرب الصف الثانى فى $\frac{2}{3}$ ونطرحه من الصف الأول .

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2.5 \\ 0 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

إذا $\bar{x}_1 = 2.5$ ، $\bar{x}_2 = 8$

5.37. Redo Problem 5.34, given

5.37. أعد حل 5.34 إذا أعطيت :

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 21 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 &= 31 \\ x_1 + 8x_2 + 3x_3 &= 37 \end{aligned}$$

المصفوفة الممددة

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 5 & 21 \\ 3 & 6 & 1 & 31 \\ 1 & 8 & 3 & 37 \end{array}\right]$$

1a. نضرب الصف الأول فى $\frac{1}{4}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & \frac{21}{4} \\ 3 & 6 & 1 & 31 \\ 1 & 8 & 3 & 37 \end{array}\right]$$

1b. نضرب الصف الأول فى 3 ونطرحه من الصف الثانى ونطرح الصف الأول من الصف الثالث .

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & \frac{21}{4} \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{11}{4} & \frac{61}{4} \\ 0 & \frac{15}{2} & \frac{7}{4} & \frac{127}{4} \end{array}\right]$$

2a. نضرب الصف الثانى فى $\frac{2}{9}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & \frac{21}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{18} & \frac{61}{18} \\ 0 & \frac{15}{2} & \frac{7}{4} & \frac{127}{4} \end{array}\right]$$

2b. نضرب الصف الثانى فى $\frac{1}{2}$ ونطرحه من الصف الأول . ونضرب الصف الثانى فى $\frac{15}{2}$ ونطرح من الصف الثالث .

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{14}{9} & \frac{32}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{18} & \frac{61}{18} \\ 0 & 0 & \frac{57}{9} & \frac{57}{9} \end{array}\right]$$

3a. نضرب الصف الثالث فى $\frac{9}{57}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{14}{9} & \frac{32}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{18} & \frac{61}{18} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

3b. نضرب الصف الثالث فى $\frac{14}{9}$ ونطرحه من الصف الأول . ونضرب الصف الثالث فى $\frac{11}{18}$ ونجمعه إلى الصف الثانى .

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

إذا $\bar{x}_1 = 2$ ، $\bar{x}_2 = 4$ ، $\bar{x}_3 = 1$.

5.38. Redo Problem 5.34, given

5.38. أعد حل 5.34 إذا أعطيت :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= 82 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 &= 11 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= -27 \end{aligned}$$

المصفوفة الممددة

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 4 & 7 & 82\\ 6 & -3 & 1 & 11\\ 1 & 2 & -5 & -27\end{array}\right]$$

1*a*. نضرب الصف الأول فى $\frac{1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & \frac{7}{2} & 41\\ 6 & -3 & 1 & 11\\ 1 & 2 & -5 & -27\end{array}\right]$$

1*b*. نضرب الصف الأول فى 6 ونطرحه من الصف الثانى ونطرح الصف الأول من الصف الثالث .

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & \frac{7}{2} & 41\\ 0 & -15 & -20 & -235\\ 0 & 0 & -\frac{17}{2} & -68\end{array}\right]$$

2*a*. نضرب الصف الثانى فى $-\frac{1}{15}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & \frac{7}{2} & 41\\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{47}{3}\\ 0 & 0 & -\frac{17}{2} & -68\end{array}\right]$$

2*b*. نضرب الصف الثانى فى 2 ونطرحه من الصف الأول . ونترك الصف الثالث كما هو :

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{29}{3}\\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{47}{3}\\ 0 & 0 & -\frac{17}{2} & -68\end{array}\right]$$

3*a*. نضرب الصف الثالث فى $-\frac{2}{17}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{29}{3}\\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{47}{3}\\ 0 & 0 & 1 & 8\end{array}\right]$$

3*b*. نضرب الصف الثالث فى $\frac{5}{8}$ ونطرحه من الصف الأول . ونضرب الصف الثالث فى $\frac{4}{3}$ ونطرحه من الصف الثانى .

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 8\end{array}\right]$$

إذا $\bar{x}_1=3$ ، $\bar{x}_2=5$ ، $\bar{x}_3=8$.

5.39. أعد حل 5.34 إذا أعطيت :

5.39. Redo Problem 5.34, given

$$\begin{aligned}5x_1 \quad\quad - 2x_3 &= -3\\ 4x_1+9x_2 \quad\quad &= 51\\ -6x_2 - x_3 &= -36\end{aligned}$$

المصفوفة الممددة

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}5 & 0 & -2 & -3\\ 4 & 9 & 0 & 51\\ 0 & -6 & -1 & -36\end{array}\right]$$

1a. نضرب الصف الأول فى $\frac{1}{5}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 4 & 9 & 0 & 51 \\ 0 & -6 & -1 & -36 \end{array}\right]$$

1b. نضرب الصف الأول فى 4 ونطرحه من الصف الثانى ويبقى الصف الثالث كما هو .

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 9 & \frac{8}{5} & \frac{267}{5} \\ 0 & -6 & -1 & -36 \end{array}\right]$$

2a. نضرب الصف الثانى فى $-\frac{1}{9}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{8}{45} & \frac{267}{45} \\ 0 & -6 & -1 & -36 \end{array}\right]$$

2b. نضرب الصف الثانى فى 6 ونجمعه على الصف الثالث ، ونتجاهل الصف الأول لأن $a_{12}=0$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{8}{45} & \frac{267}{45} \\ 0 & 0 & \frac{1}{15} & -\frac{18}{45} \end{array}\right]$$

3a. نضرب الصف الثالث فى 15 .

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{8}{45} & \frac{267}{45} \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right]$$

3b. نضرب الصف الثالث فى $\frac{2}{5}$ ونجمعه إلى الصف الأول . ونضرب الصف الثالث فى $-\frac{8}{45}$ ونجمعه إلى الصف الثانى .

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right]$$

إذا $\bar{x}_1=-3$ ، $\bar{x}_2=7$ ، $\bar{x}_3=-6$.

مسائل إضافية

يشار إلى المصفوفات التالية عند الإجابة على الأسئلة أدناه :

Refer to the following matrices in answering the questions below:

$$A=\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} 3 & -8 & 13 \\ 6 & 11 & -5 \end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix} 9 & 15 & 4 \\ 2 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 9 & 22 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \quad F=\begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 8 & -2 \\ 3 & 16 \end{bmatrix} \quad G=\begin{bmatrix} -4 & 9 & 15 \\ 5 & 12 & -9 \\ 18 & -6 & 20 \end{bmatrix} \quad H=\begin{bmatrix} 6 & 8 & -1 \\ -2 & 14 & 5 \\ 13 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrix Format صياغة المصفوفة

5.40. Give the dimensions of (*a*) *A*, (*b*) *C*, (*c*) *E*, and (*d*) *G*.

5.40. حدد أبعاد (*a*) *A* ، (*b*) *B* ، (*c*) *E* ، (*d*) *G* .

5.41. فى المصفوفات أعلاه عين العناصر التالية :

5.41. In the matrices above, identify the following elements:
(*a*) a_{21} (*b*) b_{12} (*c*) c_{23} (*d*) d_{12} (*e*) e_{31} (*f*) f_{12} (*g*) g_{13} (*h*) g_{32} (*i*) h_{23} (*j*) h_{31}.

5.42. أوجد المصفوفات المدورة التالية : (*a*) B' ، (*b*) D' ، (*c*) F' ، (*d*) H' .

5.42. Find the following transpose matrices: (*a*) B', (*b*) D', (*c*) F', and (*d*) H'.

5.43. أوجد أبعاد المصفوفات المدورة التالية : (*a*) B' ، (*b*) D' ، (*c*) F' ، (*d*) H' .

5.43. Give the dimensions of the following transpose matrices: (*a*) B', (*b*) D', (*c*) F', and (*d*) H'.

Addition and Subtraction of Matrices جمع وطرح المصفوفات

5.44. أوجد مجموع ما يلى : (*a*) $A+B$ ، (*b*) $C+D$ ، (*c*) $E+F$ ، (*d*) $G+H$.

5.44. Find the following sums: (*a*) $A+B$ (*b*) $C+D$ (*c*) $E+F$ (*d*) $G+H$.

5.45. أوجد فروق ما يلى : (*a*) $A-B$ ، (*b*) $C-D$ ، (*c*) $E-F$ ، (*d*) $G-H$.

5.45. Find the following differences: (*a*) $A-B$ (*b*) $C-D$ (*c*) $E-F$ (*d*) $G-H$.

Matrix Multiplication ضرب المصفوفات

5.46. استخدم المصفوفات الأصلية لإيجاد المصفوفات الجديدة التالية :

5.46. Using the original matrices above, find the following product matrices:
(*a*) AB, (*b*) CE, (*c*) FD, (*d*) GH, (*e*) EA, (*f*) GF, (*g*) CH, and (*h*) BD.

Gaussian Elimination Method طريقة الحذف لجاوس

5.47. استخدم طريقة الحذف لجاوس لحل نظم المعادلات الخطية التالية :

5.47. Use the Gaussian elimination method to solve each of the following systems of linear equations:

(*a*) $4x+7y=131$
$8x-3y=41$

(*b*) $6x+5y=51$
$-x+8y=124$

(*c*) $11x-4y=256$
$3x+6y=6$

(*d*) $-13x+9y=15$
$7x-2y=-28$

5.48. حل المعادلات التالية باستخدام طريقة الحذف لجاوس :

5.48. Solve the following equations using the Gaussian elimination method:

(*a*) $3x_1+6x_2-5x_3=-5$
$4x_1-7x_2+2x_3=-6$
$-x_1+8x_2+9x_3=93$

(*b*) $5x_1+8x_2+2x_3=26$
$7x_2-4x_3=6$
$-x_1+9x_3=89$

(*c*) $12x_2+9x_3=84$
$-5x_1+6x_2-2x_3=-122$
$8x_1-3x_3=48$

(*d*) $11x_1-8x_2-6x_3=133$
$4x_1+7x_3=-41$
$2x_1+5x_2-3x_3=71$

حل المسائل الإضافية

5.40. (*a*) $A = 2 \times 2$ (*b*) $C = 2 \times 3$ (*c*) $E = 3 \times 2$ (*d*) $G = 3 \times 3$

5.41. (*a*) $a_{21} = 3$ (*b*) $b_{12} = 6$ (*c*) $c_{23} = -5$ (*d*) $d_{12} = 15$ (*e*) $e_{31} = 4$
(*f*) $f_{12} = -9$ (*g*) $g_{13} = -15$ (*h*) $g_{32} = -6$ (*i*) $h_{23} = 5$ (*j*) $h_{31} = 13$

5.42. (*a*) $B' = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ (*b*) $D' = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 15 & -8 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

(*c*) $F' = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 3 \\ -9 & -2 & 16 \end{bmatrix}$ (*d*) $H' = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 13 \\ 8 & 14 & -9 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

5.43. (*a*) $B' = 2 \times 2$ (*b*) $D' = 3 \times 2$ (*c*) $F' = 2 \times 3$ (*d*) $H' = 3 \times 3$

5.44. (*a*) $A + B = \begin{bmatrix} 15 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ (*b*) $C + D = \begin{bmatrix} 12 & 7 & 17 \\ 8 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

(*c*) $E + F = \begin{bmatrix} 9 & -16 \\ 17 & 20 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$ (*d*) $G + H = \begin{bmatrix} 2 & 17 & 14 \\ 3 & 26 & -4 \\ 31 & -15 & 23 \end{bmatrix}$

5.45. (*a*) $A - B = \begin{bmatrix} 1 & -11 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ (*b*) $C - D = \begin{bmatrix} -6 & -23 & 9 \\ 4 & 19 & -12 \end{bmatrix}$

(*c*) $E - F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 24 \\ 1 & -21 \end{bmatrix}$ (*d*) $G - H = \begin{bmatrix} -10 & 1 & 16 \\ 7 & -2 & -14 \\ 5 & 3 & 17 \end{bmatrix}$

5.46. (*a*) $AB = \begin{bmatrix} 66 & 43 \\ 13 & 22 \end{bmatrix}$ (*b*) $CE = \begin{bmatrix} -5 & -262 \\ 109 & 225 \end{bmatrix}$

(*c*) $FD = \begin{bmatrix} 18 & 132 & -47 \\ 68 & 136 & 18 \\ 59 & -83 & 124 \end{bmatrix}$ (*d*) $GH = \begin{bmatrix} 153 & -41 & 94 \\ -111 & 289 & 28 \\ 380 & -120 & 12 \end{bmatrix}$

(*e*) $EA = \begin{bmatrix} 19 & -53 \\ 138 & 43 \\ 17 & -40 \end{bmatrix}$ (*f*) $GF = \begin{bmatrix} 101 & 258 \\ 89 & -213 \\ 84 & 170 \end{bmatrix}$

(*g*) $CH = \begin{bmatrix} 203 & -205 & -4 \\ -51 & 247 & 34 \end{bmatrix}$ (*h*) $BD = \begin{bmatrix} 75 & 57 & 70 \\ -16 & -38 & -1 \end{bmatrix}$

5.47. (*a*) $x = 10,\ y = 13$ (*b*) $x = -4,\ y = 15$
(*c*) $x = 20,\ y = -9$ (*d*) $x = -6,\ y = -7$

5.48. (*a*) $x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 7$ (*b*) $x_1 = -8,\ x_2 = 6,\ x_3 = 9$
(*c*) $x_1 = 12,\ x_2 = -5,\ x_3 = 16$ (*d*) $x_1 = 9,\ x_2 = 4,\ x_3 = -11$

الفصل السادس

حل المعادلات الخطية بجبر المصفوفات

Solving Linear Equations with Matrix Algebra

6.1 المحددات والاستقلال الخطى Determinants and Linear Independence

لكى يوجد حل وحيد فإن نظام المعادلات يجب أن يحتوى على متغيرات مستقلة ومعادلات متسقة كما وضحنا فى الفصل الرابع . ولكى نختبر نظام المعادلات الخطية من أجل الارتباط الخطى أو الاستقلال الخطى ، فإنه يجب استخدام محدد مصفوفة المعاملات A . ومحدد $|A|$ لمصفوفة 2 × 2 يسمى محدد الدرجة الثانية a second order determinant ويشتق بأخذ ناتج ضرب العنصرين على القطر الرئيسى وطرحه من ناتج ضرب العنصرين خارج القطر الرئيسى . فإذا أعطيت المصفوفة 2 × 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

فالمحدد هو

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{matrix} (-) \\ (+) \end{matrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

المحدد $|A|$ الذى نستطيع إيجاده للمصفوفة المربعة فقط يكون عدداً وحيداً أو عُدديًا . فإذا كان المحدد $|A| = 0$ فإن المحدد يتلاشى أو يغيب وتسمى المصفوفة مفردة Singular . أما إذا كان $|A| \neq 0$ فالمصفوفة تكون غير مفردة . وهذا يعنى أن كل صفوفها وأعمدتها مستقلة خطيًا . وتتحدد رتبة المصفوفة ρ بالعدد الأكبر من الصفوف أو الأعمدة المستقلة خطيًا فى المصفوفة . انظر مثال 1 والمسألة 1.6 .

مثال 1 : حسبت المحددات كما يلى إذا علمت أن : **EXAMPLE 1.** Determinants are calculated as follows, given

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

نضرب العناصر على القطر الرئيسى من الشمال إلى اليمين (7.5) ونطرح الناتج من ناتج العناصر خارج القطر الرئيسى (4.6) حيث نحصل على :

$$|A| = 7(5) - 4(6) = 11$$

وحيث إن $|A| \neq 0$ فالمصفوفة غير مفردة . وهذا يعنى أنه يوجد استقلال خطى بين الصفوف أو الأعمدة . وحيث إن الصفوف والأعمدة مستقلة خطيًا فإن رتبة المصفوفة A هى 2 حيث تكتب $\rho(A) = 2$. وبشكل متعارض نجد أن :

$$|B| = 8(3) - 12(2) = 0$$

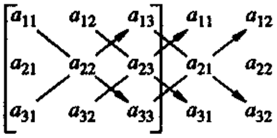
وحيث إن $|B| \neq 0$ فإن المصفوفة B مفردة وهذا يعنى وجود ارتباط خطى بين الصفوف والأعمدة . وبنظرة فاحصة نلاحظ أن الصف الأول يساوى 4 ضرب الصف الثانى والعمود الثانى يساوى 1.5 ضرب العمود الأول . ويوجد فقط صف واحد وعمود واحد مستقل $\rho(B) = 1$.

6.2 محددات الدرجة الثالثة Third-Order Determinants

محدد المصفوفة 3 × 3 يسمى محدد الدرجة الثالثة ويمكن إيجاده بعدة طرق مختلفة . وأسهل الطرق موضحة هنا . فإذا أعطيت :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

1. اكتب المصفوفة كما أعطيت وإلى اليمين أعد كتابة أول عمودين كما هو موضح فى الشكل 1–6 .



a_{11} a_{12} a_{13} a_{11} a_{12}
a_{21} a_{22} a_{23} a_{21} a_{22}
a_{31} a_{32} a_{33} a_{31} a_{32}

شكل (6–1)

2. نضرب كل عنصر من العناصر الثلاثة فى الصف الأول من المصفوفة الأصلية بالعنصرين اللذين يرتبطان بخط الميل لأسفل ثم نضيف النواتج .
3. نضرب كل عنصر من العناصر الثلاثة فى الصف الأخير من المصفوفة الأصلية بالعنصرين اللذين يرتبطان بخط الميل لأعلى ثم نطرح مجموع النواتج من المجموع السابق . والشكل 1–6 يساعد فى توضيح ذلك .

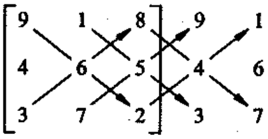
$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - [a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}]$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

مثال 2 : إذا أعطيت : **EXAMPLE 2.** Given

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

استخدم الشكل (6–2) .



شكل (6–2)

$$|A| = 9 \cdot 6 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \cdot 3 + 8 \cdot 4 \cdot 7 - [3 \cdot 6 \cdot 8 + 7 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 4 \cdot 1]$$

$$|A| = 108 + 15 + 224 - [144 + 315 + 8] = 347 - 467 = -120$$

وحيث إن $|A| \neq 0$. إذاً المصفوفة A غير مفردة والرتبة $\rho(A) = 3$. انظر المسألة 2.6 .

6.3 قاعدة كرامر لحل المعادلات الخطية

Cramer's Rule for Solving Linear Equations

المحددات ـ علاوة على استخدامها لاختبار عدم الاستقلال الخطى ـ يمكن أن تكون أيضًا مفيدة فى حل نظام المعادلات الخطية . وإحدى الطرق هى طريقة كرامر . وتشير قاعدة كرامر إلى أن :

$$\bar{x}_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

حيث : x_i هى المتغيرات المجهولة فى نظام المعادلات ، $|A|$ محدد مصفوفة المعاملات ، $|A_i|$ محدد المصفوفة الخاصة التى تتكون من المصفوفة الأصلية من خلال إحلال متجه عمود الثوابت محل معاملات العمود A_i . انظر الأمثلة 3 ، 4 والمسائل 3.6 و 4.6 .

مثال 3 : استخدمت قاعدة كرامر أدناه لحل نظام المعادلات الخطية 2 × 2 :

EXAMPLE 3. Cramer's rule is used below to solve the 2 × 2 system of linear equations

$$3x_1 + 7x_2 = 41$$
$$8x_1 + 9x_2 = 61$$

1. نعبر عن المعادلات فى صيغة مصفوفة .

$$A \cdot X = B$$
$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 \\ 61 \end{bmatrix}$$

2. نوجد محدد المصفوفة .

$$|A| = 3(9) - 7(8) = -29$$

وحيث إن $|A| \neq 0$ فالمصفوفة A غير مفردة والمعادلتان تكونان مستقلتين خطيًا . وتوجد إمكانية حل وحيد .

3. ولإيجاد x_1 نقوم بإحلال متجه عمود الثوابت B محل العمود الأول الذى يحتوى على معاملات x_1 حيث تتكون مصفوفة جديدة A_1 .

$$A_1 = \begin{bmatrix} 41 & 7 \\ 61 & 9 \end{bmatrix}$$

أوجد قيمة المحدد A_1

$$|A_1| = 41(9) - 7(61) = -58$$

ونستخدم صيغة قاعدة كرامر .

$$\bar{x}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-58}{-29} = 2$$

4. ولإيجاد x_2 نقوم بإحلال متجه عمود الثوابت B محل العمود الثانى الذى يحتوى معاملات x_2 حيث تتكون مصفوفة جديدة A_2 .

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 41 \\ 8 & 61 \end{bmatrix}$$

وبإيجاد قيمة المحدد

$$|A_2| = 3(61) - 41(8) = -145$$

ونستخدم صيغة قاعدة كرامر .

$$\bar{x}_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-145}{-29} = 5$$

مثال 4 : نظام المعادلات الخطية 3 × 3 محلول أدناه بقاعدة كرامر .

EXAMPLE 4. The 3 × 3 system of linear equations below is solved with Cramer's rule.

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= 35 \\ 3x_1 + x_2 + 8x_3 &= 25 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 &= 40 \end{aligned}$$

1. نحول المعادلات إلى صيغة مصفوفة .

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 8 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 25 \\ 40 \end{bmatrix}$$

2. إيجاد المحدد A باستخدام الطريقة من المثال 2 .

$$|A| = 4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 8 \cdot 5 + 7 \cdot 3 \cdot 3 - [5 \cdot 1 \cdot 7 + 3 \cdot 8 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 2]$$

$$= 4 + 80 + 63 - [35 + 96 + 6] = 147 - 137 = 10 \neq 0$$

3. تكوين مصفوفة جديدة A_1 من خلال إحلال عمود الثوابت B محل العمود الأول الذى يحتوى معاملات x_1 لكى نوجد قيمة x_1 .

$$A_1 = \begin{bmatrix} 35 & 2 & 7 \\ 25 & 1 & 8 \\ 40 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

إيجاد محدد مصفوفة A_1 .

$$|A_1| = 35 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 8 \cdot 40 + 7 \cdot 25 \cdot 3 - [40 \cdot 1 \cdot 7 + 3 \cdot 8 \cdot 35 + 1 \cdot 25 \cdot 2]$$

$$= 35 + 640 + 525 - [280 + 840 + 50] = 1200 - 1170 = 30$$

ثم نستخدم صيغة قاعدة كرامر .

$$\bar{x}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{30}{10} = 3$$

4. إحلال عمود الثوابت B محل العمود الثانى فى المصفوفة الأصلية A لكى نوجد x_2 .

$$A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 35 & 7 \\ 3 & 25 & 8 \\ 5 & 40 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A_2| = 4 \cdot 25 \cdot 1 + 35 \cdot 8 \cdot 5 + 7 \cdot 3 \cdot 40 - [5 \cdot 25 \cdot 7 + 40 \cdot 8 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 35]$$

$$= 100 + 1400 + 840 - [875 + 1280 + 105] = 2340 - 2260 = 80$$

$$\bar{x}_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{80}{10} = 8$$

5. نكون المصفوفة A_3 وذلك بإحلال عمود الثوابت B محل العمود الثالث من المصفوفة A لنوجد x_3 .

$$A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 35 \\ 3 & 1 & 25 \\ 5 & 3 & 40 \end{bmatrix}$$

$$|A_3| = 4 \cdot 1 \cdot 40 + 2 \cdot 25 \cdot 5 + 35 \cdot 3 \cdot 3 - [5 \cdot 1 \cdot 35 + 3 \cdot 25 \cdot 4 + 40 \cdot 3 \cdot 2]$$

$$= 160 + 250 + 315 - [175 + 300 + 240] = 725 - 715 = 10$$

$$\bar{x}_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{10}{10} = 1$$

فائدة قاعدة كرامر أنها تسمح بحل أحد المتغيرات دون حل النظام ككل . انظر المسائل 6.8 إلى 6.14 .

6.4 المصفوفات المعكوسة Inverse Matrices

المصفوفة المعكوسة A^{-1} والتى توجد فقط للمصفوفة المربعة وغير المفردة تكون مصفوفة وحيدة وتحقق العلاقة :

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A$$

ضرب المصفوفة فى معكوسها يختصرها إلى مصفوفة الوحدة . وفى هذه الطريقة ، فإن المصفوفة المعكوسة فى الجبر الخطى تمثل نفس الوظيفة كمقلوب reciprocal فى الجبر العادى . وعكس المصفوفة بطريقة جاوس مشروحة فى القسم 6.5 .

6.5 طريقة جاوس لإيجاد المصفوفة المعكوسة

Gaussian Method of Finding An Inverse Matrix.

طريقة جاوس هى طريقة ملائمة لعكس المصفوفة ، حيث نعين المصفوفة الممددة ونضع مصفوفة الوحدة إلى اليمين ثم نطبق عمليات الصف حتى تتحول مصفوفة المعاملات التى على اليسار إلى مصفوفة الوحدة . وعند هذه النقطة تكون المصفوفة التى على اليمين هى المصفوفة المعكوسة .

ويمكن أن نرى هذه الطريقة ببعض الخطوات الرياضية . بدءاً بالمصفوفة الممددة $A|I$ ونضرب الطرفين فى المصفوفة المعكوسة A^{-1} .

$$(A^{-1})A|I(A^{-1})$$

ومن القسم 6.4 والمسألة 5.31 فهذا يختصر إلى $I|A^{-1}$

حيث مصفوفة الوحدة الآن إلى اليسار والمصفوفة المعكوسة إلى اليمين انظر مثال 5 والمسائل 6.5 إلى 6.7 .

مثال 5 : لإيجاد طريقة الحذف لجاوس لإيجاد المعكوس لـ

EXAMPLE 5. To use the Gaussian elimination method to find the inverse for

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 8 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

نعين المصفوفة الممددة بحيث نضع مصفوفة الوحدة إلي اليمين .

$$A|I=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

نختصر مصفوفة المعاملات التى على اليسار إلى مصفوفة الوحدة من خلال تطبيق عمليات الصف المحددة فى القسم 5.9 و 5.10 كما يلى :

1*a* . نضرب الصف الأول فى $\frac{1}{4}$ لنحصل على 1 فى الموقع a_{11} .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1*b* . نضرب الصف الأول فى 3 ونطرحه من الصف الثانى ونضرب الصف الأول فى 5 ونطرحه من الثالث لتسوية العمود الأول .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{11}{4} & -\frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{31}{4} & -\frac{5}{4} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2*a* . نضرب الصف الثانى فى 2− لنحصل على 1 فى الموقع a_{22} .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{2} & \frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{31}{4} & -\frac{5}{4} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2*b* . نضرب الصف الثانى فى $\frac{1}{2}$ ونطرحه من الصف الأول والثالث لتسوية العمود الثانى :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{2} & \frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

3*a* . نضرب الصف الثالث فى $-\frac{1}{5}$ لنحصل على 1 فى الموقع a_{33} .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{2} & \frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

3*b* . نضرب الصف الثالث فى $\frac{9}{2}$ ونطرحه من الصف الأول . ونضرب الصف الثالث فى $\frac{11}{2}$ ونجمعه إلى الصف الثانى لتسوية العمود الثالث :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{23}{10} & \frac{19}{10} & \frac{9}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{37}{10} & -\frac{31}{10} & -\frac{11}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

وحيث إن مصفوفة الوحدة الآن على اليسار فيمكننا أن نوضح أن المصفوفة المعكوسة إلى اليمين حيث تقرأ بعد الاختصار :

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -2.3 & 1.9 & 0.9 \\ -3.7 & -3.1 & -1.1 \\ 0.4 & -0.2 & -0.2 \end{bmatrix}$$

مثال 6 : من التعريف $AA^{-1}=I$ ولذلك يمكن التحقق من دقة ذلك بضرب المصفوفة الأصلية فى معكوسها لنتأكد من أن الناتج سيكون مصفوفة الوحدة . استخدم A ، A^{-1} من المثال 5 .

EXAMPLE 6. Since by definition $AA^{-1}=I$, the accuracy of an inverse can always be checked by multiplying the original matrix by the inverse to be sure the product is an identity matrix. Using A and A^{-1} from Example 5,

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 8 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2.3 & 1.9 & 0.9 \\ 3.7 & -3.1 & -1.1 \\ 0.4 & -0.2 & -0.2 \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix} 4(-2.3)+2(3.7)+7(0.4) & 4(1.9)+2(-3.1)+7(-0.2) & 4(0.9)+2(-1.1)+7(-0.2) \\ 3(-2.3)+1(3.7)+8(0.4) & 3(1.9)+1(-3.1)+8(-0.2) & 3(0.9)+1(-1.1)+8(-0.2) \\ 5(-2.3)+3(3.7)+1(0.4) & 5(1.9)+3(-3.1)+1(-0.2) & 5(0.9)+3(-1.1)+1(-0.2) \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لاحظ أنه خلال التأكد من المصفوفة المعكوسة من خلال اختبار الناتج $A^{-1}A$ كل عنصر على القطر الرئيسى من المصفوفة الجديدة يساوى واحد وكل عنصر خارج القطر يساوى صفراً . وهذه ملائمة لأنه إذا وجد خطأ ما فإن تلك العناصر المناظرة للعناصر التى لا تساوى صفراً أو واحداً فى الأماكن المناسبة هى التى تحتاج إلى فحص فقط .

6.6 حل المعادلات الخطية بالمصفوفة المعكوسة

Solving Linear Equations With An Inverse Matrix.

يمكن أن نستخدم المصفوفة المعكوسة فى حل معادلات المصفوفة . فإذا كانت

$$A_{n\times n}X_{n\times 1}=B_{n\times 1}$$

وتوجد المصفوفة المعكوسة A^{-1} فإن ضرب طرفى المعادلة فى A^{-1} واتباع قوانين التماثل فإننا نحصل على

$$A^{-1}_{n\times n}A_{n\times n}X_{n\times 1}=A^{-1}_{n\times n}B_{n\times 1}$$

لاحظ أن A^{-1} متماثلة مع $A_{n\times n}X_{n\times 1}$ و $B_{n\times 1}$ فقط من اليسار . ومن القسم 6.4 $A^{-1}A=I$ لذلك

$$I_{n\times n}X_{n\times 1}=A^{-1}_{n\times n}B_{n\times 1}$$

ومن المسألة 5.31. $IX=X$ لذلك

$$X_{n\times 1}=(A^{-1}B)_{n\times 1}$$

وحل نظام المعادلات معطى بنتائج معكوس مصفوفة المعاملات A^{-1} ومتجه عمود الثوابت B والذى نفسه يكون متجه عمود . انظر مثال 7 والمسائل 6.5 إلى 6.7 و 6.15 .

مثال 7 : استخدم معكوس المصفوفة أدناه لحل نظام المعادلات من المثال 4 لـ x_1 ، x_2 ، x_3 فى صيغة مصفوفة .

EXAMPLE 7. Matrix inversion is used below to solve the system of equations from Example 4 for x_1, x_2, and x_3, where in matrix form

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & X & = & B \\ \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 8 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 35 \\ 25 \\ 40 \end{bmatrix} \end{array}$$

من القسم 6.6 .

$$X = A^{-1}B$$

وبالتعويض عن المصفوفة المعكوسة التى وجدت من المثال 5 وبالضرب

$$X = \begin{bmatrix} -2.3 & 1.9 & 0.9 \\ 3.7 & -3.1 & -1.1 \\ 0.4 & -0.2 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35 \\ 25 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -2.3(35) + 1.9(25) + 0.9(40) \\ 3.7(35) - 3.1(25) - 1.1(40) \\ 0.4(35) - 0.2(25) - 0.2(40) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

قارن هذا الحل مع الحل فى المثال 4 حيث حلت نفس المسألة بقاعدة كرامر .

6.7 تطبيقات اقتصادية وإدارية Business and Economic Applications

تستخدم قاعدة كرامر والمصفوفة المعكوسة عادة فى الاقتصاد والإدارة لحل مسائل نظام المعادلات الآنية مثل تحليل IS–LM وتحليل الطلب والعرض . ونبدأ بتطبيق قاعدة كرامر على تحليل IS–LM على أن نؤجل تطبيق المصفوفة المعكوسة على تمثيل الطلب والعرض فى المسائل القادمة . فإذا أعطيت معادلات IS و LM .

$$0.3Y + 100i = 252$$

$$0.25Y - 200i = 176$$

وبوصفهم فى صيغة مصفوفة

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & X & = & B \\ \begin{bmatrix} 0.3 & 100 \\ 0.25 & -200 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} Y \\ i \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 252 \\ 176 \end{bmatrix} \end{array}$$

حيث

$$|A| = 0.3(-200) - 100(0.25) = -60 - 25 = -85$$

وبإحلال عمود الثوابت B محل عمود معاملات y فى العمود الأول لإيجاد y .

$$A_1 = \begin{bmatrix} 252 & 100 \\ 176 & -200 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = 252(-200) - 100(176) = -50,400 - 17,600 = -68,000$$

ولذلك فإن

$$Y_e = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-68,000}{-85} = 800$$

ثم نقوم بإحلال عمود الثوابت B محل عمود معاملات i فى العمود الثانى لإيجاد i .

$$|A_2| = \begin{bmatrix} 0.3 & 252 \\ 0.25 & 176 \end{bmatrix}$$

$$|A_2| = 0.3(176) - 252(0.25) = 52.8 - 63 = -10.2$$

$$i_e = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-10.2}{-85} = 0.12$$

انظر المسألة 4.21 حيث نفس المسألة حلت باستخدام طريقة الحذف . انظر أيضًا المسائل 6.8 إلى 6.15 .

6.8 محددات خاصة Special Determinants

بالنسبة للمحددات الخاصة والتى لها استخدامات هامة فى الاقتصاد ، الإدارة ، والرياضة بصفة عامة مثل Jacobian، Hessian، bordered Hessian و discreiminant انظر: Dowling, Introduction to Mathematical Economics. Chapter12.

مسائل محلولة

المحددات Determinants

6.1. أوجد محدد المصفوفات التالية وبين ما إذا كانت المصفوفة مفردة أو غير مفردة وعين رتبة المصفوفة .

6.1. **For each of following 2 × 2 matrices, find the determinant to determine whether the matrix is singular or nonsingular, and indicate the rank of the matrix.**

(*a*)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 5(4) - 2(9) = 2$$

وحيث إن $|A| \neq 0$ فالمصفوفة A غير مفردة ولذلك فإن الصفوف والأعمدة مستقلة خطيًا . ومع وجود صفين وعمودين مستقلين خطيًا فإن رتبة المصفوفة A هى $\rho(A) = 2$.

(*b*)

$$B = \begin{bmatrix} 12 & 20 \\ 15 & 11 \end{bmatrix}$$

$$|B| = 12(11) - 20(15) = -168$$

إذًا B مصفوفة غير مفردة ، و $\rho(B) = 2$.

(*c*)

$$C = \begin{bmatrix} 24 & 30 \\ 16 & 20 \end{bmatrix}$$

$$|C| = 24(20) - 30(16) = 0$$

وحيث إن $|C| = 0$ فالمصفوفة C مفردة . ويوجد ارتباط خطى بين الصفوف والأعمدة . وحيث إنه فقط صف واحد مستقل وعمود واحد مستقل فإن $\rho(C) = 1$. وبنظرة فاحصة نجد أن الصف الأول هو 1.5 ضرب الصف الثانى والعمود الثانى هو 1.25 ضرب العمود الأول .

(*d*)
$$D=\begin{bmatrix}2&8&3\\9&5&4\end{bmatrix}$$

لا يوجد محدد لأن المصفوفات المربعة هى التى لها محددات فقط . ومع وجود صفين فإن الرتبة العليا الممكنة للمصفوفة هى : $\rho(D)=2$.

6.2. أوجد محدد المصفوفات التالية وعين رتبة المصفوفة :

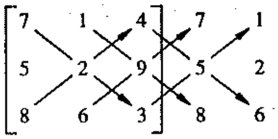
6.2. For each of the following 3 × 3 matrices, find the determinant and indicate the rank of the matrix.

(*a*)
$$A=\begin{bmatrix}7&1&4\\5&2&9\\8&6&3\end{bmatrix}$$

حدد المصفوفة الأصلية وأعد كتابة أول عمودين إلى اليمين منها :

$$\left[\begin{array}{ccc}7&1&4\\5&2&9\\8&6&3\end{array}\right]\begin{array}{cc}7&1\\5&2\\8&6\end{array}$$

وهذا موضح كما فى المثال 2 والشكل 3–6 .



شكل (3–6)

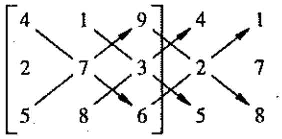
$$|A|=7\cdot2\cdot3+1\cdot9\cdot8+4\cdot5\cdot6-[8\cdot2\cdot4+6\cdot9\cdot7+3\cdot5\cdot1]$$

$$|A|=42+72+120-[64+378+15]=234-457=-223$$

وحيث إن $|A|\neq 0$ فالمصفوفة A غير مفردة . والصفوف والأعمدة الثلاثة تكون مستقلة خطيًا ومن ثم فإن $\rho(A)=3$.

(*b*)
$$B=\begin{bmatrix}4&1&9\\2&7&3\\5&8&6\end{bmatrix}$$

نحسب المصفوفة الممتدة فى الشكل (4–6) ونحسب المحدد .



شكل (4–6)

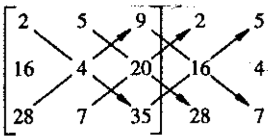
$$|B|=4\cdot7\cdot6+1\cdot3\cdot5+9\cdot2\cdot8-[5\cdot7\cdot9+8\cdot3\cdot4+6\cdot2\cdot1]$$

$$|B|=168+15+144-[315+96+12]=327-423=-96$$

المصفوفة B غير مفردة : $\rho(B)=3$.

(c)
$$C=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 16 & 4 & 20 \\ 28 & 7 & 35 \end{bmatrix}$$

نعين المصفوفة الممتدة كما فى الشكل (6–5) ونحسب المحدد .



شكل (6–5)

$$|C| = 2\cdot 4\cdot 35 + 5\cdot 20\cdot 28 + 9\cdot 16\cdot 7 - [28\cdot 4\cdot 9 + 7\cdot 20\cdot 2 + 35\cdot 16\cdot 5]$$
$$|C| = 280 + 2800 + 1008 - [1008 + 280 + 2800] = 4088 - 4088 = 0$$

وحيث إن $|C| = 0$ فالمصفوفة C مفردة . وبالتالى فإن الصفوف والأعمدة الثلاثة غير مستقلة خطيًا . وأن $\rho(C) \neq 3$ ولذلك فإن اختبار المحدد يحدد عدم الاستقلال الخطى ولكنه لا يوضح طبيعة عدم الاستقلال . وهنا الصف 3 هو 1.75 ضرب الصف الثانى ولكى نختبر ما إذا كان أى صفين أو عمودين فى المصفوفة C مستقلين نطبق اختبار المحدد للمصفوفات الفرعية المختلفة . وبدءاً بالمصفوفة الفرعية 2×2 فى الجانب الأعلى إلى اليسار .

$$|C_1| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 16 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) - 5(16) = -72 \neq 0$$

وحيث إن $|C_1| \neq 0$ إذاً يوجد صفان وعمودان مستقلان فى المصفوفة C : $\rho(C) = 2$.

قاعدة كرامر Cramer's Rule

6.3. استخدم قاعدة كرامر لإيجاد المتغيرات المجهولة فى نظام المعادلات الآنية التالية :

6.3. Use Cramer's rule to solve for the unknown variables in each of the following 2×2 systems of simultaneous equations.

(a) $8x_1 + 3x_2 = 14$

$9x_1 + 2x_2 = 24$

عبر عن المعادلات فى صيغة مصفوفة

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & X & = & B \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 24 \end{bmatrix}$$

حيث

$$|A| = 8(2) - 3(9) = -11$$

نقوم بإحلال عمود الثوابت B محل العمود الأول فى المصفوفة A الذى يحتوى على معاملات المتغير الأول x_1 .

$$A_1 = \begin{bmatrix} 14 & 3 \\ 24 & 2 \end{bmatrix}$$

وبإيجاد المحدد $|A_1|$

$$|A_1| = 14(2) - 3(24) = 28 - 72 = -44$$

ونستخدم قاعدة كرامر

$$\bar{x}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-44}{-11} = 4$$

ثم نقوم بإحلال عمود الثوابت B محل العمود الثاني في المصفوفة A والذى يحتوى على معاملات المتغير الثانى x_2 .

$$A_2 = \begin{bmatrix} 8 & 14 \\ 9 & 24 \end{bmatrix}$$

حيث

$$|A_2| = 8(24) - 14(9) = 192 - 126 = 66$$

$$\bar{x}_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{66}{-11} = -6$$

(*b*) $10x + 12y = -27$

$18x - 4y = -55$

وهنا

$$\begin{array}{cccc} A & \cdot X & = & B \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 18 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -55 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 10(-4) - 12(18) = -256$$

لإيجاد x نطبق الإجراء على المتغير الأول كما فى (a) .

$$A_1 = \begin{bmatrix} -27 & 12 \\ -55 & -4 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = -27(-4) - 12(-55) = 108 + 660 = 768$$

$$\bar{x} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{768}{-256} = -3$$

والآن نوجد قيمة y ، المتغير الثانى كما فى الجزء (a) .

$$A_2 = \begin{bmatrix} 10 & -27 \\ 18 & -55 \end{bmatrix}$$

$$|A_2| = 10(-55) - (-27)(18) = -550 + 486 = -64$$

$$\bar{y} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-64}{-256} = \frac{1}{4}$$

(*c*) $15p_1 - 4p_2 = 39$

$-7p_1 + 22p_2 = 163$

وهنا

$$A = \begin{bmatrix} 15 & -4 \\ -7 & 22 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 15(22) - (-4)(-7) = 330 - 28 = 302$$

نوجد قيمة p_1 .

$$A_1 = \begin{bmatrix} 39 & -4 \\ 163 & 22 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = 39(22) - (-4)(163) = 858 + 652 = 1510$$

$$\bar{p}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{1510}{302} = 5$$

نوجد قيمة p_2 .

$$A_2 = \begin{bmatrix} 15 & 39 \\ -7 & 163 \end{bmatrix}$$

$$|A_2| = 15(163) - 39(-7) = 2445 + 273 = 2718$$

$$\bar{p}_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{2718}{302} = 9$$

(*d*) $20Q_1 + 45Q_2 = 950$

$36Q_1 + 50Q_2 = 1400$

وهنا

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 45 \\ 36 & 50 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 20(50) - 45(36) = 1000 - 1620 = -620$$

نوجد قيمة Q_1 .

$$A_1 = \begin{bmatrix} 950 & 45 \\ 1400 & 50 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = 950(50) - 45(1400) = 47{,}500 - 63{,}000 = -15{,}500$$

$$\bar{Q}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-15{,}500}{-620} = 25$$

نوجد قيمة Q_2 .

$$A_2 = \begin{bmatrix} 20 & 950 \\ 36 & 1400 \end{bmatrix}$$

$$|A_2| = 20(1400) - 950(36) = 28{,}000 - 34{,}200 = -6200$$

$$\bar{Q}_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-6200}{-620} = 10$$

6.4. استخدم قاعدة كرامر لإيجاد المتغيرات المجهولة لنظام المعادلات الآنية التالية :

6.4. Use Cramer's rule to solve for the unknown variables in each of the following 3 × 3 systems of simultaneous equations.

(*a*) $3x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 67$

$4x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 36$

$7x_1 + x_2 + 5x_3 = 49$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 4 & 6 & 9 \\ 7 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

استخدم الأساليب من القسم 6.2 والمسألة 6.2 .

$$|A| = 3\cdot6\cdot5+8\cdot9\cdot7+2\cdot4\cdot1-[7\cdot6\cdot2+1\cdot9\cdot3+5\cdot4\cdot8]$$

$$|A| = 90+504+8-[84+27+160] = 602-271 = 331$$

إيجاد x_1 .

$$A_1 = \begin{bmatrix} 67 & 8 & 2 \\ 36 & 6 & 9 \\ 49 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = 67\cdot6\cdot5+8\cdot9\cdot49+2\cdot36\cdot1-[49\cdot6\cdot2+1\cdot9\cdot67+5\cdot36\cdot8]$$

$$|A_1| = 2010+3528+72-[588+603+1440] = 5610-2631 = 2979$$

$$\bar{x}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{2979}{331} = 9$$

إيجاد x_2 .

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 67 & 2 \\ 4 & 36 & 9 \\ 7 & 49 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A_2| = 3\cdot36\cdot5+67\cdot9\cdot7+2\cdot4\cdot49-[7\cdot36\cdot2+49\cdot9\cdot3+5\cdot4\cdot67]$$

$$|A_2| = 540+4221+392-[504+1323+1340] = 5153-3167 = 1986$$

$$\bar{x}_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{1986}{331} = 6$$

إيجاد x_3 .

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 67 \\ 4 & 6 & 36 \\ 7 & 1 & 49 \end{bmatrix}$$

$$|A_3| = 3\cdot6\cdot49+8\cdot36\cdot7+67\cdot4\cdot1-[7\cdot6\cdot67+1\cdot36\cdot3+49\cdot4\cdot8]$$

$$|A_3| = 882+2016+268-[2814+108+1568] = 3166-4490 = -1324$$

$$\bar{x}_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-1324}{331} = -4$$

(*b*)

$$\begin{aligned} -5p_1 + p_2 + 2p_3 &= -6 \\ 2p_1 - 9p_2 + p_3 &= -14 \\ 3p_1 + p_2 - 8p_3 &= -58 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 2 & -9 & 1 \\ 3 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= (-5)(-9)(-8)+(1)(1)(3)+(2)(2)(1) \\ &\quad -[(3)(-9)(2)+(1)(1)(-5)+(-8)(2)(1)] \\ |A| &= -360+3+4-[-54-5-16] = -353+75 = -278 \end{aligned}$$

إيجاد p_1 .

$$A_1 = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 2 \\ -14 & -9 & 1 \\ -58 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = (-6)(-9)(-8) + (1)(1)(-58) + (2)(-14)(1)$$
$$- [(-58)(-9)(2) + (1)(1)(-6) + (-8)(-14)(1)]$$
$$|A_1| = -432 - 58 - 28 - [1044 - 6 + 112] = -518 - 1150 = -1668$$

$$\overline{p}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-1668}{-278} = 6$$

إيجاد p_2 .

$$A_2 = \begin{bmatrix} -5 & -6 & 2 \\ 2 & -14 & 1 \\ 3 & -58 & -8 \end{bmatrix}$$

$$|A_2| = (-5)(-14)(-8) + (-6)(1)(3) + (2)(2)(-58)$$
$$- [(3)(-14)(2) + (-58)(1)(-5) + (-8)(2)(-6)]$$
$$|A_2| = -560 - 18 - 232 - [-84 + 290 + 96] = -810 - 302 = -1112$$

$$\overline{p}_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-1112}{-278} = 4$$

إيجاد p_3 .

$$A_3 = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -6 \\ 2 & -9 & -14 \\ 3 & 1 & -58 \end{bmatrix}$$

$$|A_3| = (-5)(-9)(-58) + (1)(-14)(3) + (-6)(2)(1)$$
$$- [(3)(-9)(-6) + (1)(-14)(-5) + (-58)(2)(1)]$$
$$|A_3| = -2610 - 42 - 12 - [162 + 70 - 116] = -2664 - 116 = -2780$$

$$\overline{p}_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-2780}{-278} = 10$$

(c) $16x - 3y + 10z = 8$

$-4x + 18y + 14z = 12$

$28x + 42y - 6z = 18$

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -3 & 10 \\ -4 & 18 & 14 \\ 28 & 42 & -6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (16)(18)(-6) + (-3)(14)(28) + (10)(-4)(42)$$
$$- [(28)(18)(10) + (42)(14)(16) + (-6)(-4)(-3)]$$
$$|A| = -1728 - 1176 - 1680 - [5040 + 9408 - 72] = -18{,}960$$

إيجاد x .

$$A_1 = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 10 \\ 12 & 18 & 14 \\ 18 & 42 & -6 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = (8)(18)(-6) + (-3)(14)(18) + (10)(12)(42)$$
$$- [(18)(18)(10) + (42)(14)(8) + (-6)(12)(-3)]$$
$$|A_1| = -864 - 756 + 5040 - [3240 + 4704 + 216] = -4740$$

$$\bar{x} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-4740}{-18{,}960} = \frac{1}{4}$$

إيجاد y .

$$A_2 = \begin{bmatrix} 16 & 8 & 10 \\ -4 & 12 & 14 \\ 28 & 18 & -6 \end{bmatrix}$$

$$|A_2| = (16)(12)(-6) + (8)(14)(28) + (10)(-4)(18)$$
$$- [(28)(12)(10) + (18)(14)(16) + (-6)(-4)(8)]$$
$$|A_2| = -1152 + 3136 - 720 - [3360 + 4032 + 192] = -6320$$

$$\bar{y} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-6320}{-18{,}960} = \frac{1}{3}$$

إيجاد z .

$$A_3 = \begin{bmatrix} 16 & -3 & 8 \\ -4 & 18 & 12 \\ 28 & 42 & 18 \end{bmatrix}$$

$$|A_3| = (16)(18)(18) + (-3)(12)(28) + (8)(-4)(42)$$
$$- [(28)(18)(8) + (42)(12)(16) + (18)(-4)(-3)]$$
$$|A_3| = 5184 - 1008 - 1344 - [4032 + 8064 + 216] = -9480$$

$$\bar{z} = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-9480}{-18{,}960} = \frac{1}{2}$$

المصفوفات المعكوسة Inverse Matrices

6.5. (*a*) أوجد المصفوفة A^{-1} و (*b*) أوجد قيمة المتغيرات المجهولة باستخدام المصفوفة المعكوسة إذا أعطيت :

6.5. (*a*) Find the inverse matrix A^{-1} and (*b*) solve for the unknown variables using the inverse matrix, given

$$3x_1 + 7x_2 = 41$$
$$8x_1 + 9x_2 = 61$$

(*a*) استخدم طريقة الحذف لجاوس من القسم 6.5 والمثال رقم 5 ثم عين المصفوفة الممددة .

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1a. نضرب الصف الأول فى $\frac{1}{3}$ لنحصل على 1 فى الموقع a_{11} .

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1b. نضرب الصف الأول فى 8 ونطرحه من الصف الثانى لتسوية العمود الأول .

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{29}{3} & -\frac{8}{3} & 1 \end{array}\right]$$

2a. نضرب الصف الثانى فى $-\frac{3}{29}$ لنحصل على 1 فى الموقع a_{22} .

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{29} & -\frac{3}{29} \end{array}\right]$$

2b. نضرب الصف الثانى فى $\frac{7}{3}$ ونطرحه من الصف الأول لتسوية العمود الثانى .

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{9}{29} & \frac{7}{29} \\ 0 & 1 & \frac{8}{29} & -\frac{3}{29} \end{array}\right]$$

مصفوفة الوحدة الآن على الجانب الأيسر من الخط . ولذلك فإن .

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{29} & \frac{7}{29} \\ \frac{8}{29} & -\frac{3}{29} \end{bmatrix}$$

(*b*) نتبع نفس الإجراء من القسم 6.6 والمثال 7 .

$$X = A^{-1}B$$

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{9}{29} & \frac{7}{29} \\ \frac{8}{29} & -\frac{3}{29} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 41 \\ 61 \end{bmatrix}$$

ثم نضرب المصفوفتين باستخدام عمليات الصف ـ العمود العادية .

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{9}{29}(41) + \frac{7}{29}(61) \\ \frac{8}{29}(41) - \frac{3}{29}(61) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{58}{29} \\ \frac{145}{29} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

قارن هذا الحل فى المثال 3 حيث استخدمت قاعدة كرامر لحل نفس المسألة .

6.6. Redo Problem 6.5, given

6.6. أعد حل 6.5 إذا أعطيت :

$$8x_1 + 3x_2 = 14$$
$$9x_1 + 2x_2 = 24$$

(*a*) نعين المصفوفة الممددة

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 8 & 3 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1a. نضرب الصف الأول فى $\frac{1}{8}$ لنحصل على 1 فى الموقع a_{11} .

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$1b$. نضرب الصف الأول فى 9 ونطرحه من الصف الثانى لتسوية العمود الأول .

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{11}{8} & -\frac{9}{8} & 1 \end{array}\right]$$

$2a$. نضرب الصف الثانى فى $-\frac{8}{11}$ لنحصل على 1 فى الموقف a_{22} .

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{11} & -\frac{8}{11} \end{array}\right]$$

$2b$. نضرب الصف الثانى فى $\frac{3}{8}$ ونطرحه من الصف الأول لتسوية العمود الثانى .

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & \frac{9}{11} & -\frac{8}{11} \end{array}\right]$$

مصفوفة الوحدة الآن على الجانب الأيسر من الخط . ولذلك فإن .

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{9}{11} & -\frac{8}{11} \end{bmatrix}$$

(*b*)

$$X = A^{-1} \bullet B$$

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{9}{11} & -\frac{8}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 24 \end{bmatrix}$$

وبضرب المصفوفتين باستخدام عمليات الصف ـ العمود .

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{2}{11}(14) + \frac{3}{11}(24) \\ \frac{9}{11}(14) - \frac{8}{11}(24) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{44}{11} \\ -\frac{66}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

قارن هذا الحل مع المسألة 6.3(*a*) .

6.7. Redo Problem 6.5, given

6.7. أعد حل 6.5 إذا أعطيت :

$$3x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 67$$
$$4x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 36$$
$$7x_1 + x_2 + 5x_3 = 49$$

(*a*)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 8 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$1a$. نضرب الصف الأول فى $\frac{1}{3}$ لنحصل على 1 فى الموقع a_{11} .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1b. نضرب الصف الأول فى 4 ونطرحه من الصف الثانى ثم نضرب الصف الأول فى 7 ونطرحه من الصف الثالث لتسوية العمود الأول .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{19}{3} & -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{53}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2a. نضرب الصف الثانى فى $-\frac{3}{14}$ لنحصل على 1 فى الموقف a_{22} .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{19}{14} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{14} & 0 \\ 0 & -\frac{53}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2b. نضرب الصف الثانى فى $\frac{8}{3}$ ونطرحه من الصف الأول . ونضرب الصف الثانى $\frac{53}{3}$ ونجمعه إلى الصف الثالث لتسوية العمود الثانى .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{30}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{19}{14} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{14} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{331}{14} & \frac{19}{7} & -\frac{53}{14} & 1 \end{array}\right]$$

3a. نضرب الصف الثالث فى $-\frac{14}{331}$ لنحصل على 1 فى الموقف a_{33} .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{30}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{19}{14} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{14} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{38}{331} & \frac{53}{331} & -\frac{14}{331} \end{array}\right]$$

3b. نضرب الصف الثالث فى $\frac{30}{7}$ ونطرحه من الصف الأول ثم نضرب الصف الثالث $\frac{19}{14}$ ونجمعه إلى الصف الثانى لتسوية العمود الثالث .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{21}{331} & -\frac{38}{331} & \frac{60}{331} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{43}{331} & \frac{1}{331} & -\frac{19}{331} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{38}{331} & \frac{53}{331} & -\frac{14}{331} \end{array}\right]$$

وحيث إن مصفوفة الوحدة الآن إلى اليسار .

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{21}{331} & -\frac{38}{331} & \frac{60}{331} \\ \frac{43}{331} & \frac{1}{331} & -\frac{19}{331} \\ -\frac{38}{331} & \frac{53}{331} & -\frac{14}{331} \end{bmatrix} = \frac{1}{331}\begin{bmatrix} 21 & -38 & 60 \\ 43 & 1 & -19 \\ -38 & 53 & -14 \end{bmatrix}$$

(*b*)

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = \frac{1}{331}\begin{bmatrix} 21 & -38 & 60 \\ 43 & 1 & -19 \\ -38 & 53 & -14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 67 \\ 36 \\ 49 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{331}\begin{bmatrix} 21(67) - 38(36) + 60(49) \\ 43(67) + \ 1(36) - 19(49) \\ -38(67) + 53(36) - 14(49) \end{bmatrix} = \frac{1}{331}\begin{bmatrix} 2979 \\ 1986 \\ -1324 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

قارن هذا الحل مع الحل فى المسألة 6.4(*a*) .

تطبيقات إدارية واقتصادية Economic and Business Applications

6.8. استخدم قاعدة كرامر لإيجاد المستوى التوازني للسعر $\overline{P}$ والكمية $\overline{Q}$. إذا أعطيت :

6.8. Use Cramer's rule to solve for the equilibrium level of price $\overline{P}$ and quantity $\overline{Q}$, given

العرض : $-7P + 14Q = -42$

الطلب : $3P + 12Q = 90$

بالتحويل إلى صيغة مصفوفة .

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{bmatrix} -7 & 14 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -42 \\ 90 \end{bmatrix}$$

حيث

$$|A| = -7(12) - 14(3) = -126$$

ولإيجاد قيمة P ، المتغير الأول .

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -42 & 14 \\ 90 & 12 \end{vmatrix} = -42(12) - 14(90) = -1764$$

$$\overline{P} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-1764}{-126} = 14$$

ولإيجاد قيمة Q ، المتغير الثانى .

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -7 & -42 \\ 3 & 90 \end{vmatrix} = -7(90) - (-42)(3) = -504$$

$$\overline{Q} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-504}{-126} = 4$$

قارن مع المسألة 4.25 :

6.9. استخدم قاعدة كرامر لإيجاد المستوى التوازنى للدخل $\overline{Y}$ ومعدل الفائدة $\overline{i}$. إذا أعطيت :

6.9. Use Cramer's rule to solve for the equilibrium level of income $\overline{Y}$ and the interest rate $\overline{i}$, given

$$\text{IS:} \quad 0.3Y + 100i - 252 = 0$$

$$\text{LM:} \; 0.25Y - 200i - 193 = 0$$

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 100 \\ 0.25 & -200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 252 \\ 193 \end{bmatrix}$$

حيث

$$|A| = 0.3(-200) - 100(0.25) = -85$$

ولإيجاد قيمة Y :

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 252 & 100 \\ 193 & -200 \end{vmatrix} = 252(-200) - 100(193) = -69{,}700$$

$$\overline{Y} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-69,700}{-85} = 820$$

ولإيجاد قيمة i :

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 0.3 & 252 \\ 0.25 & 193 \end{vmatrix} = 0.3(193) - 252(0.25) = -5.1$$

$$\bar{i} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-5.1}{-85} = 0.06$$

قارن مع المسألة 4.21 .

6.10. Redo Problem 6.9, given

6.10. أعد حل 6.9 إذا أعطيت :

$$\text{IS:}\quad 0.4Y + 150i - 209 = 0$$

$$\text{LM:}\ 0.1Y - 250i - \ 35 = 0$$

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & X & = & B \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 150 \\ 0.1 & -250 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} Y \\ i \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 209 \\ 35 \end{bmatrix} \end{array}$$

حيث

$$|A| = 0.4(-250) - 150(0.1) = -115$$

ولإيجاد قيمة Y :

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 209 & 150 \\ 35 & -250 \end{vmatrix} = 209(-250) - 150(35) = -57{,}500$$

$$\bar{Y} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-57{,}500}{-115} = 500$$

ولإيجاد قيمة i :

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 0.4 & 209 \\ 0.1 & 35 \end{vmatrix} = 0.4(35) - 209(0.1) = -6.9$$

$$\bar{i} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-6.9}{-115} = 0.06$$

قارن مع المسألة 4.23 .

6.11. أعد حل المسألة 6.10 لو انخفض الاستثمار التلقائى بحيث يكون :

6.11. Redo Problem 6.10 for a drop in autonomous investment, when

$$\text{IS:}\quad 0.4Y + 150i - 186 = 0$$

$$\text{LM:}\ 0.1Y - 250i - \ 35 = 0$$

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & X & = & B \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 150 \\ 0.1 & -250 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} Y \\ i \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 186 \\ 35 \end{bmatrix} \end{array}$$

حيث

$$|A| = 0.4(-250) - 150(0.1) = -115$$

ولإيجاد قيمة Y :

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 186 & 150 \\ 35 & -250 \end{vmatrix} = 186(-250) - 150(35) = -51{,}750$$

$$\overline{Y} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-51{,}750}{-115} = 450$$

ولإيجاد قيمة i :

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 0.4 & 186 \\ 0.1 & 35 \end{vmatrix} = 0.4(35) - 186(0.1) = -4.6$$

$$\overline{i} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-4.6}{-115} = 0.04$$

الانخفاض فى الاستثمار التلقائى يؤدى إلى انخفاض الدخل وانخفاض معدل الفائدة . انظر المسألة 4.24.

6.12. استخدم قاعدة كرامر لإيجاد $\overline{P}$ ، $\overline{Q}$. فى الأسواق الثلاث التالية :

6.12. Use Cramer's rule to solve for $\overline{P}$ and $\overline{Q}$ in each of the following three interconnected markets:

$$\begin{aligned} Q_{s1} &= 6P_1 - 8 & \qquad Q_{d1} &= -5P_1 + P_2 + P_3 + 23 \\ Q_{s2} &= 3P_2 - 11 & \qquad Q_{d2} &= P_1 - 3P_2 + 2P_3 + 15 \\ Q_{s3} &= 3P_3 - 5 & \qquad Q_{d3} &= P_1 + 2P_2 - 4P_3 + 19 \end{aligned}$$

من المسألة 4.14 السوق تكون متوازنة آنيًا عندما

$$\begin{aligned} 11P_1 - P_2 - P_3 &= 31 \\ -P_1 + 6P_2 - 2P_3 &= 26 \\ -P_1 - 2P_2 + 7P_3 &= 24 \end{aligned}$$

حيث

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= (11)(6)(7) + (-1)(-2)(-1) + (-1)(-1)(-2) \\ &\quad - [(-1)(6)(-1) + (-2)(-2)(11) + (7)(-1)(-1)] \\ |A| &= 462 - 2 - 2 - [6 + 44 + 7] = 458 - 57 = 401 \end{aligned}$$

ولإيجاد قيمة p_1 .

$$A_1 = \begin{bmatrix} 31 & -1 & -1 \\ 26 & 6 & -2 \\ 24 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A_1| &= (31)(6)(7) + (-1)(-2)(24) + (-1)(26)(-2) \\ &\quad - [(24)(6)(-1) + (-2)(-2)(31) + (7)(26)(-1)] \\ |A_1| &= 1302 + 48 + 52 - [-144 + 124 - 182] = 1402 + 202 = 1604 \end{aligned}$$

$$\overline{P}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{1604}{401} = 4$$

ولإيجاد قيمة p_2 .

$$A_2 = \begin{bmatrix} 11 & 31 & -1 \\ -1 & 26 & -2 \\ -1 & 24 & 7 \end{bmatrix}$$

$$|A_2| = (11)(26)(7) + (31)(-2)(-1) + (-1)(-1)(24)$$
$$- [(-1)(26)(-1) + (24)(-2)(11) + (7)(-1)(31)]$$
$$|A_2| = 2002 + 62 + 24 - [26 - 528 - 217] = 2088 + 719 = 2807$$

$$\overline{P}_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{2807}{401} = 7$$

ولإيجاد قيمة p_3 .

$$A_3 = \begin{bmatrix} 11 & -1 & 31 \\ -1 & 6 & 26 \\ -1 & -2 & 24 \end{bmatrix}$$

$$|A_3| = (11)(6)(24) + (-1)(26)(-1) + (31)(-1)(-2)$$
$$- [(-1)(6)(31) + (-2)(26)(11) + (24)(-1)(-1)]$$
$$|A_3| = 1584 + 26 + 62 - [-186 - 572 + 24] = 1672 + 734 = 2406$$

$$\overline{P}_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{2406}{401} = 6$$

قارن مع المسألة 4.14 .

6.13. استخدم قاعدة كرامر لإيجاد القيم التوازنية x ، y ، λ إذا أعطيت شروط الدرجة الأولى التالية للتعظيم المقيد فى المسألة 13.21 .

6.13. Use Cramer's rule to find the equilibrium values for x, y, and λ, given the following first-order conditions for constrained optimization in Problem 13.21:

$$10x - 2y - \lambda = 0$$
$$-2x + 16y - \lambda = 0$$
$$60 - x - y = 0$$

نعيد الترتيب ونضعهم فى صيغة مصفوفة .

$$\begin{bmatrix} 10 & -2 & -1 \\ -2 & 16 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -60 \end{bmatrix}$$

حيث

$$|A| = (10)(16)(0) + (-2)(-1)(-1) + (-1)(-2)(-1)$$
$$- [(-1)(16)(-1) + (-1)(-1)(10) + (0)(-2)(-2)]$$
$$|A| = 0 + (-2) + (-2) - [16 + 10 + 0] = -4 - 26 = -30$$

ولإيجاد x ، المتغير الأول .

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 16 & -1 \\ -60 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = (0)(16)(0) + (-2)(-1)(-60) + (-1)(0)(-1)$$
$$- [(-60)(16)(-1) + (-1)(-1)(0) + (0)(0)(-2)]$$
$$|A_1| = 0 - 120 + 0 - [960 + 0 - 0] = -120 - 960 = -1080$$

$$\bar{x} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-1080}{-30} = 36$$

ولإيجاد قيمة y ، المتغير الثانى .

$$A_2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -60 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A_2| = (10)(0)(0) + (0)(-1)(-1) + (-1)(-2)(-60)$$
$$- [(-1)(0)(-1) + (-60)(-1)(10) + (0)(-2)(0)]$$
$$|A_2| = 0 + 0 - 120 - [0 + 600 - 0] = -120 - 600 = -720$$

$$\bar{y} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-720}{-30} = 24$$

وأخيرًا لإيجاد λ المتغير الثالث .

$$A_3 = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 0 \\ -2 & 16 & 0 \\ -1 & -1 & -60 \end{bmatrix}$$

$$|A_3| = (10)(16)(-60) + (-2)(0)(-1) + (0)(-2)(-1)$$
$$- [(-1)(16)(0) + (-1)(0)(10) + (-60)(-2)(-2)]$$
$$|A_3| = -9600 + 0 + 0 - [0 - 0 - 240] = -9600 + 240 = -9360$$

$$\bar{\lambda} = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-9360}{-30} = 312$$

6.14. استخدم قاعدة كرامر لإيجاد القيم التوازنية x ، y ، λ إذا أعطيت شروط الدرجة الأولى للتعظيم المقيد فى المسألة 13.33 .

6.14. Use Cramer's rule to find the equilibrium values for x, y, and λ, given the following first-order conditions for constrained optimization in Problem 13.33:

$$14x - 2y - \lambda = 0$$
$$-2x + 10y - \lambda = 0$$
$$77 - x - y = 0$$

نضعهم فى صيغة المصفوفة .

$$\begin{bmatrix} 14 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -77 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (14)(10)(0) + (-2)(-1)(-1) + (-1)(-2)(-1)$$
$$- [(-1)(10)(-1) + (-1)(-1)(14) + (0)(-2)(-2)]$$
$$|A| = 0 + (-2) + (-2) - [10 + 14 + 0] = -4 - 24 = -28$$

لإيجاد قيمة x .

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 10 & -1 \\ -77 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = (0)(10)(0) + (-2)(-1)(-77) + (-1)(0)(-1)$$

$$- [(-77)(10)(-1) + (-1)(-1)(0) + (0)(0)(-2)]$$

$$|A_1| = 0 - 154 + 0 - [770 + 0 - 0] = -154 - 770 = -924$$

$$\bar{x} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-924}{-28} = 33$$

ولإيجاد قيمة y .

$$A_2 = \begin{bmatrix} 14 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -77 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A_2| = (14)(0)(0) + (0)(-1)(-1) + (-1)(-2)(-77)$$

$$- [(-1)(0)(-1) + (-77)(-1)(14) + (0)(-2)(0)]$$

$$|A_2| = 0 + 0 - 154 - [0 + 1078 - 0] = -154 - 1078 = -1232$$

$$\bar{y} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-1232}{-28} = 44$$

ولإيجاد قيمة λ .

$$A_3 = \begin{bmatrix} 14 & -2 & 0 \\ -2 & 10 & 0 \\ -1 & -1 & -77 \end{bmatrix}$$

$$|A_3| = (14)(10)(-77) + (-2)(0)(-1) + (0)(-2)(-1)$$

$$- [(-1)(10)(0) + (-1)(0)(14) + (-77)(-2)(-2)]$$

$$|A_3| = -10,780 + 0 + 0 - [0 - 0 - 308] = -10,780 + 308 = -10,472$$

$$\bar{\lambda} = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-10,472}{-28} = 374$$

6.15. استخدم معكوس المصفوفة لإيجاد $\bar{Y}$ ، $\bar{i}$ إذا أعطيت :

6.15. Use matrix inversion to solve for $\bar{Y}$ and $\bar{i}$, given

$$\text{IS:} \quad 0.4Y + 150i = 209$$

$$\text{LM:} \quad 0.1Y - 250i = 35$$

نضع المصفوفة الممددة .

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0.4 & 150 & 1 & 0 \\ 0.1 & -250 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$1a$. نضرب الصف الأول في 2.5 لنحصل على 1 في الموقف a_{11} .

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 375 & 2.5 & 0 \\ 0.1 & -250 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1b. نضرب الصف الأول فى 0.1 ونطرحه من الصف الثانى لتسوية العمود الأول .

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 375 & 2.5 & 0 \\ 0 & -287.5 & -0.25 & 1 \end{array}\right]$$

2a. نضرب الصف الثانى فى 0.00348- لنحصل على 1 فى الموقع a_{22} .

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 375 & 2.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0.00087 & -0.00348 \end{array}\right]$$

2b. نضرب الصف الثانى فى 375 ونطرحه من الصف الأول لتسوية العمود الثانى .

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2.17375 & 1.30500 \\ 0 & 1 & 0.00087 & -0.00348 \end{array}\right]$$

وحيث إن مصفوفة الوحدة على اليسار الآن فإن :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2.17375 & 1.30500 \\ 0.00087 & -0.00348 \end{bmatrix}$$

$$X = \qquad A^{-1} \quad \cdot \quad B$$

$$X = \begin{bmatrix} 2.17375 & 1.30500 \\ 0.00087 & -0.00348 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 209 \\ 35 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2.17375(209) + 1.30500(35) \\ 0.00087(209) - 0.00348(35) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 0.06 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{i} \end{bmatrix}$$

قارن هذا بالمسألة 4.23 ، 6.10 . ونظرًا لأن معكوس المصفوفة له استعمالات مهمة فى النظرية الاقتصادية وطريقة الحذف لجاوس مهمة للطريقة اللوغاريتمية للبرمجة الخطية ، فإن المسائل العملية بشكل عام تكون أسهل فى الحل بطريقة كرامر من معكوس المصفوفة . فإذا رغبت فى مزيد من التدريبات العملية لمعكوس المصفوفة فيمكن تطبيق هذه الطريقة على المسائل 6.8 إلى 6.11 .

مسائل إضافية

Determinants المحددات

6.16. أوجد محددات المصفوفات التالية :

6.16. Find the determinants of each of the following 2×2 matrices:

(*a*) $A = \begin{bmatrix} 6 & 13 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ (*b*) $B = \begin{bmatrix} -9 & 16 \\ 11 & -2 \end{bmatrix}$

(*c*) $C = \begin{bmatrix} 15 & 22 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$ (*d*) $D = \begin{bmatrix} 18 & 8 \\ -9 & -4 \end{bmatrix}$

6.17. أوجد محددات المصفوفات التالية :

6.17. Find the determinants of each of the following 3×3 matrices:

(*a*) $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ (*b*) $B = \begin{bmatrix} -4 & 9 & 2 \\ 5 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

(*c*) $C = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 8 \\ 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ (*d*) $D = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 6 & -4 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}$

Cramer's Rule قاعدة كرامر

6.18. استخدم قاعدة كرامر لحل المعادلات التالية :

6.18. Use Cramer's rule to solve each of the following equations:

(*a*) $4x + 5y = 92$, $7x + 6y = 128$

(*b*) $13x - 4y = 29$, $-8x + 9y = 41$

(*c*) $2x - 7y = -26$, $3x + 5y = -8$

(*d*) $-6x + 7y = -244$, $15x + 8y = 202$

6.19. استخدم قاعدة كرامر لحل المعادلات التالية :

6.19. Solve each of the following equations using Cramer's rule:

(*a*)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 7x_2 - 4x_3 &= 11 \\ 2x_1 - 8x_2 + 5x_3 &= 18 \\ 9x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 53 \end{aligned}$$

(*b*)
$$\begin{aligned} 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= -59 \\ 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= 52 \\ -x_1 + 9x_2 + 4x_3 &= 90 \end{aligned}$$

(*c*)
$$\begin{aligned} 4x_1 - 9x_2 - 2x_3 &= 28 \\ 2x_1 \qquad - 7x_3 &= 53 \\ 5x_2 - 8x_3 &= 50 \end{aligned}$$

(*d*)
$$\begin{aligned} -4x_2 + 3x_3 &= -57 \\ 8x_1 \qquad - 5x_3 &= 7 \\ 6x_1 + 7x_2 \qquad &= 78 \end{aligned}$$

Inverse Matrices المصفوفات المعكوسة

6.20. أوجد المصفوفة المعكوسة لكل من المصفوفات التالية :

6.20. Find the inverse matrix for each of the following 2 × 2 matrices:

(*a*) $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ (*b*) $B = \begin{bmatrix} 13 & -4 \\ -8 & 9 \end{bmatrix}$

(*c*) $C = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (*d*) $D = \begin{bmatrix} -6 & 7 \\ 15 & 8 \end{bmatrix}$

6.21. أوجد المصفوفة المعكوسة لكل من المصفوفات التالية :

6.21. Find the inverse matrix for each of the following 3 × 3 matrices:

(*a*) $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 2 & -8 & 5 \\ 9 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ (*b*) $B = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 2 \\ 6 & 4 & 7 \\ -1 & 9 & 4 \end{bmatrix}$

(*c*) $C = \begin{bmatrix} 4 & -9 & -2 \\ 2 & 0 & -7 \\ 0 & 5 & -8 \end{bmatrix}$ (*d*) $D = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 8 & 0 & -5 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

Business and Economic Applications التطبيقات الاقتصادية والإدارية

6.22. استخدم قاعدة كرامر أو معكوس المصفوفة لإيجاد السعر التوازنى والكمية التوازنية فى كل من الأسواق التالية :

6.22. Use Cramer's rule or matrix inversion to find the equilibrium price P_e and quantity Q_e in each of the following markets:

(*a*) العرض : $-8P + 16Q = 400$
الطلب : $5P + 20Q = 710$

(*b*) العرض : $-7P + 21Q = 546$
الطلب : $22P + 11Q = 440$

(*c*) العرض : $-30P + 6Q = -492$

الطلب : $16P + 2Q = 304$

(*d*) العرض : $-6P + 24Q = 2130$

الطلب : $15P + 5Q = 525$

6.23. استخدم قاعدة كرامر أو معكوس المصفوفة لإيجاد المستوى التوازنى للدخل Y_e ومعدل الفائدة i_e إذا أعطيت :

6.23. Use Cramer's rule or matrix inversion to find the equilibrium level of income Y_e and interest rate i_e, given

(*a*) IS: $0.35Y + 150i - 1409 = 0$
LM: $0.2Y - 100i - 794 = 0$

(*b*) IS: $0.25Y + 175i - 1757 = 0$
LM: $0.12Y - 75i - 837 = 0$

(*c*) IS: $0.12Y + 120i - 789 = 0$
LM: $0.08Y - 80i - 514 = 0$

(*d*) IS: $0.18Y + 125i - 955 = 0$
LM: $0.14Y - 50i - 731 = 0$

حل المسائل الإضافية

6.16. (*a*) $|A| = -82$ (*b*) $|B| = -158$ (*c*) $|C| = 221$ (*d*) $|D| = 0$

6.17. (*a*) $|A| = -161$ (*b*) $|B| = -534$ (*c*) $|C| = -576$ (*d*) $|D| = -502$

6.18. (*a*) $x = 8,\ y = 12$ (*b*) $x = 5,\ y = 9$ (*c*) $x = -6,\ y = 2$
(*d*) $x = 22,\ y = -16$

6.19. (*a*) $x_1 = 5,\ x_2 = 4,\ x_3 = 8$ (*b*) $x_1 = -3,\ x_2 = 7,\ x_3 = 6$
(*c*) $x_1 = 9,\ x_2 = 2,\ x_3 = -5$ (*d*) $x_1 = -1,\ x_2 = 12,\ x_3 = -3$

6.20. (*a*) $A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$ (*b*) $B^{-1} = \frac{1}{85}\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$

(*c*) $C^{-1} = \frac{1}{31}\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ (*d*) $D^{-1} = -\frac{1}{153}\begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -15 & -6 \end{bmatrix}$

6.21 (*a*) $A^{-1} = -\frac{1}{35}\begin{bmatrix} -14 & -10 & 3 \\ 49 & 30 & -23 \\ 84 & 45 & -38 \end{bmatrix}$ (*b*) $B^{-1} = \frac{1}{129}\begin{bmatrix} -47 & 50 & -64 \\ -31 & 22 & -23 \\ 58 & -37 & 68 \end{bmatrix}$

(*c*) $C^{-1} = -\frac{1}{24}\begin{bmatrix} 35 & -82 & 63 \\ 16 & -32 & 24 \\ 10 & -20 & 18 \end{bmatrix}$ (*d*) $D^{-1} = \frac{1}{288}\begin{bmatrix} 35 & 21 & 20 \\ -30 & -18 & 24 \\ 56 & -24 & 32 \end{bmatrix}$

6.22. (*a*) $P_e = 14,\ Q_e = 32$ (*b*) $P_e = 6,\ Q_e = 28$
(*c*) $P_e = 18,\ Q_e = 8$ (*d*) $P_e = 5,\ Q_e = 90$

6.23. (*a*) $Y_e = 4000,\ i_e = 0.06$ (*b*) $Y_e = 7000,\ i_e = 0.04$
(*c*) $Y_e = 6500,\ i_e = 0.075$ (*d*) $Y_e = 5250,\ i_e = 0.08$

الفصل السابع

البرمجة الخطية ـ الحل البيانى

Linear Programming : Using Graphs

7.1 الحل البيانى للبرمجة الخطية Use of Graphs

البرمجة الخطية هى أسلوب رياضى غرضه التخصيص الأمثل للموارد المحدودة بين الأنشطة أو المنتجات المتنافسة ، وأنها مفيدة فى الاقتصاد والإدارة حيث يتطلب الأمر تحقيق القيمة المثلى لدالة الأرباح أو التكاليف تحت قيود المتباينات المتعددة . فإذا كانت القيود محدودة بعاملين فإن الحل الأسهل يتمثل فى استخدام الرسوم البيانية . والطريقة البيانية للتعظيم أو التدنية موضحة فى الأقسام 7.2 و 7.4 على التوالى .

7.2 التعظيم باستخدام الرسوم البيانية Maximization Using Graphs

الطريقة البيانية للتعظيم موجزة أدناه فى أربع خطوات بسيطة . ونعرض هذه الطريقة بالمثال الواقعى لتسهيل الشرح . افترض أن منشأة ما تصنع حقائب نوم x_1 وخيام x_2 . وكل حقيبة نوم تستلزم 2 ساعة للقطع A و 5 ساعات للخياطة B وساعة واحدة للطلى ضد الماء C . وكل خيمة تتطلب ساعة واحدة للقطع و 5 ساعات للخياطة و 3 ساعات للطلى ضد الماء . وإذا علمت أن موارد الشركة هى 14 ساعة للقطع و 40 ساعة للخياطة و 18 ساعة للطلى ضد الماء فى اليوم . وأن هامش الربح 50 دولاراً فى الحقيبة الواحدة و 30 دولاراً فى الخيمة . وفى ضوء هذه المعلومات فإن التخصيص الأمثل للموارد لتعظيم الأرباح مبين فى الطريقة التالية :

1. عبر عن البيانات فى شكل معادلات أو متباينات . وتسمى الدالة التى نسعى إلى تحقيق قيمتها المثلى (العظمى أو الدنيا) بدالة الهدف وهى :

$$\pi = 50x_1 + 30x_2 \qquad (7.1)$$

وخاضعة للقيود :

القيد A : $2x_1 + x_2 \leq 14$

القيد B : $5x_1 + 5x_2 \leq 40$

القيد C : $x_1 + 3x_2 \leq 18$

والقيود اللاسالبة $x_1, x_2 \geq 0$

ويطلق على المتغيرات x_1 ، x_2 متغيرات القرار . والقيود الثلاثة الأولى تسمى قيود فنية وتتحدد بحالة التكنولوجيا وبوفرة المدخلات . والقيد الرابع هو القيد اللاسالب ويفرض على كل مشكلة حتى لا يأخذ الحل قيم سالبة (غير المقبولة) .

2. عامل قيود المتباينات كمعادلات . وأوجد قيم x_2 بدلالة x_1 ثم مثله بيانيًا . وعليه

من A : $x_2 = 14 - 2x_1$

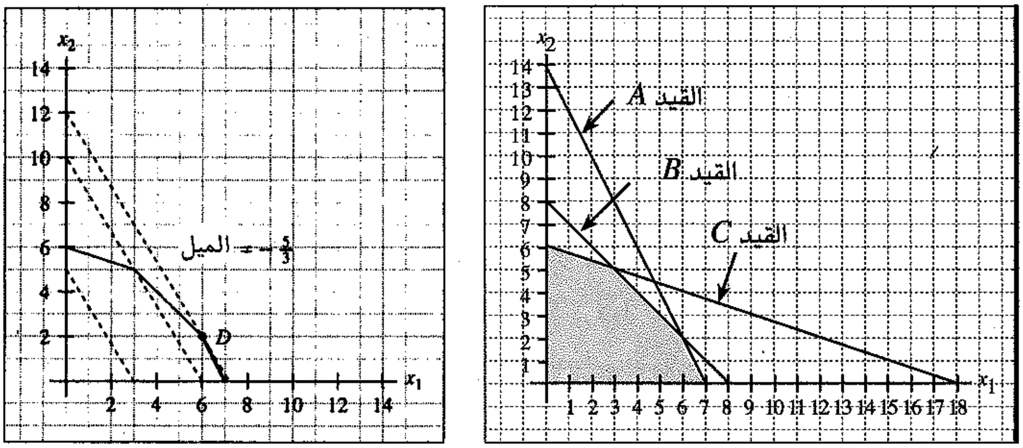
من B : $x_2 = 8 - x_1$

من C : $x_2 = 6 - \frac{1}{3}x_1$

والتمثيل البيانى للمتباينات الأصلية "أقل من أو يساوى" سوف يشمل كل النقاط على الخط وإلى اليسار منه . انظر الشكل (7-1)(a) . القيود اللاسالبة $x_1, x_2 \geq 0$ ممثلة بالمحور العمودى والأفقى على التوالى والمساحة المظللة تسمى بالمنطقة الممكنة . وتحتوى على جميع النقاط التى تحقق القيود الثلاثة بالإضافة إلى القيود اللاسالبة .

$$x_2 = -\frac{5}{3}x_1 + \frac{\pi}{30}$$

3. لإيجاد الحل الأمثل فى نطاق المنطقة الممكنة إذا وجد ، ارسم بيانيًا دالة الهدف كسلسلة من خطوط الربح المتكافئة . ومن (7.1) فإن خط الربح المتكافئ ميل $-\frac{5}{3}$. وعند رسم سلسلة من الخطوط المتقطعة لمزيد من الرباح كما فى الشكل (7-1)(b) فإننا نرى أن خط الربح المتكافئ والذى يمثل أكبر ربح ممكن يعتبر مماسًا للمنطقة الممكنة عند D حيث $x_1 = 6$ و $x_2 = 2$.



(b) (a)

شكل (7-1)

4. بالتعويض بقيم $x_1 = 6$ و $x_2 = 2$ فى المعادلة (7.1) نحصل على أقصى ربح ممكن .

$$\pi = 50(6) + 30(2) = 360$$

7.3 نظرية النقطة المتطرفة The Extreme-Point Theorem

فى الشكل (7-1)(b) فإن الربح الذى يعظم عند نقطة تقاطع القيدين يسمى بالنقطة المتطرفة . وتنص نظرية النقطة المتطرفة على أنه إذا ظهرت القيمة الممكنة المثلى لدالة الهدف فإنها سوف توجد دائمًا فى أحد النقاط المتطرفة للحدود . ففى الشكل (a)(7-1) فإننا نستطيع إيجاد عشر نقاط قصوى مثل : (0, 14) ، (0, 8) ، (0, 6) ، (7, 0) ، (8, 0) ، (18, 0) ، (3, 5) ، (6, 2) ، (4.8, 4.4) و (0, 0) والأخيرة هى نقطة تقاطع القيود اللاسالبة . والعشر نقاط هى حلول أساسية ولكن خمس نقاط هى حلول ممكنة أساسية وهى (0, 6) ، (3. 5) ، (6, 2) ، (7, 0)

و $(0, 0)$ ودائمًا واحدة فقط من الحلول الممكنة الأساسية تحقق الأمثلية . فعند $(3, 5)$ مثلاً $\pi = 50(3) + 30(5) = 300$ وهى أقل من $\pi = 360$.

7.4 التدنية باستخدام الرسوم البيانية Minimization Using Graphs

الطريقة البيانية للتدنية موجزة أدناه مع تعديل بسيط للخطوات الأربع المعروضة فى القسم 7.2 . والشرح مبين مرة أخرى بمثال واقعى لتوضيح الإجراء . افترض أن عالم نبات يرغب فى خلط سماد كيماوى ينتج كحد أدنى 45 وحدة من الفوسفات A و 48 وحدة من البوتاس B و 84 وحدة من النترات C . والنوع الأول من السماد y_1 ينتج 3 وحدات من الفوسفات و 4 وحدات من البوتاس و 14 وحدة من النترات . والنوع الثانى من السماد y_2 ينتج 9 وحدات من الفوسفات و 6 وحدات من البوتاس و 7 وحدات من النترات . وتكلفة y_1 هى 12 دولاراً وتكلفة y_2 هى 20 دولاراً والتوليفة الأدنى للتكلفة من y_1 ، y_2 والتى تحقق جميع المتطلبات الأدنى توجد كالآتى :

1. دالة الهدف التى نسعى إلى تدنيتها هى :

$$c = 12y_1 + 20y_2 \qquad (7.2)$$

وخاضعة للقيود :

القيد A : $3y_1 + 9y_2 \geq 45$

القيد B : $4y_1 + 6y_2 \geq 48$

القيد C : $14y_1 + 7y_2 \geq 84$

والقيود اللاسالبة $y_1,\ y_2 \geq 0$

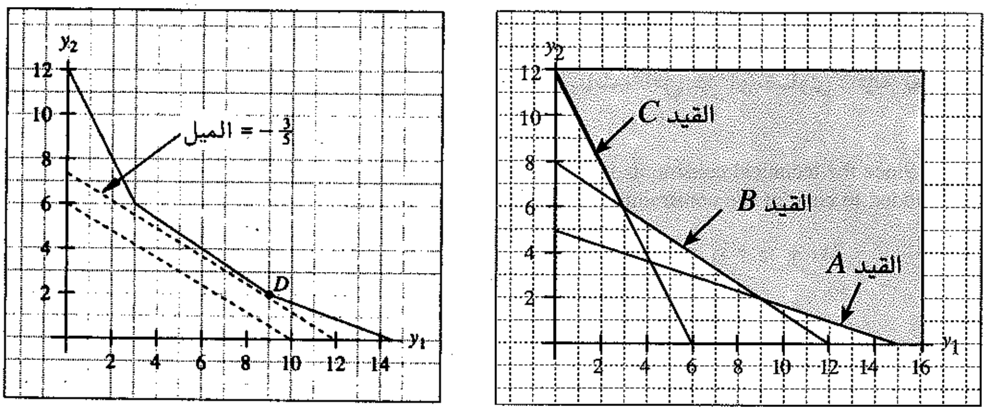
حيث تقرأ القيود الفنية $\geq$ طالما أن متطلبات التدنية يجب أن تتحقق ولكن يمكن أن تتزايد .

2. عامل قيود المتباينات كمعادلات وأوجد قيم y_2 بدلالة y_1 ثم مثله بيانيًا .

من A : $y_2 = 5 - \frac{1}{3}y_1$

من B : $y_2 = 8 - \frac{2}{3}y_1$

من C : $y_2 = 12 - 2y_1$



(b) (a)

شكل (2–7)

والتمثيل البيانى للمبتاينات الأصلية "أكبر من أو يساوي" سوف يشمل كل النقاط على الخط وإلى اليمين منه . انظر الشكل (7.2)(*a*) . والمساحة المظللة هى المنطقة الممكنة وتحتوى على جميع النقاط التى تحقق القيود الثلا ثة بالإضافة إلى القيود اللاسالبة .

3. لإيجاد الحل الأمثل فى نطاق المنطقة الممكنة ارسم بيانيًا دالة الهدف كسلسلة من خطوط التكلفة المتكافئة . ومن المعادلة (7.2) .

$$y_2 = -\frac{3}{5}y_1 + \frac{c}{20}$$

فى الشكل (7–2)(*b*) نرى أن خط التكلفة الأدنى هو مماس للمنطقة الممكنة عند D حيث $y_1 = 9$ ، $y_2 = 2$.

4. بالتعويض عن القيم الأمثل $y_1 = 9$ ، $y_2 = 2$ فى المعادلة (7.2) نحصل على أقل تكلفة .

$$c = 12(9) + 20(2) = 148$$

لاحظ بالنسبة لمشكلات التدنية أن (0, 0) ليست فى المنطقة الممكنة ولا توجد توليفة أخرى ممكنة تقدم أقل تكلفة . فعند (3, 6) مثلاً $C = 12(3) + 20(6) = 156$. انظر أيضًا المسائل 6.7 إلى 7.8 و 7.14 إلى 7.19 .

7.5 المتغيرات الخاملة والفائضة Slack and Surplus Variables

المشكلات التى تتضمن أكثر من المتغيرين لا يمكن حلها باستخدام الطريقة البيانية ذات البعدين والتى تعرض فى الأقسام القادمة . وحيث إن هناك حاجة للمعادلات فإن نظام المتباينات الخطية يجب أن يحول إلى نظام المعادلات الخطية . وهذا معمول به مع إدخال المتغيرات الخاملة والفائضة فى كل متباينة فى النظام .

المتباينة A "أقل من أو يساوى" مثل $9x_1 + 2x_2 \leq 86$ يمكن أن تحول إلى معادلة بإضافة المتغير الخامل $s \geq 0$ بحيث $9x_1 + 2x_2 + s = 86$ ، فإذا كانت $9x_1 + 2x_2 = 86$ فإن المتغير الخامل $s = 0$. وإذا كانت $9x_1 + 2x_2 < 86$ فإن s هو قيمة موجبة تساوى الفرق بين 86 و $9x_1 + 2x_2$.

والمتباينة "أكبر من أو تساوى" مثل $3y_1 + 8y_2 \geq 55$ يمكن أن تحول إلى معادلة بطرح المتغير الفائض $s \geq 0$ مثل $3y_1 + 8y_2 - s = 55$. فإذا كانت $3y_1 + 8y_2 = 55$ فإن المتغير الفائض $s = 0$. وإذا كانت $3y_1 + 8y_2 \leq 55$ فإن s هو قيمة موجبة تساوى الفرق بين $3y_1 + 8y_2$ و 55 .

مثال 1 : طالما أن القيود الفنية فى القسم (7.2) لجميع المتباينات "أقل من أو تساوى" فإنه يجب إضافة متغير خامل منفصل لكل قيد كما يلى :

EXAMPLE 1. Since the technical constraints in Section 7.2 all involve "less than or equal to" inequalities, a separate slack variable is added to each of the constraints as follows:

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 14 \qquad 5x_1 + 5x_2 + s_2 = 40 \qquad x_1 + 3x_2 + s_3 = 18$$

ونعبر عنها فى شكل مصفوفة .

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 40 \\ 18 \end{bmatrix}$$

وعلى العكس فإن القيود الفنية فى القسم (7.4) هى "أكبر أو تساوى" وهنا نطرح متغير فائض منفصل من كل قيد فى متباينة كما يلى :

$$3y_1+9y_2-s_1=45 \qquad 4y_1+6y_2-s_2=48 \qquad 14y_1+7y_2-s_3=84$$

وفى شكل المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & -1 & 0 \\ 14 & 7 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 48 \\ 84 \end{bmatrix}$$

7.6 نظرية الأساس The Basis Theorem

وكما شرحنا فى القسم 4.1 فإذا أعطيت نظام من المعادلات المتسقة n والمتغيرات v حيث $v > n$ فسيكون هناك عدد لانهائى من الحلول . ولكن لحسن الحظ فإن عدد النقاط القصوى محدود . وتنص نظرية الأساس على أنه فى ظل نظام من المعادلات n والمتغيرات v وحيث $v > n$ فإن الحل يكون نقطة قصوى عندما يكون عدد المتغيرات ناقص عدد المعادلات يساوى صفراً . وبوضع $v - n = 0$ وإيجاد المعادلات n بالنسبة للمتغيرات الباقية v فإننا نحصل على النقطة القصوى أو الحل الأساسى . وعدد الحلول الأساسية N نحصل عليه بالمعادلة الآتية :

$$N=\frac{v!}{n!(v-n)!}$$

حيث تقرأ $v!$ بمضروب v ومشروحة فى المثال 3 .

مثال 2 : وعند اختزال المتباينات إلى معادلات فى المثال 1 فإننا نحصل على مجموعتين بكل مجموعة ثلاث معادلات وخمسة متغيرات وهى $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)$ و $(y_1, y_2, s_1, s_2, s_3)$ وطريقة تحديد عدد المتغيرات التى يجب أن تساوى الصفر لكى نحصل على الحل الأساسى موضحة أدناه .

طالما توجد ثلاث معادلات وخمسة متغيرات فى كل مجموعة من المعادلات فإن نظرية الأساس تشير إلى أن $v-n$ يساوى صفراً للحل الأساسى أو $5-3$ أو متغيرين لابد أن يساوى صفراً فى كل مجموعة من المعادلات لكى نحصل على الحل الأساسى أو النقطة القصوى . والحل الأساسى المبدئى يمكن قراءته مباشرة من المصفوفة الأصلية . فمثلاً بوضع $x_1=0$ ، $x_2=0$ فى أول مجموعة من المعادلات فى المثال 1 . نجد أن الحل الأساسى المبدئى : $s_1=14$ ، $s_2=40$ ، $s_3=18$ وبالمثل بوضع $y_1=0$ ، $y_2=0$ ف المجموعة الثانية من المعادلات نحصل على الحل الأساسى المبدئى : $s_1=-45$ ، $s_2=-48$ ، $s_3=-84$. ويلاحظ أنه فى مسائل التدنية فإن الحل الأساسى المبدئى غير ممكن لأنه ينتهك القيود اللاسالبة .

مثال 3 : إن الحسابات الضرورية لتحديد العدد الكلى للحلول الأساسية N التى توجد موضحة أدناه .

EXAMPLE 3. The calculations necessary to determine the total number of basic solutions N that exist are illustrated below.

باستخدام صيغة عدد الحلول الأساسية $v!/[n!(v-n)!]$ وبالتعويض بالمعاملات المعطاة من المثال 1 حيث إنه فى كلتا المجموعتين من المعادلات $v=5$ ، $n=3$.

$$N = \frac{5!}{3!(2)!}$$

حيث $5! = 5(4)(3)(2)(1)$. ولذلك

$$N = \frac{5(4)(3)(2)(1)}{3(2)(1)(2)(1)} = 10 \quad \text{حلول أساسية}$$

وهذا يؤكد صحة النتيجة التى حصلنا عليها فى القسم 7.3 من خلال الطريقة الأولية لحساب النقاط القصوى فى الشكل $(7\text{–}1)(a)$ وطالما أن عدد المعاملات فى القسم (7.4) هى نفسها فإننا نعلم أنه يوجد أيضًا 10 نقاط قصوى فى تلك المسألة والتى يمكن التأكد منها من خلال التحقق منهم فى الشكل $(7\text{–}2)(a)$: $(0, 12)$ ، $(0, 8)$ ، $(0, 5)$ ، $(6, 0)$ ، $(12, 0)$ ، $(15, 0)$ ، $(3, 6)$ ، $(9, 2)$ $(4.2, 3.6)$ و $(0, 0)$. ويلاحظ أنه طالما $(0, 0)$ منطقة غير ممكنة فإنه يوجد أربعة حلول ممكنة هى : $(0, 12)$ ، $(3, 6)$ ، $(9, 2)$ و $(15, 0)$.

مسائل محلولة

التعبير الرياضى للمشكلات الاقتصادية

Mathematical Interpretation of Economic Problems

.7.1 مصنع يصنع السلعتين x_1 ، x_2 . إنتاج الأولى يتطلب 5 ساعات للمعادلة و 3 ساعات للتركيب و 4 ساعات للتعليب والثانية تتطلب ساعتين للمعادلة و 12 ساعة للتركيب و 8 ساعات للتعليب . ويتوفر فى المصنع 40 ساعة للمعالجة و 60 ساعة للتركيب و 48 ساعة للتعليب . وهامش الربح لـ x_1 هو 7 دولارات ولـ x_2 هو 21 دولاراً . عبر عن هذه البيانات فى شكل معادلات ومتباينات لكى تحدد مزيج الناتج الذى سوف يعظم الأرباح .

7.1. A manufacturer makes two products x_1 and x_2. The first requires 5 hours for processing, 3 hours for assembling, and 4 hours for packaging. The second requires 2 hours for processing, 12 hours for assembling, and 8 hours for packaging. The plant has 40 hours available for processing, 60 for assembling, and 48 for packaging. The profit margin for x_1 is \$7; for x_2 it is \$21. Express the data in equations and inequalities necessary to determine the output mix that will maximize profits.

تعظيم الدالة : $\pi = 7x_1 + 21x_2$ مع مراعاة القيود :

قيد المعالجة : $5x_1 + 2x_2 \leq 40$

قيد التركيب : $3x_1 + 12x_2 \leq 60$

قيد التعليب : $4x_1 + 8x_2 \leq 48$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل البيانى انظر المسألة 7.9 .

.7.2 مصنع ألومنيوم ينتج نوعين من الألومنيوم x_1 ، x_2 . النوع الأول يستغرق 6 ساعات للصهر و 3 ساعات للتكور وساعة للقطع . والنوع الثانى يستغرق ساعتين للصهر و 5 ساعات للتكور و 4 ساعات للقطع . ويتوفر فى المصنع 36 ساعة للصهر 30 ساعة للتكور و 20 ساعة للقطع . هامش الربح 10 دولارات لـ x_1 و8 دولارات لـ x_2 . اختزل البيانات فى شكل معادلات ومتباينات مناسبة لإيجاد مزيج الناتج الذى يعظم الربح .

7.2. An aluminum plant turns out two types of aluminum x_1 and x_2. Type 1 takes 6 hours for melting, 3 hours for rolling, and 1 hour for cutting. Type 2 takes 2 hours for melting, 5 hours for rolling, and 4 hours for cutting. The plant has 36 hours of melting time available, 30 hours of rolling time, and 20 hours of cutting time. The profit margin is \$10 for x_1 and \$8 for x_2. Reduce the data to equations and inequalities suitable for finding the profit-maximizing output mix.

تعظيم الدالة : $\pi = 10x_1 + 8x_2$ مع مراعاة القيود :
قيد الصهر : $6x_1 + 2x_2 \leq 36$
قيد التكور : $3x_1 + 5x_2 \leq 30$
قيد القطع : $x_1 + 4x_2 \leq 20$
$x_1, x_2 \geq 0$

.7.3 صائغ مجوهرات يصنع قلائد x_1 ، وأساور x_2 . هامش الربح للقلادة 32 دولاراً وللسوار 24 دولاراً . تتطلب القلائد ساعتين لقطع الأحجار و 7 ساعات للتثبيت و 6 ساعات للتلميع . والأساور تتطلب 5 ساعات لقطع الأحجار و 7 ساعات للتثبيت و 3 ساعات للتلميع . ويتوفر عند الصائغ 40 ساعة لقطع الأحجار و70 ساعة للتثبيت و 48 ساعة للتلميع . حول البيانات إلى معادلات ومتباينات لإيجاد المزيج من الإنتاج المعظم للربح .

7.3. A costume jeweler makes necklaces x_1 and bracelets x_2. Necklaces have a profit margin of \$32; bracelets \$24. Necklaces take 2 hours for stonecutting, 7 hours for setting, and 6 hours for polishing. Bracelets take 5 hours for stonecutting, 7 hours for setting, and 3 hours for polishing. The jeweler has 40 hours for stonecutting, 70 hours for setting, and 48 hours for polishing. Convert the data to equations and inequalities needed to find the profit-maximizing output mix.

تعظيم الدالة : $\pi = 32x_1 + 24x_2$ مع مراعاة القيود :
قيد القطع : $2x_1 + 5x_2 \leq 40$
قيد التثبيت : $7x_1 + 7x_2 \leq 70$
قيد التلميع : $6x_1 + 3x_2 \leq 48$
$x_1, x_2 \geq 0$

.7.4 خزاف يصنع الأباريق x_1 ، والطاسات x_2 ، والأطباق x_3 . بهامش ربح 18 دولاراً و10 دولارات و 12 دولاراً على التوالى . الأباريق تتطلب 5 ساعات للنسيج و 3 ساعات للطلاء . والطاسات ساعتين للنسيج وساعة للطلاء والأطباق 3 ساعات للنسيج وساعتين للطلاء . ويتوفر عند الخزاف 55 ساعة للنسيج و 36 ساعة للطلاء . اختزل المعلومات فى شكل معادلات ومتباينات لإيجاد مزيج الناتج الأمثل .

7.4. A potter makes pitchers x_1, bowls x_2, and platters x_3, with profit margins of \$18, \$10, and \$12, respectively. Pitchers require 5 hours of spinning and 3 hours of glazing; bowls, 2 hours of spinning and 1 of glazing; platters, 3 hours of spinning and 2 of glazing. The potter has 55 hours of spinning time and 36 hours of glazing time. Reduce the information to equations and inequalities needed to find the optimal output mix.

تعظيم الدالة : $\pi = 18x_1 + 10x_2 + 12x_3$ مع مراعاة القيود :
قيد النسيج : $5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 55$
قيد الطلاء : $3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 36$
$x_1, x_2 \geq 0$

7.5. نجار يصنع ثلاثة أنواع من الخزائن : تقليدية x_1 ، وريفية x_2 ، وحديثة x_3 . الموديل التقليدى يتطلب 8 ساعات للتركيب و 5 ساعات للصقل و 6 ساعات للصبغ . والموديل الريفى يتطلب 6 ساعات للتركيب و4 ساعات للصقل وساعتان للصبغ . والموديل الحديث يتطلب 5 ساعات للتركيب وساعتان للصقل و4 ساعات للصبغ . ويتوفر للنجار 96 ساعة للتركيب و 44 ساعة للصقل و 58 ساعة للصبغ . وهوامش الربح هى 38 دولاراً ، 26 دولاراً ، 22 دولاراً لـ x_1 ، x_2 ، x_3 على التوالى . عبر عن البيانات فى شكل رياضى مناسب من أجل إيجاد مزيج الناتج الأمثل .

7.5. A carpenter makes three types of cabinets: provincial x_1, colonial x_2, and modern x_3. The provincial model requires 8 hours for fabricating, 5 hours for sanding, and 6 hours for staining. The colonial model requires 6 hours for fabricating, 4 for sanding, and 2 for staining. The modern model requires 5 hours for fabricating, 2 for sanding, and 4 for staining. The carpenter has 96 hours for fabricating, 44 for sanding, and 58 for staining. Profit margins are \$38, \$26, and \$22 on x_1, x_2, and x_3, respectively. Express the data in mathematical form suitable for finding the optimal output mix.

تعظيم الدالة : $\pi = 38x_1 + 26x_2 + 22x_3$ مع مراعاة القيود :

قيد التركيب : $8x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 96$

قيد الصقل : $5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 44$

قيد الصبغ : $6x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 58$

$x_1, x_2 \geq 0$

7.6. مراقب اللعبة أراد أن تحصل حيواناته على حد أدنى قدره 36 ملجم من اليود و 84 ملجم من الحديد و16 ملجم من الزنك كل يوم . النوع الأول من التغذية y_1 ينتج 3 ملجم من اليود و 6 ملجم من الحديد وواحد ملجم من الزنك . والنوع الثانى من التغذية y_2 ينتج 2 ملجم من اليود و 6 ملجم من الحديد و 4 ملجم من الزنك . ويتكلف النوع الأول من التغذية 20 دولاراً والنوع الثانى 15 دولاراً . بدلالة المعادلات والرسوم البياتية حدد توليفة التكلفة الدنيا للتغذية التى تضمن المتطلبات اليومية .

7.6. A game warden wants his animals to get a minimum of 36 milligrams (mg) of iodine, 84 mg of iron, and 16 mg of zinc each day. One feed y_1 provides 3 mg of iodine, 6 mg of iron, and 1 mg of zinc; a second feed y_2 provides 2 mg of iodine, 6 mg of iron, and 4 mg of zinc. The first type of feed costs \$20; the second, \$15. In terms of equations and graphs, what is the least-cost combination of feeds guaranteeing daily requirements?

تعظيم الدالة : $c = 20y_1 + 15y_2$ مع مراعاة القيود :

(متطلبات اليود) $3y_1 + 2y_2 \geq 36$

(متطلبات الحديد) $6y_1 + 6y_2 \geq 84$

(متطلبات الزنك) $y_1 + 4y_2 \geq 16$

$y_1, y_2 \geq 0$

للحل باستخدام الرسوم البيانية انظر المسألة 7.14 .

7.7. خبير التغذية (Nutritionist) يرغب لزبائنه فى تناول حد أدنى قدره 30 وحدة من فيتامين A و 20 وحدة من فيتامين D و 24 وحدة من فيتامين E يوميًا . النوع الأول من التغذية y_1 يكلف 80 دولاراً للكيلو جرام وينتج وحدتين من فيتامين A و 5 وحدات من فيتامين D ووحدتين من فيتامين E . والنوع الثانى يكلف 160 للكيلوجرام وينتج 6 وحدات من فيتامين A ووحدة واحدة من فيتامين D و 3 وحدات من فيتامين E .

أوصف توليفة للتغذية التى تفى بالمتطلبات اليومية وتحقق التكلفة الدنيا بدلالة المعادلات والمتباينات .

7.7. A nutritionist wishes her clients to have a daily minimum of 30 units of vitamin A, 20 units of vitamin D, and 24 units of vitamin E. One dietary supplement y_1 costs \$80 per kilogram (\$80/kg) and provides 2 units of vitamin A, 5 units of vitamin D, and 2 units of vitamin E. A second y_2 costs \$160/kg and provides 6 units of vitamin A, 1 unit of vitamin D, and 3 units of vitamin E. Describe the least-cost combination of supplements meeting daily requirements in terms of equations and inequalities.

تعظيم الدالة : $c = 80y_1 + 160y_2$ مع مراعاة القيود :

(متطلبات فيتامين A) $2y_1 + 6y_2 \geq 30$

(متطلبات فيتامين D) $5y_1 + y_2 \geq 20$

(متطلبات فيتامين E) $2y_1 + 3y_2 \geq 24$

$y_1, y_2 \geq 0$

انظر المسألة 7.15 للحل البيانى .

7.8. يرغب مصنع غذاء فى صنع خلطة غذائية بأقل تكلفة تتكون من ثلاثة أجزاء . الأول ينتج 4 وحدات كربوهيدرات و 3 وحدات بروتين ويكلف 25 دولاراً للأوقية . الثانى ينتج 6 وحدات كربوهيدرات ووحدتين من البروتين ويكلف 32 دولاراً للأوقية . الثالث ينتج 9 وحدات كربوهيدرات و 5 وحدات بروتين ويكلف 55 دولاراً للأوقية . الخلطة يجب أن تحتوى على الأقل على 60 وحدة من الكربوهيدرات و 45 وحدة من البروتين . عبر عن هذه المعلومات رياضيًا .

7.8. A food processor wishes to make a least-cost package mixture consisting of three ingredients y_1, y_2, and y_3. The first provides 4 units of carbohydrates and 3 units of protein and costs 25 cents an ounce. The second provides 6 units of carbohydrates and 2 units of protein and costs 32 cents an ounce. The third provides 9 units of carbohydrates and 5 units of protein and costs 55 cents an ounce. The package mix must have at least 60 units of carbohydrates and 45 units of protein. Express the information mathematically.

تعظيم الدالة : $c = 0.25y_1 + 0.32y_2 + 0.55y_3$ مع مراعاة القيود :

(متطلبات الكربوهيدرات) $4y_1 + 6y_2 + 9y_3 \geq 60$

(متطلبات البروتين) $3y_1 + 2y_2 + 5y_3 \geq 45$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Graphing Maximization Problems مسائل التعظيم بالرسم البيانى

7.9. باستخدام البيانات أدناه اشتق من المسألة 7.1 .

1. مثل بيانيًا قيود المتباينة من خلال حل كل منهما بالنسبة x_2 بدلالة x_1 .
2. أعد التمثيل البيانى وظلل المنطقة الممكنة .
3. احسب ميل دالة الهدف . حدد قاعدة لهذا الميل وحركه إلى النقطة التى تكون مماسًا للمنطقة الممكنة وكون خط متقطع .
4. اقرأ القيم الحرجة لـ x_1 و x_2 عند نقطة المماس وقدر دالة الهدف عند هذه القيم .

7.9. Using the data below derived from Problem 7.1,

(1) Graph the inequality constraints by first solving each for x_2 in terms of x_1.

(2) Regraph and darken in the feasible region.

(3) Compute the slope of the objective function. Set a ruler with this slope, move it to the point where it is tangent to the feasible region, and construct a dashed line.

(4) Read the critical values for x_1 and x_2 at the point of tangency, and evaluate the objective function at these values.

تعظيم الدالة : $\pi = 7x_1 + 21x_2$ مع مراعاة القيود :

(القيد A) $5x_1 + 2x_2 \le 40$

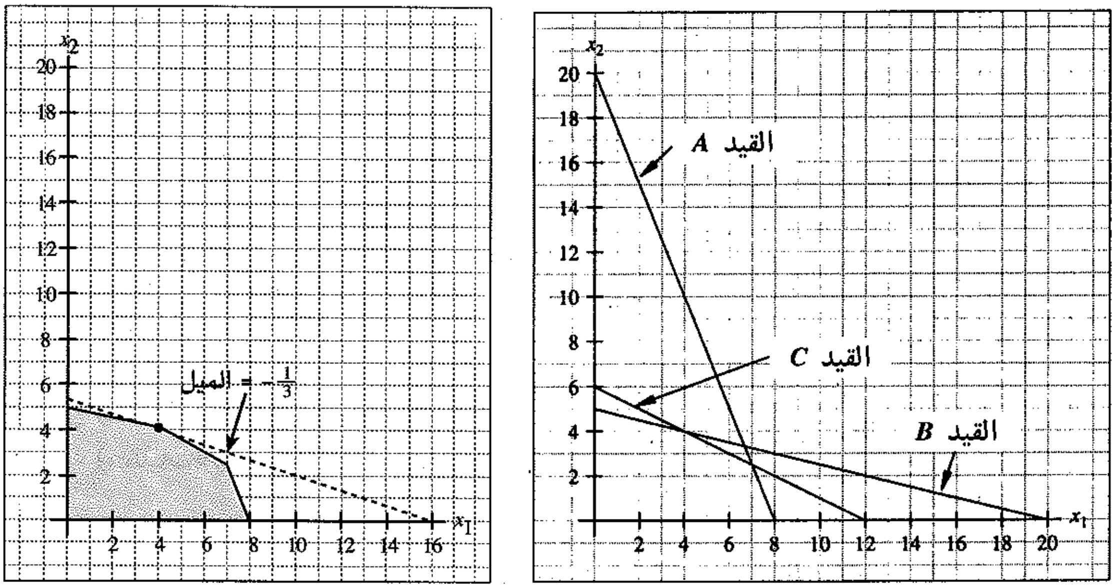
(القيد B) $3x_1 + 12x_2 \le 60$

(القيد C) $4x_1 + 8x_2 \le 48$

$x_1, x_2 \ge 0$

قيود المتباينة ينبغى أن تمثل بيانيًا كما هو موضح فى الشكل (7-3)(*a*) من القيد *A* . $x_2 = 2.5x_1 + 20$. ومن القيد *B* . $x_2 = -\frac{1}{4}x_1 + 5$. ومن القيد *C* . $x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + 6$. القيود اللاسالبة تقيد التحليل بالربع الأول .

المنطقة الممكنة ممثلة بيانيًا كما هو موضح فى الشكل (7-3)(*b*) . من دالة الهدف . $x_2 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{\pi}{21}$ فإن الميل هو $-\frac{1}{3}$. عند نقطة المماس مع المنطقة الممكنة $x_1 = 4$ ، $x_2 = 4$ ولذلك فإن $\pi = 7(2) + 21(4) = 112$.



(*b*) (*a*)

شكل (7-3)

7.10. أعد حل المسألة 7.9 باستخدام البيانات التالية المشتقة من المسألة 7.2 .

7.10. Redo Problem 7.9, using the following data derived from Problem 7.2:

تعظيم الدالة : $\pi = 10x_1 + 8x_2$ مع مراعاة القيود :

(القيد A) $6x_1 + 2x_2 \le 36$

(القيد B) $3x_1 + 5x_2 \le 30$

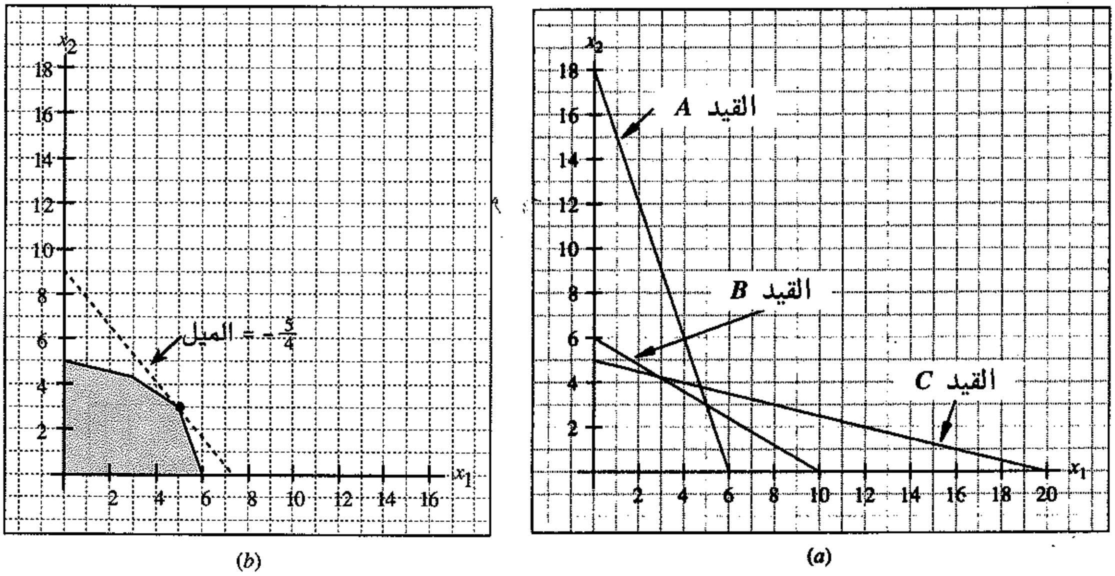
(القيد C) $x_1 + 4x_2 \le 20$

$x_1, x_2 \ge 0$

الشكل (a)(7–4) يمثل التمثيل البيانى للقيود والشكل (b)(7–4) يمثل المنطقة الممكنة .

من دالة الهدف $x_2 = -\frac{5}{4}x_1 + \pi/8$. والميل هو $-\frac{5}{4}$. فى الشكل (b)(7–4) تظهر نقطة المماس عند (5, 3) .

ومن هنا فإن $x_1 = 5$ ، $x_2 = 3$ وأن $\pi = 10(5) + 8(3) = 74$.



(b) (a)

شكل (4–7)

7.11. Redo Problem 7.9 for the following data:

7.11. أعد حل المسألة 7.9 من البيانات التالية :

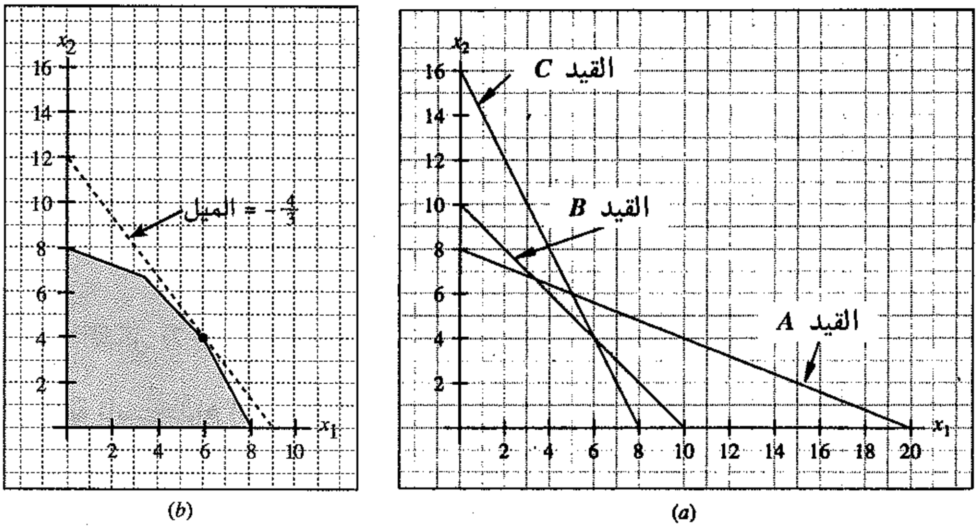
تعظيم الدالة : $\pi = 8x_1 + 6x_2$ مع مراعاة القيود :

(القيد A) $2x_1 + 5x_2 \le 40$

(القيد B) $3x_1 + 3x_2 \le 30$

(القيد C) $8x_1 + 4x_2 \le 64$

$x_1, x_2 \ge 0$



(b) (a)

شكل (5–7)

المتباينات مثلت بيانيًا فى الشكل (7–5)(a) والمنطقة الممكنة فى الشكل (7–5)(b) .

من دالة الهدف $x_2 = -\frac{4}{3}x_1 + \pi/6$. والميل هو $-\frac{4}{3}$. فى الشكل (7–5)(b) تظهر نقطة المماس عند $x_1 = 6$ و $x_2 = 4$. ولذلك فإن $\pi = 8(6) + 6(4) = 72$.

7.12. أعد حل المسألة 7.9 من البيانات التالية :

7.12. Redo Problem 7.9 for the following data:

تعظيم الدالة : $\pi = 15x_1 + 20x_2$ مع مراعاة القيود :

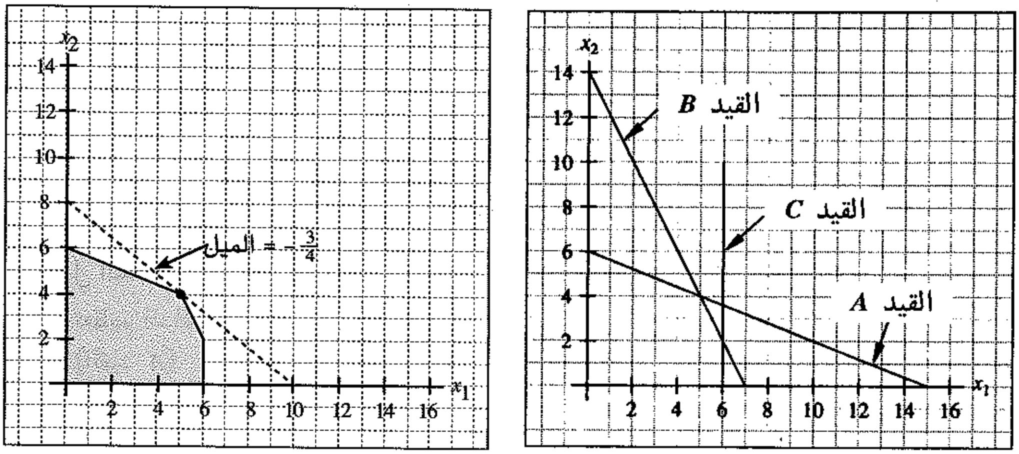
(القيد A) $4x_1 + 10x_2 \le 60$

(القيد B) $6x_1 + 3x_2 \le 42$

(القيد C) $x_1 \le 6$

$x_1, x_2 \ge 0$

الشكل (7–6)(a) يمثل القيود بيانيًا والشكل (7–6)(b) للمنطقة الممكنة . فى الشكل (7–6)(b) تظهر نقطة المماس عند $x_1 = 5$ ، $x_2 = 4$ وأن $\pi = 15(5) + 20(4) = 155$.



(b) (a)

شكل (7–6)

7.13. أعد حل المسألة 7.9 من البيانات التالية :

7.13. Redo Problem 7.9 for the following data:

تعظيم الدالة : $\pi = 25x_1 + 50x_2$ مع مراعاة القيود :

(القيد A) $9x_1 + 12x_2 \le 144$

(القيد B) $10x_1 + 6x_2 \le 120$

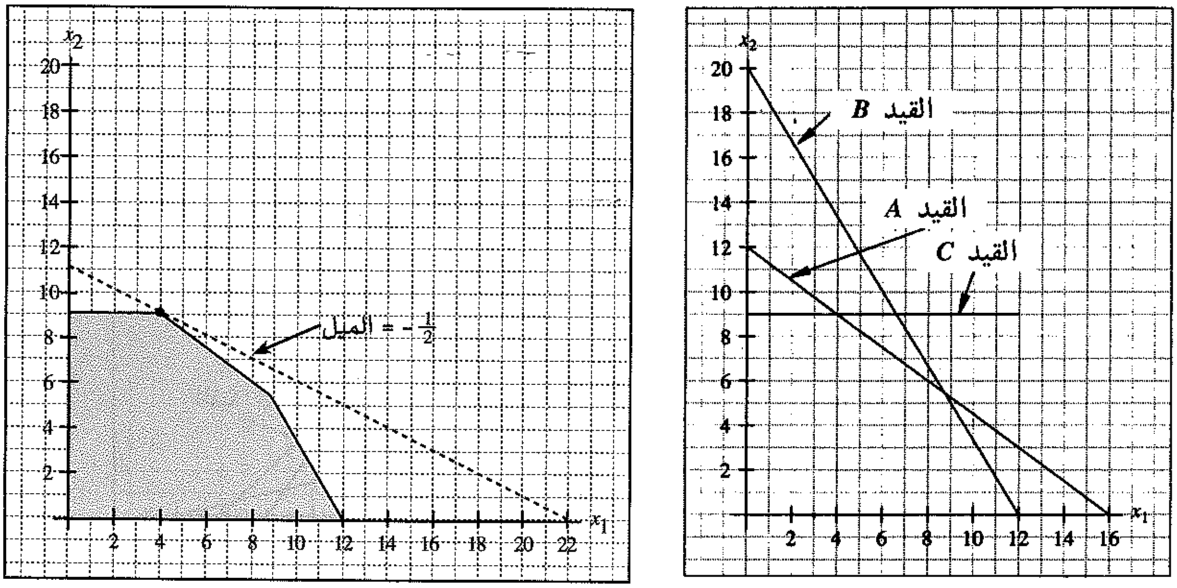
(القيد C) $x_2 \le 9$

$x_1, x_2 \ge 0$

الشكل (7–7) فإن القيم الحرجة $x_1 = 4$ ، $x_2 = 9$ ، $\pi = 25(4) + 50(9) = 550$.

التدنية باستخدام التمثيل البيانى Minimization Using Graphs

7.14. باستخدام البيانات من المسألة 7.6 مثل بيانيًا قيود المتباينة من خلال إيجاد كل من y_2 بدلالة y_1 . وأعد التمثيل البيانى وظلل المنطقة الممكنة . احسب ميل دالة الهدف وكون خط متقطع كما فى المسألة 7.9 .



(*b*) (*a*)

شكل (7-7)

اقرأ القيم الحرجة لـ y_1 و y_2 عند نقطة المماس ثم قدر دالة الهدف عند هذه القيم .

7.14. Using the following data from Problem 7.6, graph the inequality constraints by first solving each for y_2 in terms of y_1. Regraph and darken in the feasible region. Compute the slope of the objective function and construct a dashed line as in Problem 7.9. Read the critical values for y_1 and y_2 at the point of tangency, and evaluate the objective function at these values.

تدنية الدالة : $c = 20y_1 + 15y_2$ مع مراعاة القيود :

(القيد A) $3y_1 + 2y_2 \geq 36$

(القيد B) $6y_1 + 6y_2 \geq 84$

(القيد C) $y_1 + 4y_2 \geq 16$

$y_1, y_2 \geq 0$

انظر الشكل (7-8) . من دالة الهدف $y_2 = -\frac{4}{3}y_1 + c/15$. الميل $= -\frac{4}{3}$ من الشكل (7-8)(*b*) $y_1 = 8$ ، $y_2 = 6$ ، ومن ثم $c = 20(8) + 15(6) = 250$.

.7.15 أعد حل المسألة 7.14 باستخدام البيانات المشتقة من المسألة 7.7 :

7.15. Redo Problem 7.14, using the data derived from Problem 7.7.

تدنية الدالة : $c = 80y_1 + 160y_2$ مع مراعاة القيود :

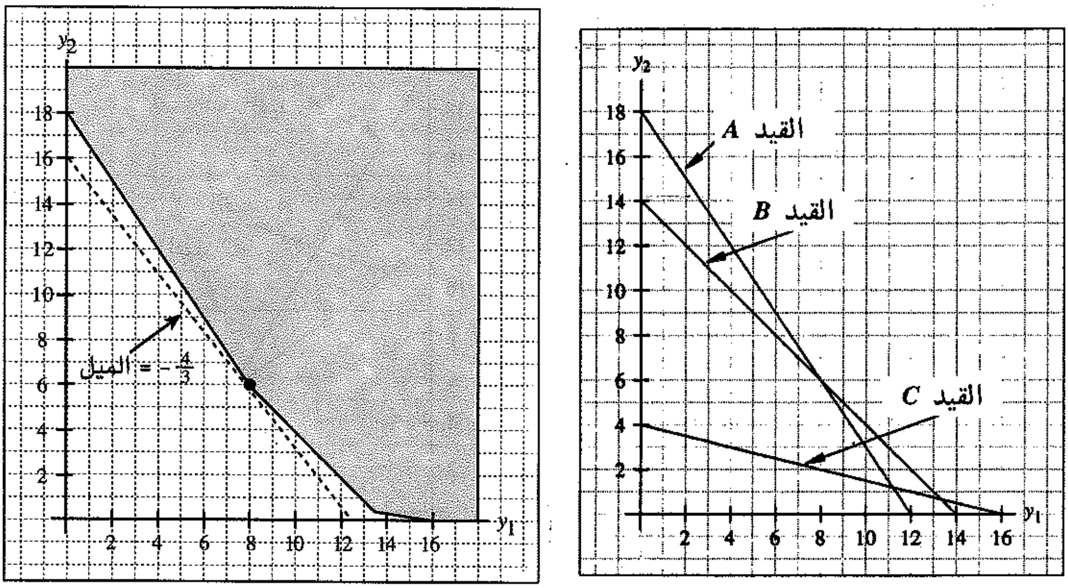
(القيد A) $2y_1 + 6y_2 \geq 30$

(القيد B) $5y_1 + y_2 \geq 20$

(القيد C) $2y_1 + 3y_2 \geq 24$

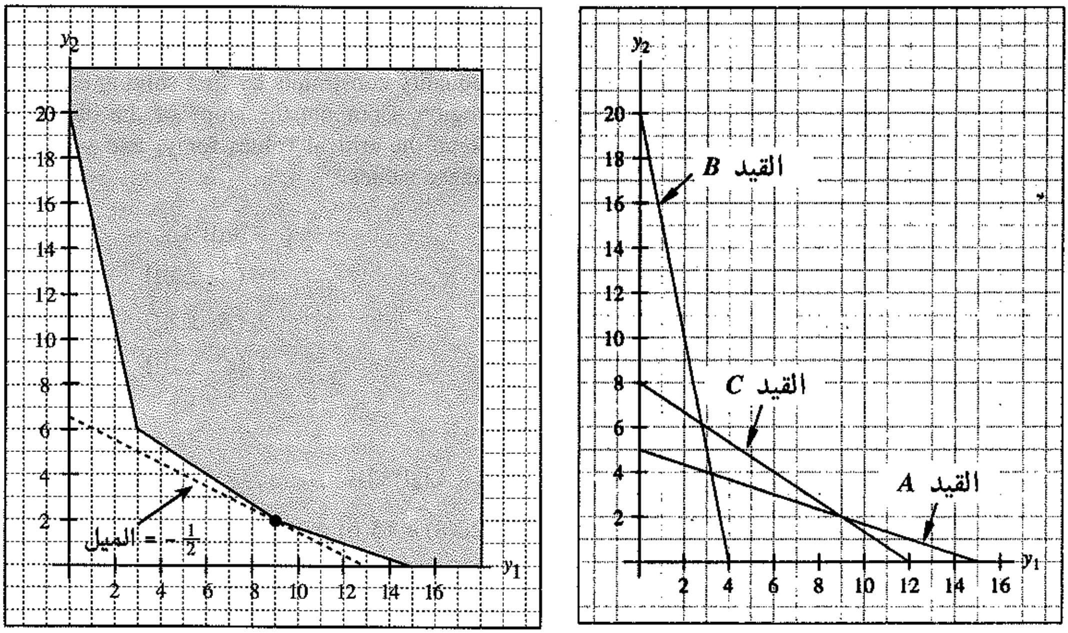
$y_1, y_2 \geq 0$

القيود ممثلة بيانيًا فى الخط (7-9)(*a*) . والمنطقة الممكنة فى الشكل (7-9)(*b*) . وميل الخط المتكافئ هو $-\frac{1}{2}$ ومن ثم $y_1 = 9$ ، $y_2 = 2$ ، $c = 80(9) + 160(2) = 1040$.



(b) (a)

شكل (7–8)



(b) (a)

شكل (7–9)

7.16. Redo Problem 7.14, using the following data: **7.16.** أعد حل المسألة 7.14 باستخدام البيانات التالية :

تدنية الدالة : $c = 6y_1 + 3y_2$ مع مراعاة القيود :

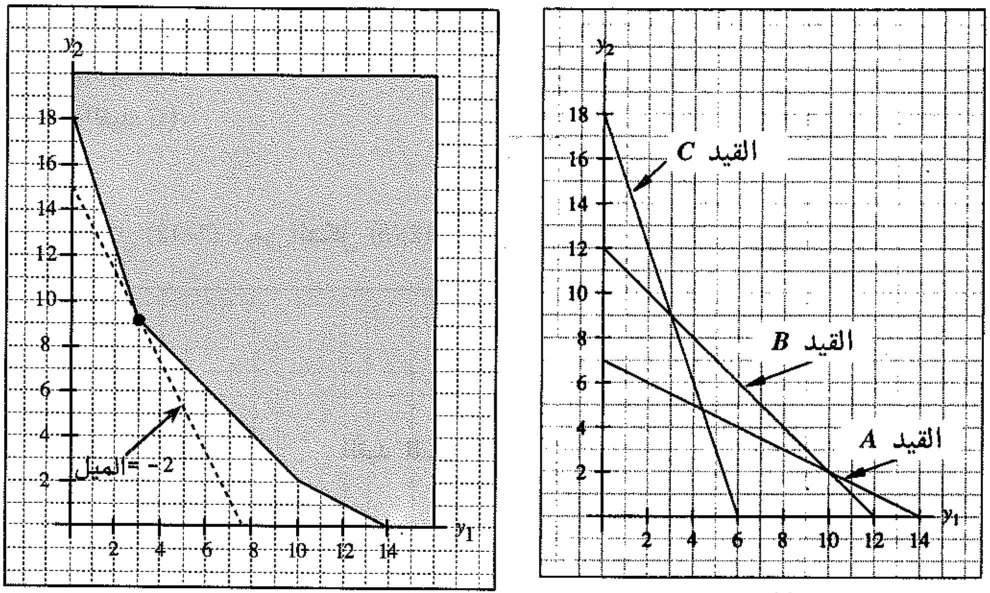
(القيد A) $y_1 + 2y_2 \geq 14$

(القيد B) $y_1 + y_2 \geq 12$

(القيد C) $3y_1 + y_2 \geq 18$

$y_1, y_2 \geq 0$

انظر شكل (10–7) . من الشكل (b)(7–10) $y_1 = 3$ ، $y_2 = 9$ ، ومن ثم $c = 6(3) + 3(9) = 45$.



(b)

(a)

شكل (10–7)

7.17. Redo Problem 7.14, using the following data:

.7.17 أعد حل المسألة 7.17 باستخدام البيانات التالية :

تدنية الدالة : $c = 15y_1 + 12y_2$ مع مراعاة القيود :

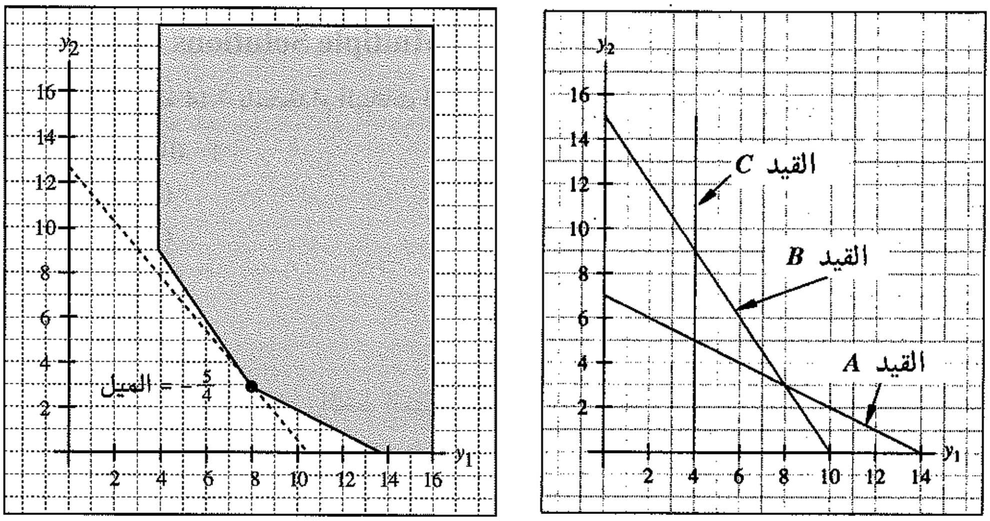
(القيد A) $4y_1 + 8y_2 \ge 56$

(القيد B) $3y_1 + 2y_2 \ge 30$

(القيد C) $y_1 \ge 4$

$y_1, y_2 \ge 0$

انظر شكل (11–7) . من الشكل (b)(7–11) $y_1 = 8$ ، $y_2 = 3$ ، ومن ثم $c = 15(8) + 12(3) = 156$.



(b)

(a)

شكل (11–7)

7.18. Redo Problem 7.14, using the following data: **7.18.** أعد حل المسألة 7.14 باستخدام البيانات التالية :

تدنية الدالة : $c = 7y_1 + 28y_2$ مع مراعاة القيود :

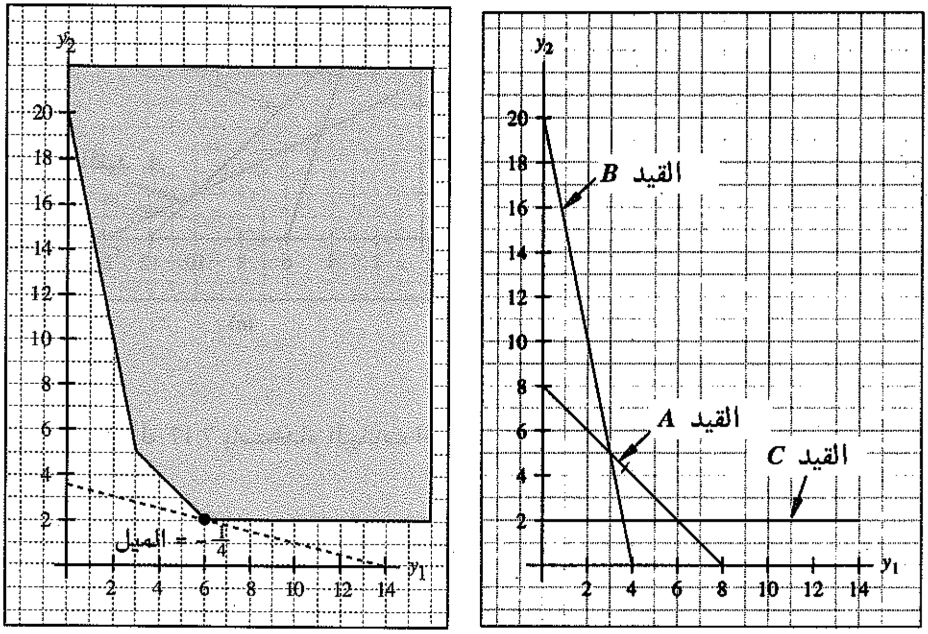
(القيد A) $3y_1 + 3y_2 \ge 24$

(القيد B) $5y_1 + y_2 \ge 20$

(القيد C) $y_2 \ge 2$

$y_1, y_2 \ge 0$

انظر الشكل (7-12) . من الشكل (7-12)(b) $y_1 = 6$ ، $y_2 = 2$. ومن ثم $c = 7(6) + 28(2) = 98$.



(b) (a)

شكل (7-12)

الحلول المتعددة Multiple Solutions

7.19. Redo Problem 7.14, using the following data: **7.19.** أعد حل المسألة 7.14 باستخدام البيانات التالية :

تدنية الدالة : $c = 16y_1 + 20y_2$ مع مراعاة القيود :

(القيد A) $2y_1 + 2.5y_2 \ge 30$

(القيد B) $3y_1 + 7.5y_2 \ge 60$

(القيد C) $8y_1 + 5y_2 \ge 80$

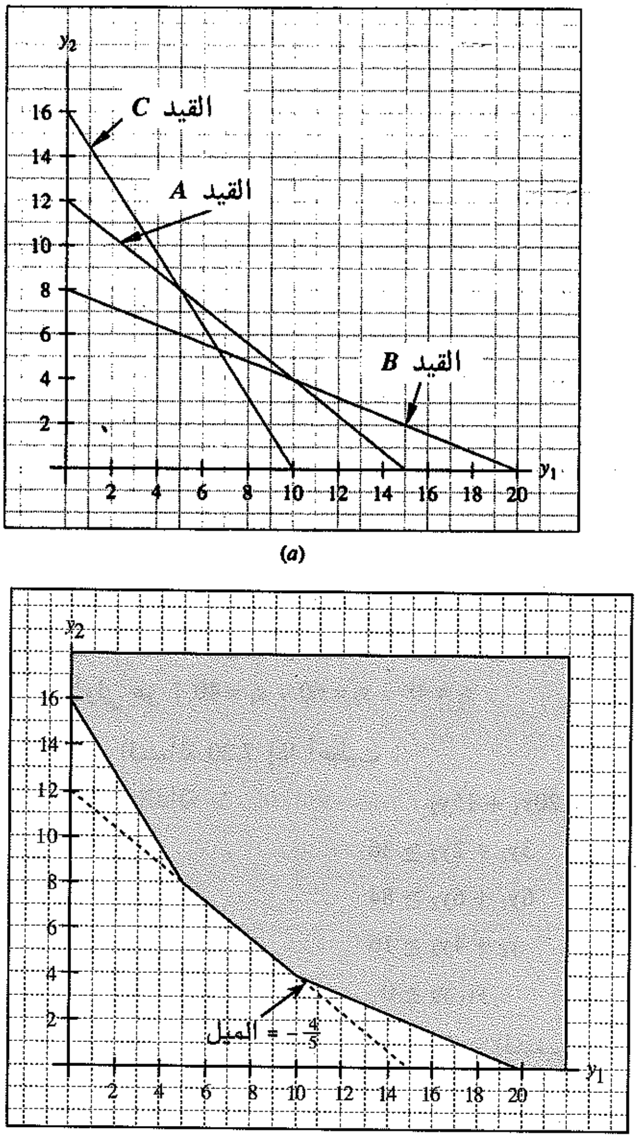
$y_1, y_2 \ge 0$

فى الشكل (7-13) مع مماس الخط المتكافئ للقيد A فإنه لا يوجد حل أمثل ممكن وحيد . فأى نقطة على الخط بين (5, 8) و (10, 4) سوف تدنى دالة الهدف الخاضعة للقيود . تظهر الحلول المتعددة حينما توجد تبعية خطية (Linear Dependence) بين دالة الهدف وأحد هذه القيود . فى هذه الحالة دالة الهدف والقيد A لهما ميل قيمته $-\frac{4}{5}$ وبينهما علاقة تبعية خطية . والحلول المتعددة تتعارض بأى طريقة مع نظرية

النقطة القصوى طالما أن النقاط القصوى (5, 8) و (10, 4) تدخل ضمن الحلول الأمثلية :

$$c = 16(5) + 20(8) = 240$$

$$c = 16(10) + 20(4) = 240$$



(a)

(b)

شكل (7–13)

Slack and Surplus Variables المتغيرات الخاملة والفائضة

.7.20 (*a*) حول قيود المتباينة فى البيانات التالية إلى معادلات من خلال إضافة المتغيرات الخاملة أو من خلال طرح المتغيرات الفائضة وعبر عن المعادلات فى صورة مصفوفة . (*b*) حدد عدد المتغيرات التى يجب أن توضع وتكون مساوية للصفر لإيجاد الحل الأساسى واقرأ الحل الأساسى الأول من المصفوفة .

7.20. (*a*) Convert the inequality constraints in the following data to equations by adding slack variables or subtracting surplus variables and express the equations in matrix form. (*b*) Determine the number of variables that must be set equal to zero to find a basic solution and read the first basic solution from the matrix.

تعظيم الدالة : $\pi = 7x_1 + 21x_2$ مع مراعاة القيود :

$$5x_1 + 2x_2 \le 40$$
$$3x_1 + 12x_2 \le 60$$
$$4x_1 + 8x_2 \le 48$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

(*a*) للمتباينات "أقل أو تساوى" فإننا نضيف المتغيرات الخاملة .

$$5x_1 + 2x_2 + s_1 = 40 \qquad 3x_1 + 12x_2 + s_2 = 60 \qquad 4x_1 + 8x_2 + s_3 = 48$$

ونعبر عنها فى صورة مصفوفة .

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 12 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 48 \end{bmatrix}$$

(*b*) طالما يوجد خمسة متغيرات وثلاث معادلات $\upsilon - n = 5 - 3 = 2$ فإن متغيرين يجب أن توضع وتكون مساوية للصفر من أجل الحصول على الحل الأساسى وبوضع $x_1 = x_2 = 0$ وبالضرب فإن الحل الأساسى الأولى هو : $s_1 = 40$ ، $s_2 = 60$ ، $s_3 = 48$.

7.21. أعد حل المسألة 7.20 إذا أعطيت :

7.21. Redo Problem 7.20, given

تدنية الدالة : $c = 20y_1 + 15y_2$ مع مراعاة القيود :

$$3y_1 + 2y_2 \ge 36$$
$$6y_1 + 6y_2 \ge 84$$
$$y_1 + 4y_2 \ge 16$$
$$y_1, y_2 \ge 0$$

(*a*) للمتباينات "أكبر من أو تساوى" إننا نطرح المتغيرات الفائضة .

$$3y_1 + 2y_2 - s_1 = 36 \qquad 6y_1 + 6y_2 - s_2 = 84 \qquad y_1 + 4y_2 - s_3 = 16$$

ونعبر عنها فى صورة مصفوفة .

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 84 \\ 16 \end{bmatrix}$$

(*b*) وعند $\upsilon = 5$ ، $n = 3$ فإن هناك متغيرين $(5 - 3 = 2)$ يجب أن توضع مساوية للصفر . وبوضع $y_1 = y_2 = 0$ وبالضرب فإن الحل الأساسى الأولى هو $s_1 = -36$ ، $s_2 = -84$ و $s_3 = -16$. وحيث إن الحل الأساسى الأولى يحتوى على قيم سالبة فإنه غير ممكن .

7.22. أعد حل المسألة 7.20 إذا أعطيت :

7.22. Redo Problem 7.20, given

تعظيم الدالة : $\pi = 14x_1 + 12x_2 + 18x_3$ مع مراعاة القيود :

$$2x_1 + x_2 + x_3 \le 2$$

$$x_1+x_2+3x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(a) $$2x_1+x_2+x_3+s_1=2 \qquad x_1+x_2+3x_3+s_2=4$$

وفى شكل مصفوفة

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(b) مع $v=5$ ، $n=2$ فإن هناك متغيرين $(5-2=3)$ يجب أن توضع مساوية للصفر لإيجاد الحل الأساسى . ويوضع $x_1=x_2=x_3=0$. وبالضرب فإن الحل الأساسى الأولى هو $s_1=2$ ، $s_2=4$.

7.23. أوجد العدد الكلى للحلول الأساسية التى تظهر فى المسألة 7.22 بالتعويض عن $v=5$ و $n=2$ فى المعادلة .

7.23. Find the total number of basic solutions that exist in Problem 7.22.

$$N=\frac{v!}{n!(v-n)!}=\frac{5!}{2!(3)!}=\frac{5(4)(3)(2)(1)}{2(1)(3)(2)(1)}=10$$

مسائل إضافية

التعبير الرياضى للمشكلات الاقتصادية والإدارية

Mathematical Expression of Business and Economic Problems

7.24. مخبز يحقق ربح 4 دولارات على كيك الزواج x_1 و 3 دولارات على كيك عيد الميلاد x_2 . كيك الزواج يستغرق 4 دقائق للخلط و 90 دقيقة للخبز و 8 دقائق للتغطية بالحلاوة . أما كيك عيد الميلاد فيستغرق 6 دقائق للخلط و 15 دقيقة للخبز و 4 دقائق للتغطية بالحلاوة . وللمخبز 120 دقيقة لزمن الخلط و 900 دقيقة لزمن الخبز و 96 دقيقة لزمن التغطية بالحلاوة . عبر عن هذه البيانات بدلالة المعادلات والمتباينات الضرورية لتحديد توليفة كيك الزواج وكيك عيد الميلاد التى سوف تعظم الربح الخاضعة للقيود .

7.24. A bakery makes \$4 profit on its wedding cakes x_1 and \$3 on its birthday cakes x_2. Wedding cakes take 4 minutes for mixing, 90 minutes for baking, and 8 minutes for icing. Birthday cakes take 6 minutes for mixing, 15 minutes for baking, and 4 minutes for icing. The bakery has 120 minutes of mixing time, 900 minutes of baking time, and 96 minutes of icing time. Express the data in terms of equations and inequalities necessary to determine the combination of wedding cakes and birthday cakes that will maximize profit subject to the constraints.

7.25. منتج معلبات فاكهة فاخرة يكسب 15 دولاراً على الماركة الفاخرة x_1 و 6 دولارات على الماركة العادية x_2 . معلبات الماركة الفاخرة تستغرق 7.5 دقيقة للتقشير و 20 دقيقة للطهو و 8 دقائق للتعليب . ومعلبات الماركة العادية تستغرق 5 دقائق للتقشير و 30 دقيقة للطهو ودقيقتين للتعليب . والمصنع لديه 150 دقيقة للتقشير و 540 دقيقة للطهو و 120 دقيقة للتعليب . اختزل البيانات لمعادلات ومتباينات مناسبة لإيجاد توليفة الماركات التى تعظم الربح .

7.25. A maker of fine preserves earns \$15 profit on its premium brand x_1 and \$6 profit on its standard brand x_2. The premium-brand preserves take 7.5 minutes for peeling, 20 minutes for stewing, and 8 minutes for canning. The standard-brand preserves take 5 minutes for peeling, 30 minutes for stewing, and 2 minutes for canning. The manufacturer has 150 minutes for peeling, 540 minutes for stewing, and 120 minutes for canning. Reduce the data to equations and inequalities suitable for finding the combination of brands that will maximize profit.

7.26. مصنع طعام حبوب يرغب فى صنع ماركة جديدة من الطعام الحبى يتكون من نوعين من الحبوب الطبيعية x_1 ، x_2 . الماركة الجديدة من الطعام يجب أن تحتوى على حد أدنى قدره 128 وحدة من الكربوهيدرات و 168 وحدة من البروتين و 120 وحدة من الفركتوز . تحتوى الوحدة من النوع الأول على 24 وحدة من الكربوهيدرات و 14 وحدة من البروتين و 8 وحدات من الفركتوز . وتحتوى الوحدة من النوع الثانى على 4 وحدات من الكربوهيدرات و 7 وحدات من البروتين و 32 وحدة من الفركتوز . النوع الأول يكلف 7 دولارات للبوشل والثانى دولارين للبوشل . عبر عن البيانات فى معادلات ومتباينات لإيجاد توليفة التكلفة الأدنى من الحبوب التى تحقق كل متطلبات التغذية .

7.26. A cereal manufacturer wants to make a new brand of cereal combining two natural grains x_1 and x_2. The new cereal must have a minimum of 128 units of carbohydrates, 168 units of protein, and 120 units of fructose. Grain 1 has 24 units of carbohydrates, 14 units of protein, and 8 units of fructose. Grain 2 has 4 units of carbohydrates, 7 units of protein, and 32 units of fructose. Grain 1 costs \$7 a bushel, grain 2 costs \$2. Express the data in equations and inequalities amenable to finding the least-cost combination of grains that will fulfill all the nutritional requirements.

7.27. يرغب بستانى فى خلط سماده الخاص الذى يحتوى على حد أدنى قدره 50 وحدة من الفوسفات و 240 وحدة من النترات و 210 وحدة من الكالسيوم . النوع الأول يحتوى على وحدة واحدة من الفوسفات و 6 وحدات من النترات و 15 وحدة من الكالسيوم . النوع الثانى يحتوى على 5 وحدات من الفوسفات و 8 وحدات من النترات و 6 وحدات من الكالسيوم . النوع الأول يكلف 2.50 دولار للرطل والنوع الثانى يكلف 5 دولارات للرطل . عبر عن هذه البيانات فى معادلات ومتباينات مناسبة لتحديد التوليفة الأقل تكلفة للسماد التى تفى بمتطلباته .

7.27. A landscaper wants to mix her own fertilizer containing a minimum of 50 units of phosphates, 240 units of nitrates, and 210 units of calcium. Brand 1 contains 1 unit of phosphates, 6 units of nitrates, and 15 units of calcium. Brand 2 contains 5 units of phosphates, 8 units of nitrates, and 6 units of calcium. Brand 1 costs \$2.50 a pound; brand 2 costs \$5. Express the data in equations and inequalities suitable to determine the least-cost combination of fertilizers that will meet her requirements.

Maximization Using Graphs التعظيم باستخدام التمثيل البيانى

استخدم التمثيل البيانى لحل مسائل البرمجة الخطية التالية :

Use graphs to solve the following linear programming problems.

7.28. Maximize $\pi = 2x_1 + 3x_2$ — **7.28.** التعظيم

subject to — القيود :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\le 32 \\ 3x_1 + 9x_2 &\le 108 \\ 6x_1 + 4x_2 &\le 84 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

7.29. عظم $\pi = 5x_1 + 4x_2$ الخاضعة لنفس القيود فى المسألة 7.28.

7.29. Maximize $\pi = 5x_1 + 4x_2$ subject to the same constraints in Problem 7.28

7.30. Maximize

7.30. التعظيم

القيود :

$$\begin{aligned} \pi &= 4x_1 + 3x_2 \\ 8x_1 + 4x_2 &\le 96 \\ 4x_1 + 6x_2 &\le 120 \\ 18x_1 + 3x_2 &\le 180 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

7.31. عظم $\pi = 4x_1 + x_2$ الخاضعة لنفس القيود فى المسألة 7.30.

7.31. Maximize $\pi = 4x_1 + x_2$ subject to the same constraints in Problem 7.30.

7.32. Maximize

7.32. التعظيم

القيود :

$$\begin{aligned} \pi &= 5x_1 + 10x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 48 \\ 4x_1 + 12x_2 &\le 168 \\ 8x_1 + 6x_2 &\le 144 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

7.33. عظم $\pi = 11x_1 + 10x_2$ الخاضعة لنفس القيود فى المسألة 7.32.

7.33. Maximize $\pi = 11x_1 + 10x_2$ subject to the same constraints in Problem 7.32.

7.34. Maximize

7.34. التعظيم

القيود :

$$\begin{aligned} \pi &= 5x_1 + 4x_2 \\ 7.5x_1 + 5x_2 &\le 150 \\ 3x_1 + 4x_2 &\le 108 \\ 8x_1 + 2x_2 &\le 120 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

7.35. عظم $\pi = 15x_1 + 6x_2$ الخاضعة لنفس القيود فى المسألة 7.40.

7.35. Maximize $\pi = 15x_1 + 6x_2$ subject to the same constraints in Problem 7.34.

Minimization Using Graphs التدنية باستخدام التمثيل البيانى

استخدم التمثيل البيانى لحل مسائل البرمجة الخطية التالية :

Use graphs to solve the following linear programming problems.

7.36. Minimize

7.36. التدنية

القيود :

$$\begin{aligned} c &= 7y_1 + 4y_2 \\ 3y_1 + 2y_2 &\ge 48 \\ 9y_1 + 4y_2 &\ge 108 \\ 2y_1 + 5y_2 &\ge 65 \\ y_1, y_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

7.37. دنى $c = 8y_1 + 10y_2$ الخاضعة لنفس القيود فى المسألة 7.36.

7.37. Minimize $c = 8y_1 + 10y_2$ subject to the same constraints in Problem 7.36.

7.38. Minimize
subject to

.7.38 التدنية
القيود :

$$\begin{aligned} c &= 12y_1 + 20y_2 \\ 4y_1 + 5y_2 &\geq 100 \\ 24y_1 + 15y_2 &\geq 360 \\ 2y_1 + 10y_2 &\geq 80 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

.7.39 دنى $c = 30y_1 + 25y_2$ الخاضعة لنفس القيود فى المسألة 7.38.

7.39. Minimize $c = 30y_1 + 25y_2$ subject to the same constraints in Problem 7.38.

7.40. Minimize

.7.40 التدنية
القيود :

$$\begin{aligned} c &= 10y_1 + 5y_2 \\ 4y_1 + 3y_2 &\geq 84 \\ 16y_1 + 6y_2 &\geq 192 \\ 6y_1 + 9y_2 &\geq 180 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

.7.41 دنى $c = 3y_1 + 2.5y_2$ الخاضعة لنفس القيود فى المسألة 7.40.

7.41. Minimize $c = 3y_1 + 2.5y_2$ subject to the same constraints in Problem 7.40.

7.42. Minimize

.7.42 التدنية
القيود :

$$\begin{aligned} c &= 5y_1 + 4y_2 \\ 7y_1 + 8y_2 &\geq 168 \\ 14y_1 + 8y_2 &\geq 224 \\ 2y_1 + 4y_2 &\geq 60 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

.7.43 دنى $c = 15y_1 + 20y_2$ الخاضعة لنفس القيود فى المسألة 7.42.

7.43. Minimize $c = 15y_1 + 20y_2$ subject to the same constraints in Problem 7.42.

حل المسائل الإضافية

7.24.

.7.24 التعظيم
القيود :

$$\begin{aligned} \pi &= 4x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + 6x_2 &\leq 120 \\ 90x_1 + 15x_2 &\leq 900 \\ 8x_1 + 4x_2 &\leq 96 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

7.25.

.7.25 التعظيم
القيود :

$$\begin{aligned} \pi &= 15x_1 + 6x_2 \\ 7.5x_1 + 5x_2 &\leq 150 \\ 20x_1 + 30x_2 &\leq 540 \\ 8x_1 + 2x_2 &\leq 120 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

7.26.

7.26. التدنية $c = 7y_1 + 2y_2$

القيود :

$$\begin{aligned} 24y_1 + 4y_2 &\geq 128 \\ 14y_1 + 7y_2 &\geq 168 \\ 8y_1 + 32y_2 &\geq 120 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

7.27.

7.27. التدنية $c = 2.5y_1 + 5y_2$

القيود :

$$\begin{aligned} y_1 + 5y_2 &\geq 50 \\ 6y_1 + 8y_2 &\geq 240 \\ 15y_1 + 6y_2 &\geq 210 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

7.28. $x_1 = 6, x_2 = 10, \pi = 42$

7.29. $x_1 = 10, x_2 = 6, \pi = 74$

7.30. $x_1 = 3, x_2 = 18, \pi = 66$

7.31. $x_1 = 9, x_2 = 6, \pi = 42$

7.32. $x_1 = 6, x_2 = 12, \pi = 150$

7.33. $x_1 = 12, x_2 = 8, \pi = 212$

7.34. $x_1 = 4, x_2 = 24, \pi = 116$

7.35. $x_1 = 12, x_2 = 12, \pi = 252$

7.36. $y_1 = 4, y_2 = 18, c = 100$

7.37. $y_1 = 10, y_2 = 9, c = 170$

7.38. $y_1 = 20, y_2 = 4, c = 320$

7.39. $y_1 = 5, y_2 = 16, c = 550$

7.40. $y_1 = 3, y_2 = 24, c = 150$

7.41. $y_1 = 12, y_2 = 12, c = 66$

7.42. $y_1 = 8, y_2 = 14, c = 96$

7.43. $y_1 = 16, y_2 = 7, c = 380$

الفصل الثامن

البرمجة الخطية ـ حساب السمبلكس والثنائى

Linear Programming: The Simplex Algorithm and the Dual

8.1 طريقة السمبلكس The Simplex Algorithm Method

طريقة السمبلكس هى إجراء منتظم أو مجموعة من القواعد لإيجاد حل لمشكلة ما . وطريقة السمبلكس هى طريقة حسابية تبحث عن (1) حلول أساسية ممكنة لنظام من المعادلات الخطية و (2) تختبر الحلول من حيث الأمثلية . وطالما أن الحد الأدنى من المتغيرات $(v-n)$ يجب أن يساوى صفرًا للحل الأساسى فإن المتغيرات $(v-n)$ توضع مساوية للصفر فى كل خطوة من الإجراء وأن الحل الأساسى يوجد من حل المعادلات n لبقية المتغيرات n . وطريقة السمبلكس تنتقل من أحد الحلول الأساسية الممكنة إلى الآخر بشكل دائم مطورة الحل السابق حتى نجد الحل الأمثل . وتوضع المتغيرات مساوية للصفر فى خطوة خاصة تسمى "متغيرات لا تنتمى للأساس" أو ليست فى الحل . أما المتغيرات التى لا توضع مساوية للصفر فتسمى (متغيرات تنتمى للأساس) أو فى الحل أو بشكل مبسط هى الحلول الأساسية . وطريقة السمبلكس للتعظيم موضحة فى القسم 8.2 . وطريقة السمبلكس للتدنية مبينة فى القسم 8.4 .

8.2 التعظيم Maximization

طريقة السمبلكس للتعظيم مشروحة أدناه فى أربع خطوات سهلة مستخدمين المثال التالى :

المطلوب تعظيم الدالة : $\pi = 8x_1 + 6x_2$

مع مراعاة القيود :

$$2x_1 + 5x_2 \leq 40 \qquad 8x_1 + 4x_2 \leq 64$$
$$3x_1 + 3x_2 \leq 30 \qquad x_1, x_2 \geq 0$$

I. جدول السمبلكس الأولى :

1. حول المتباينات إلى معادلات بإضافة المتغيرات الخاملة .

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + s_1 &= 40 \\ 3x_1 + 3x_2 + s_2 &= 30 \\ 8x_1 + 4x_2 + s_3 &= 64 \end{aligned} \qquad (8.1)$$

2. عبر عن معادلات القيود فى شكل مصفوفة .

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 64 \end{bmatrix}$$

3. شكّل جدول السمبلكس الأوّلى الذى سيكون هيكل للحساب . ويمثل الجدول الأوّلى أول حل أساسى ممكن عندما x_1 ، x_2 تساوى صفرًا . ويتكون من مصفوفة معاملات معادلات القيود والمتجه العمودى لمجموعة ثوابت فوق صف المؤشرات التى هى قيم سالبة لمعاملات متغيرات القرار فى دالة الهدف والمعاملات الصفرية لكل متغير خامل . وقيد عمود الثوابت فى الصف الأخير أيضًا يكون صفرًا فى مقابل قيمة دالة الهدف عندما x_1 ، x_2 تساوى صفرًا . وجدول السمبلكس الأولى يكون كما يلى :

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ثابت
2	5	1	0	0	40
3	3	0	1	0	30
⑧	4	0	0	1	64
−8	−6	0	0	0	0

↑ المؤشرات

4. بوضع $x_1 = x_2 = 0$ فإن أول حل أساسى ممكن يمكن أن يقرأ مباشرة من الجدول الأولى : $s_1 = 40$ ، $s_2 = 30$ ، $s_3 = 64$ ، وطالما أن x_1 ، x_2 وضعت مساوية للصفر فإن دالة الهدف تأخذ قيمة صفرية .

II العنصر المحور وتغيير الأساس .

من أجل زيادة قيمة دالة الهدف فإننا ندرس حلاً أساسيًا جديدًا . وللتحرك لحل أساسى ممكن جديد فإننا يجب أن ندخل متغير جديد على الأساس (basis) وأن أحد المتغيرات السابقة فى الأساس يجب أن يستبعد . وأن عملية اختيار المتغير لكى يدخل على الأساس واختيار المتغير الذى يستبعد تسمى "تغيير الأساس" Change of basis .

1. المؤشر السالب ذو القيمة المطلقة الكبيرة هو الذى يحدد المتغير الذى يدخل على الأساس . وطالما أن 8− فى العمود الأول (أو x_1) هو المؤشر السالب ذو القيمة المطلقة الكبيرة فإن x_1 يدخل على الأساس . العمود x_1 يصبح العمود المحور (Pivot Column) ويحدد بالسهم .
2. المتغير الذى يستبعد بنسبة الإزاحة الأقل (displacement ratio) . ونحصل على نسب الإزاحة بقسمة عناصر عمود الثوابت على عناصر العمود المحور . فالصف ذو نسبة الإزاحة الأقل ، مع تجاهل النسب التى أقل من أو تساوى الصفر ، يصبح الصف المحور ويحدد المتغير الذى يستبعد من الأساس . وطالما أن $\frac{64}{8}$ يوفر النسبة الأقل ($\frac{64}{8} < \frac{30}{3} < \frac{40}{2}$) إذاً الصف الثالث يظهر أسفل عمود s_3 فإن s_3 يستبعد من الأساس . وعنصر المحور (Pivot Column) هو ⑧ فهو العنصر الذى يتقاطع عنده عمود المتغير الداخل للأساس مع الصف الذى يقترن بالمتغير المستبعد من الأساس (أى العنصر عند تقاطع صف المحور مع عمود المحور) .

III التحوير (التدوير) Pivoting

التحوير أو التدوير هو عملية حل المعادلات n للمتغيرات n الموجودة حاليًا فى الأساس . وطالما أدخلنا فقط متغير واحد جديد فى الأساس عند كل خطوة من العملية والخطوة السابقة دائمًا تتطلب مصفوفة متماثلة (رغم أن الأعمدة غالبًا ما تكون خارج النظام العادى) فإن التحوير يتطلب تحويل عنصر المحور إلى واحد وجميع بقية العناصر الأخرى فى عمود المحور إلى صفر كما فى طريقة الحذف لجاشيان عند إيجاد المصفوفة المعكوسة (انظر القسم 6.5) كما يلى :

1. نضرب صف المحور بمقلوب عنصر المحور . وفى هذه الحالة نضرب الصف الثالث فى الجدول الأولى بـ $\frac{1}{8}$:

ثابت	s_3	s_2	s_1	x_2	x_1
40	0	0	1	5	2
30	0	1	0	3	3
8	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0	−6	−8

2. نجعل عنصر المحور مساويًا للوحدة ونجعل بقية عناصر عمود المحور أصفاراً . وهنا نطرح 2 مرة الصف الثالث من الصف الأول ونطرح 3 مرة الصف الثالث من الصف الثانى ، ثم نضيف 8 مرة الصف الثالث إلى الصف الرابع . وبهذا نحصل على الجدول الثانى .

ثابت	s_3	s_2	s_1	x_2	x_1
24	$-\frac{1}{4}$	0	1	4	0
6	$-\frac{3}{8}$	1	0	$\textcircled{\frac{3}{2}}$	0
8	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1
64	1	0	0	$\underset{\uparrow}{-2}$	0

الحل الأساسى الممكن الثانى يمكن أن يقرأ مباشرة من الجدول الثانى . بوضع جميع متغيرات الأعمدة الرئيسية مساوية للصفر والتى لا تتكون من متجه الوحدة (فى هذه الحالة x_2 ، s_3) وإعادة ترتيب متجهات عمود الوحدة فى شكل مصفوفة متماثلة فإننا نرى أن $s_1 = 24$ ، $s_2 = 6$ ، $x_1 = 8$ وعند $x_1 = 8$ ، فإن $\pi = 64$ كما هو محدد بالعنصر الأخير من الصف الأخير .

IV الأمثلية Optimization

تعظم دالة الهدف عندما لا توجد مؤشرات سالبة فى الصف الأخير . تغيير الأساس والتحوير يستمر طبقًا للقواعد أعلاه حتى يتحقق التعظيم . وطالما أن 2– فى العمود الثانى هو المؤشر السالب الوحيد ، فإن x_2 يدخل فى الأساس ويصبح العمود الثانى عمود المحور . وبقسمة عمود الثوابت على عمود المحور يتضح أن النسبة الأقل فى الصف الثانى . ولهذا فإن $\textcircled{\frac{3}{2}}$ تصبح عنصر المحور الجديد . وطالما أن متجه عمود الوحدة مع واحد فى الصف الثانى أسفل s_2 فإن s_2 سوف يستبعد من الأساس . وللتحوير أو التدوير نجرى الخطوات التالية :

1. نضرب الصف الثانى فى $\frac{2}{3}$.

ثابت	s_3	s_2	s_1	x_2	x_1
24	$-\frac{1}{4}$	0	1	4	0
4	$-\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	0	1	0
8	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1
64	1	0	0	-2	0

2. نطرح 4 مرة الصف الثانى من الصف الأول و $\frac{1}{2}$ مرة الصف الثانى من الصف الثانى ونجمع 2 مرة الصف الثانى إلى الصف الرابع . ونشتق الجدول الثالث .

ثابت	s_3	s_2	s_1	x_2	x_1
8	$\frac{3}{4}$	$-\frac{8}{3}$	1	0	0
4	$-\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	0	1	0
6	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	1
72	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	0	0	0

وبوضع جميع المتغيرات فى المتجهات العمودية غير الوحدة مساوية للصفر (أى $s_2=s_3=0$) وإعادة ترتيب متجهات الوحدة العمودية لتكوين مصفوفة متماثلة فإننا نرى أن $s_1=8$ ، $x_2=4$ و $x_1=6$. وطالما لا توجد مؤشرات سالبة باقية فى الصف الأخير فإن هذا هو الحل الأمثل . العنصر الأخير فى الصف الأخير يحدد أنه عند $\bar{x}_1=6$ و $\bar{x}_2=4$ و $\bar{s}_1=8$ و $\bar{s}_2=0$ و $\bar{s}_3=0$ فإن دالة الهدف تصل إلى نهايتهما العظمى عند $\bar{\pi}=72$. ومع $\bar{s}_2=0$. $\bar{s}_3=0$ فإننا نعلم من (8.1) أنه لا يوجد متغير خامل فى القيدين الأخيرين وأن المُدخلين الأخيرين استخدما بالكامل . ومع $\bar{s}_1=8$ فهذا يعنى أن 8 وحدات من المُدخل الأول بقيت غير مستخدمة . وللعرض البيانى انظر المسألة 7.11 ولمسائل مشابهة انظر المسائل 8.1 و 8.3 .

8.3 القيمة الحدية أو تسعير الظل Marginal Value or Shadow Pricing

قيمة المؤشر أسفل كل متغير خامل فى الجدول النهائى تعبر عن القيمة الحدية أو سعر الظل للمدخل المصاحب للمتغير ، أى بكم سوف تتغير قيمة دالة الهدف نتيجة للتغير بمقدار وحدة واحدة فى المتاح من المدخل (inpit) . ولهذا ففى القسم 8.2 فإن الأرباح سوف تزداد بمقدار $\frac{4}{3}$ وحدة أو بالتقريب 1.33 دولار للزيادة بوحدة واحدة فى ثابت القيد الثانى ، وبمقدار $\frac{1}{2}$ وحدة أو 50 سنتًا للزيادة بوحدة واحدة فى ثابت القيد الثالث ، وبمقدار صفر للزيادة بوحدة واحدة فى ثابت القيد الأول . وطالما أن القيد الأول له متغير خامل موجب فإنه لا يستخدم بالكامل فى الحل الأمثل وأن قيمته الحدية تكون صفر (أى إضافة وحدة إضافية لا تضيف شىء إلى دالة الربح) .

والنقطة المهمة التى يجب أن تلاحظ هى أن القيمة المثلى لدالة الهدف سوف تساوى دائمًا مجموع القيم الحدية لكل مدخل مضروبًا فى الكمية الكلية المتاحة من كل مُدخل .

مثال 1 : الحل الأمثل فى أى مشكلة للبرمجة الخطية يمكن التحقق منه بسهولة من خلال (1) التعويض بالقيم الحرجة فى دالة الهدف ومعادلات القيود و (2) حساب مجموع القيم الحدية لكل الموارد مضروبًا فى كمياتها

النسبية المتاحة . وباستخدام البيانات من القسم 8.2 وبالأسلوب الموضح عوض بالقيم الحرجة $\bar{x}_1 = 6$ ، $\bar{x}_2 = 4$ $\bar{s}_1 = 8$ و $\bar{s}_2 = 0$ و $\bar{s}_3 = 0$ فى الخطوة الأولى فإننا نحصل على :

EXAMPLE 1. The optimal solution in any linear programming problem can easily be checked by (1) substituting the critical values in the objective function and the constraint equations and (2) computing the sum of the marginal values of all the resources times their respective availabilities. Using the data from Section 8.2 by way of illustration and substituting the critical values $\bar{x}_1 = 6$, $\bar{x}_2 = 4$, $\bar{s}_1 = 8$, $\bar{s}_2 = 0$, and $\bar{s}_3 = 0$ in step 1 we have

(1)
$$\pi = 8x_1 + 6x_2 \qquad 3x_1 + 3x_2 + s_2 = 30$$
$$\pi = 8(6) + 6(4) = 72 \qquad 3(6) + 3(4) + 0 = 30$$

$$2x_1 + 5x_2 + s_1 = 40 \qquad 8x_1 + 4x_2 + s_3 = 64$$
$$2(6) + 5(4) + 8 = 40 \qquad 8(6) + 4(4) + 0 = 64$$

ويوضع A ، B ، C ترمز إلى ثوابت القيود 1 ، 2 ، 3 على التوالى وبالتعويض بالبيانات الوثيقة الصلة بالموضوع فى الخطوة الثانية فإننا نحصل على :

(2)
$$\pi = MV_A(A) + MV_B(B) + MV_C(C)$$
$$\pi = 0(4) + \tfrac{4}{3}(30) + \tfrac{1}{2}(64) = 72$$

8.4 التدنية Minimization

إذا استخدمت طريقة السمبلكس لمشكلة التدنية فإن القيم السالبة المولدة من خلال المتغيرات الفائضة تمثل مشكلة خاصة . فالحل الأساسى الأول سوف يتكون بالكامل من الأعداد السالبة وسوف يكون بالتالى غير ممكن . وبناء على ذلك يجب إدخال متغيرات أخرى تسمى "متغيرات اصطناعية" لإنتاج حل أساسى ممكن . ولهذا فمن السهل أن نحل مسائل التدنية باستخدام مبدأ الثنائية والذى نشرحه فى القسم القادم .

8.5 الثنائى The Dual

إن كل مشكلة للتدنية فى البرمجة الخطية تقابلها مشكلة تعظيم وكل مشكلة تعظيم تقابلها مشكلة تدنية . وتسمى المشكلة الأولية بالمشكلة الأصلية والمشكلة المناظرة تسمى بالمشكلة الثنائية . والعلاقة بين المشكلتين من السهل رؤيتها بدلالة المعاملات التى تسهم بشكل عام . إذا أعطيت المشكلة الأصلية (Primal) .

المطلوب تدنية الدالة:
$$c = g_1y_1 + g_2y_2 + g_3y_3$$

مع مراعاة شروط القيد الدالية :
$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \geq h_1$$
$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \geq h_2$$
$$a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \geq h_3$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

والثنائى هو :

تعظيم الدالة :
$$\pi = h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3$$

مع مراعاة شروط القيد الدالية :
$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 \leq g_1$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 \leq g_2$$
$$a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \leq g_3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

8.6 قواعد التحويل للحصول على الثنائى (المرافق)
Rules of Transformation to Obtain the Dual

عند تكوين الثنائى من المشكلة الأصلية يلاحظ ما يلى :

1. اتجاه الأمثلية ينعكس . فالتدنية تصبح تعظيم فى الثنائى والعكس بالعكس .
2. إشارات متباينات القيود الفنية تنعكس ولكن القيود اللاسالبة على متغيرات القرار دائمًا تبقى نافذة المفعول .
3. صفوف مصفوفة المعاملات للقيود فى المشكلة الأصلية تحول إلى أعمدة مصفوفة المعاملات للقيود فى الثنائى .
4. متجه الصف للمعاملات فى دالة الهدف فى المشكلة الأصلية تحول إلى متجه عمود للثوابت لقيود الثنائى .
5. متجه العمود للثوابت من قيود المشكلة الأصلية يحول إلى متجه صف للمعاملات لدالة الهدف فى الثنائى .
6. متغيرات القرارات الأصلية x_i أو y_i تستبدل بمتغيرات القرار الثنائى y_i أو x_i .

وتطبيق هذه الخطوات موضح فى المثال رقم 2 .

مثال 2 : الثنائى لمشكلة البرمجة الخطية التى تدنى الدالة .

EXAMPLE 2. The dual of the linear programming problem

$$c = 24y_1 + 15y_2 + 32y_3$$

مع مراعاة القيود :

$$4y_1 + y_2 + 8y_3 \geq 56$$
$$6y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 49$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

هى تعظيم الدالة :

$$\pi = 56x_1 + 49x_2$$

مع مراعاة القيود :

$$4x_1 + 6x_2 \leq 24$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 15$$
$$8x_1 + 2x_2 \leq 32$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

مثال 3 : الثنائى لمشكلة البرمجة الخطية والتى تعظم الدالة .

EXAMPLE 3. The dual of the linear programming problem

تعظيم الدالة :

$$\pi = 120x_1 + 360x_2$$

مع مراعاة القيود :

$$7x_1 + 2x_2 \leq 28$$

$$3x_1 + 9x_2 \le 36$$
$$6x_1 + 4x_2 \le 48$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

هى تدنية الدالة : $c = 28y_1 + 36y_2 + 48y_3$

مع مراعاة القيود : $7y_1 + 3y_2 + 6y_3 \ge 120$

$$2y_1 + 9y_2 + 4y_3 \ge 360$$
$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

8.7 نظريات الثنائى The Dual Theorem

النظريتان الثنائيتان التاليتان هما الأساس فى البرمجة الخطية :

1. القيمة المثلى لدالة الهدف الأصلية تساوى دائمًا القيمة المثلى لدالة الهدف الثنائى وتعطى حلاً أمثل ممكنًا .
2. فى حالة الحل الأمثل الممكن : (*a*) إذا كان متغير القرار فى البرنامج الأصلى لا يساوى صفرًا فإن القيمة المثلى للمتغير الخامل (أو الفائض) المناظر فى البرنامج الثنائى لابد وأن تساوى صفرًا . (*b*) وإذا كان المتغير الخامل (أو الفائض) فى البرنامج الأصلى لا يساوى صفرًا فإن القيمة المثلى لمتغير القرار المناظر فى البرنامج الثنائى لابد وأن تساوى صفرًا .

وتطبيق هذه النظريات موضح فى المثال 4 والمسائل 8.4 إلى 8.7 و 8.9 إلى 8.11 .

مثال 4 : إذا أعطيت مشكلة البرمجة الخطية التالية

EXAMPLE 4. Given the following linear programming problem

المطلوب تدنية الدالة : $c = 14y_1 + 40y_2 + 18y_3$

مع مراعاة القيود : $2y_1 + 5y_2 + y_3 \ge 50$

$$y_1 + 5y_2 + 3y_3 \ge 30$$
$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

الثنائى هو :

هى تعظيم الدالة : $\pi = 50x_1 + 30x_2$

مع مراعاة القيود : $2x_1 + x_2 \le 14$

$$5x_1 + 5x_2 \le 40$$
$$x_1 + 3x_2 \le 18$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

وحيث وجدنا بيانيًا القيم المثلى فى الشكل (1–7) من القسم 7.2 وهى $\bar{x}_1 = 6$ ، $\bar{x}_2 = 2$ ، $\bar{\pi} = 360$.

وتستخدم نظريات الثنائى كما يلى لإيجاد القيمة المثلى لدالة (1) الهدف الأصلية (2) المتغيرات القرار الأصلية .

1. طالما أن القيمة المثلى لدالة الهدف فى الثنائى هى $\bar{\pi} = 360$ فينبغى أن يكون واضحًا من نظرية الثنائى الأولى أن القيمة المثلى لدالة الهدف الأصلية يجب أن تساوى $\bar{c} = 360$.

2. لإيجاد القيم المثلى لمتغيرات القرار الأصلية نحول قيود المتباينات إلى معادلات من خلال (1) طرح متغيرات الفائض s من المشكلة الأصلية (2) وإضافة المتغيرات الخاملة t إلى الثنائى .

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & 2y_1 + 5y_2 + y_3 - s_1 = 50 \\ & y_1 + 5y_2 + 3y_3 - s_2 = 30 \end{aligned} \tag{8.2}$$

$$\begin{aligned} \text{II.} \quad & 2x_1 + x_2 + t_1 = 14 \\ & 5x_1 + 5x_2 + t_2 = 40 \\ & x_1 + 3x_2 + t_3 = 18 \end{aligned} \tag{8.3}$$

وبالتعويض بالقيم المثلى $\bar{x}_1 = 6$ ، $\bar{x}_2 = 2$ فى (8.3) لإيجاد t_1 ، t_2 ، t_3 .

$$\begin{aligned} 2(6) + (2) + t_1 &= 14 \qquad (\bar{t}_1 = 0) \\ 5(6) + 5(2) + t_2 &= 40 \qquad (\bar{t}_2 = 0) \\ (6) + 3(2) + t_3 &= 18 \qquad (\bar{t}_3 = 6) \end{aligned}$$

ومع $\bar{t}_1 = \bar{t}_2 = 0$ وطبقًا لنظرية الثنائى ، فإن قيم متغيرات القرار الأصلية المناظرة y_1 ، y_2 لا تساوى صفرًا .

ومع $\bar{t}_3 = 0$ فإن قيمة متغير القرار المناظر y_3 يجب أن تساوى صفرًا . وهذا $\bar{y}_3 = 0$ فى (8.2) .

كما تحدد نظرية الثنائى الثانية أنه إذا كانت متغيرات القرار الثنائى $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ لا تساوى صفرًا فى المشكلة المناظرة $\bar{s}_1$ و $\bar{s}_2$ فى المشكلة الأصلية يجب أن تساوى صفرًا . وبالتعويض بالقيم المناسبة $\bar{s}_1 = 0$ و $\bar{s}_2 = 0$ و $\bar{y}_3 = 0$ فى (8.2) .

$$\begin{aligned} 2y_1 + 5y_2 + 0 - 0 &= 50 \\ y_1 + 5y_2 + 0 - 0 &= 30 \end{aligned}$$

وبحل المعادلتين أنيًا نجد أن :

$$\bar{y}_1 = 20 \qquad \bar{y}_2 = 2$$

ولهذا فإن متغيرات القرار المثلى $\bar{y}_1 = 20$ و $\bar{y}_2 = 2$ و $\bar{y}_3 = 0$ ، والتى يمكن بسهولة التحقق منها من خلال التعويض فى دالة الهدف :

$$\bar{c} = 14(20) + 40(2) + 18(0) = 360$$

انظر المسألة 8.4 إلى 8.7 .

8.8 أسعار الظل فى الثنائى Shadow Price in the Dual

عندما نستخدم الثنائى لحل المشكلة الأصلية ، فإن القيمة الحدية أو سعر الظل للمورد i فى المشكلة الأصلية تساوى القيمة المثلى لمتغير القرار المناظر فى دالة هدف الثنائى . ولهذا وبدلالة المثال 4 حيث القيمة المثلى للبرنامج الثنائى وجدت عند $\bar{x}_1 = 6$ ، $\bar{x}_2 = 2$ فإن القيمة الحدية للمورد الأول فى المشكلة الرئيسية هو 6 والقيمة الحدية للمورد الثانى هى 2 . وبافتراض أن A و B تمثل الثوابت فى معادلات القيود الأصلية فإننا نرى

أن القيمة المثلى لدالة الهدف الأصلية تساوى أيضًا مجموع الموارد المتاحة مضروبًا فى القيم الحدية :

$$c = MV_A(A) + MV_B(B) = 6(50) + 2(30) = 360$$

انظر أيضًا المسألة 8.8 .

8.9 البرمجة العددية Integer Programming

مناقشة البرمجة الخطية حتى الآن مبنية على افتراض بأن متغيرات القرار يمكن افتراضها قيم عددية صحيحة أو غير عددية صحيحة . بعض مشكلات البرمجة الخطية مثل تلك التى تقتضى تخفيض وحدات منفصلة للناتج أو تعيين أفراد فى وظائف مختلفة فإنه يجب تقييد متغيرات القرار بقيم تامة . فالبرمجة العددية هى حقل فرعى للبرمجة الخطية حتى بعض أو كل التغيرات مقيدة بقيم تامة . أما نموذج البرمجة العددية البحت فهو الذى يقيد جمع المتغيرات بقيم عددية صحيحة أما نموذج البرمجة العددية الخليط فهو الذى يتطلب أن تكون بعض المتغيرات ذات قيم صحيحة .

وتوجد نظريتان للبرمجة العددية موضحة بالمثال 5 وهى :

1. مجموعة الحلول الممكنة فى نموذج البرمجة العددية هو بالضرورة مجموعة جزئية للحلول الممكنة فى نموذج البرمجة الخطية العادية المناظرة . وهذا يعنى أن المنطقة الممكنة فى نموذج البرمجة العددية لن تكون أكبر من المنطقة الممكنة لنموذج البرمجة الخطية غير العددية المقارنة .
2. القيمة المثلى لدالة الهدف فى نموذج البرمجة العددية لن تكون أفضل من القيمة المثلى لنموذج البرمجة الخطية العادية الموازية .

وإذا اختلفت القيمة المثلى لدالة الهدف لنموذج البرمجة العددية عن القيمة المثلى لنموذج البرمجة غير العددية فإن هذا الاختلاف يشار إليه بالتكلفة غير القابلة للانقسام .

مثال 5 : النموذج التالى تم حله بيانيًا فى الشكل (1−8) من أجل عرض بعض الخصائص البارزة للبرمجة العددية وتوضيح النظريتين المشار إليهما فى القسم 8.9 .

EXAMPLE 5. The following model is solved graphically in Fig. 8-1 in order to demonstrate some of the salient features of integer programming and illustrate the two theorems cited in Section 8.9.

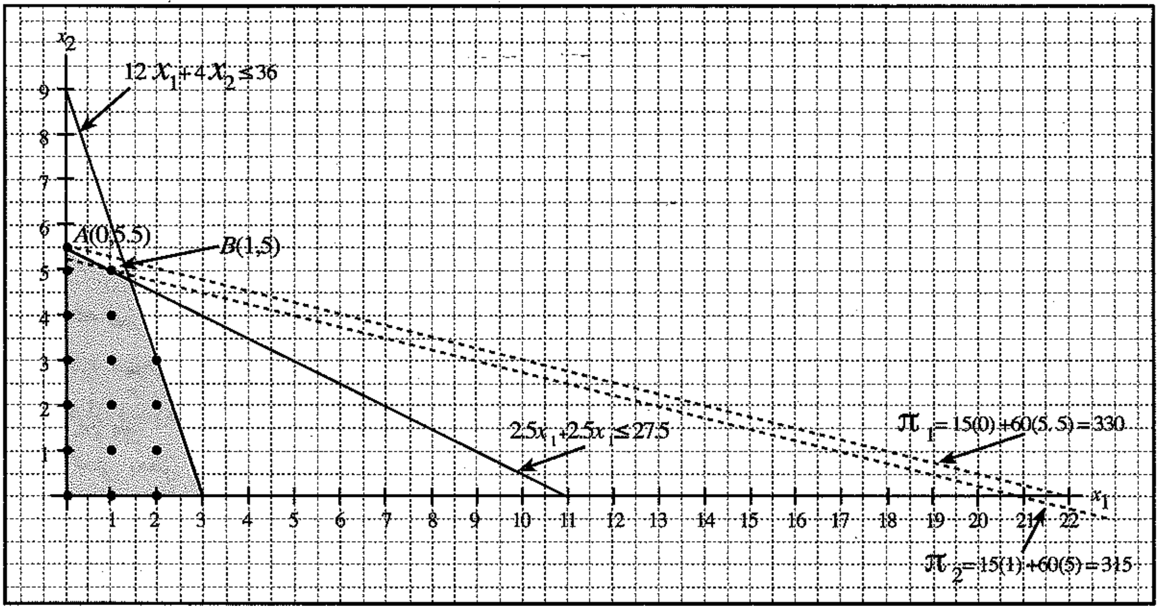
المطلوب تعظيم الدالة $\pi = 15x_1 + 60x_2$

مع مراعاة القيود : $2.5x_1 + 5x_2 \le 27.5$

$$12x_1 + 4x_2 \le 36$$

$x_1, x_2 =$ قيم تامة غير سالبة

وللبرمجة غير العددية حيث يفترض أن تأخذ متغيرات القرار قيمًا مستمرة ، فإن المساحة المظللة بالكامل فى الشكل (1−8) هى منطقة ممكنة . وللبرمجة العددية فإن المنطقة الممكنة تتكون فقط من 17 نقطة داخل المساحة المظللة المخططة بالنقاط الكبيرة . وهذا يوضح بيانيًا أن المنطقة الممكنة فى البرمجة العددية لا يمكن أن تتجاوز المنطقة الممكنة فى البرمجة الخطية العادية (نظرية 1) .



شكل (1–8)

إن نقطة المماس بين قطر الربح المتكافئ المنقط π_1 والمنطقة الممكنة غير العددية عند A تحدد أن المشكلة فى البرمجة الخطية العادية سوف تعظم عند $(0, 5.5)$. وبانتقال خط الربح المتكافئ بشكل مواز باتجاه الأصل فإن النقطة الأولى للماس بين خط الربح المتكافئ π_2 والمنطقة الممكنة العددية يظهر عند B ويحدد أن مشكلة البرمجة العددية تعظم عند $(1, 5)$. ومع $\pi_1 = 15(0) + 60(5.5) = 330$ و $\pi_2 = 15(1) + 60(5) = 315$ فهذا يوضح حقيقة أن الربح لا يمكن أن يكون أكبر فى البرمجة العددية منه فى البرمجة غير العددية (نظرية 2) . وفى هذا المثال فإن التكلفة غير القابلة للانقسام أى خسارة الربح لكوننا غير قادرين على قسمة متغيرات القرار إلى أقسام هى $\pi_1 - \pi_2 = 330 - 315 = 15$ ..

إن البرمجة العددية التى تتطلب أكثر من قيدين هى أكثر تعقيدًا من التحليل السابق وأنه لا يمكن تمثيلها بيانيًا بسهولة . وأنه من الأفضل تركها للكمبيوتر .

8.10 البرمجة صفر ـ واحد Zero – One Programming

البرمجة صفر-واحد هى قطاع فرعى من البرمجة العددية حيث تقيد متغيرات القرار بقيم صحيحة بالصفر أو الواحد . والبرمجة صفر-واحد مفيدة فى المشكلات ذات القيود المتبادلة أو المقتصرة جزئيًا (Partially Exclusive) أو القيود المتبادلة ذات الاعتماد المتسلسل (Serially Dependent) . وبعض الاستخدامات الأكثر شيوعًا موضحة فى الأمثلة من 6 إلى 9 .

مثال 6 : الاقتصارية المتبادلة بين اختيارين (Mutual Exclusivity between Two Choices) . افترض أن منشأة تصنيع سيارات نقل وترغب فى تعظيم دالة خاضعة لقيد يتطلب اختيار أيًا من نموذجى سيارات النقل ليستخدم لعملية شحن معينة . النموذج الأول سعته 2000 متر مكعب والنموذج الثانى سعته 2500 متر مكعب فى البرمجة الخطية العادية فإن القيود هى :

EXAMPLE 6. *Mutual Exclusivity between Two Choices.* Assume a trucking firm wants to optimize a function subject to a constraint involving the choice of which of two models of trucks to use for a particular shipment. Truck 1 has a capacity of 2000 cubic meters (m^3); truck 2, a capacity of 2500 m^3. In ordinary linear programming the constraints are

$15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 2000$ (إذا استخدم النموذج 1)

$15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 2500$ (إذا استخدم النموذج 2)

وطالما أن نموذجًا واحدًا فقط يمكن أن يستخدم فإن القيود يمكن إعادة كتابتهما كالتالى :

$$15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 2000 + My$$

$$15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 2500 + M(1 - y)$$

$y = 1$ أو $y = 0$

حيث قصرت قيمة M على عدد موجب كبير جدًا . فإذا كانت $y = 1$ فإن الجانب الأيمن من القيد الأول يصبح كبيرًا جدًا ويجعل القيد زائدًا عن الحاجة ومن ثم يوجه الاختيار إلى النموذج الثانى . أما إذا كانت $y = 0$ فإن القيد الثانى يصبح زائدًا عن الحاجة ومن ثم يتم اختيار النموذج الأول .

مثال 7 : الاقتصارية المتبادلة بين اختيارات عديدة (Mutual Exclusivity between Several Choices) . النموذج فى المثال 6 يمكن تعديله بسهولة ليلائم الحالة التى تتطلب اختبارات متعددة حيث ينفذ أحد هذه الاختيارات فقط . نفترض وجود نموذجين آخرين لسيارات النقل بسعة 3000 متر مكعب و 4000 متر مكعب على التوالى أضيفت إلى أسطول النقل فى المثال 6 . ومن ثم يمكن كتابة القيود كما يلى :

EXAMPLE 7. *Mutual Exclusivity among Several Choices.* The model in Example 6 can easily be adjusted to accommodate a situation involving several options of which only one can be implemented. Assume two more truck models with capacities of 3000 and 4000 m^3, respectively, are added to the fleet in Example 6. The constraints can then be written

$$15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 2000 + My_1$$

$$15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 2500 + My_2$$

$$15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 3000 + My_3$$

$$15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 4000 + My_4$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 3$$

$y_1, y_2, y_3, y_4 = 0$ أو 1

إن إضافة القيدين الأخيرين يؤكد أن ثلاثة من المتغيرات الأربعة (0/1) سوف يساوى واحدًا ولذلك تستبعد قيودها المناظرة .

مثال 8 : الاقتصارية الجزئية بين عدة متغيرات (Partial Exclusivity among Several Choices) . النموذج فى المثال 7 يمكن أيضًا تعديله ليلائم حالة تستلزم اختيار عدد من الاختيارات الممكنة . افترض سيارة نقل خامسة بسعة 4500 متر مكعب أضيفت إلى أسطول النقل وأن الشركة يمكنها فقط استخدام ثلاثة نماذج من الخمسة فى أى مشروع معطى . ويمكن كتابة المشكلة على النحو الآتى :

EXAMPLE 8. *Partial Exclusivity among Several Choices.* The model in Example 7 can also be adjusted to accommodate a situation in which several of a number of possible choices must be selected. Assume a fifth truck with a 4500-m^3 capacity is added to the fleet and the company can only use three of the five on any given project. The problem can be written

$$15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 2000 + My_1$$
$$15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 2500 + My_2$$
$$15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 3000 + My_3$$
$$15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 4000 + My_4$$
$$15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 4500 + My_5$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 2$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 = 0 \text{ أو } 1$$

القيدين الأخيرين سوف نرى منهما أن اثنين من المتغيرات الخمسة (0/1) سوف تساوى واحدًا وأن ثلاثة من المتغيرات تساوى صفرًا ولذلك نستبعد القيدين وندخل المتغيرات الثلاثة المرغوب فيها .

مثال 9 : التداخل بين المتغيرات (Interdependence between Variables) . النماذج التى تكون متغيرات القرار فيها مترابطة بطريقة ما بحيث يجب اختبارها أو رفضها معًا تكون سهلة التكييف . نفترض أن $x_i = 1$ إذا اختير المتغير i وأن $x_i = 0$ إذا رفض المتغير i . ومن ثم إذا لزم استخدام x_1 ، x_2 مع بعض أو لا تستخدم مطلقًا فإنه يمكن ببساطة كتابة القيد على النحو التالى :

EXAMPLE 9. *Interdependence between Variables.* Models in which decision variables are interconnected in such a way that they must be selected or rejected together are also easily accommodated. Let $x_i = 1$ if the ith variable is selected and $x_i = 0$ if the ith variable is rejected. Then if x_1 and x_2 must be used together or not at all, the constraint can simply be written

$$x_1 = x_2$$
$$x_1, x_2 = 0 \text{ or } 1$$

فالقيود تجبر كلا المتغيرين ليساويا واحدًا أو صفرًا فى نفس الوقت مما يعنى أنه يجب اختيارهم أو رفضهم مع بعض .

إذا كان أحد متغيرات القرار يعيق المتغير الآخر فإنه لا يمكن اختيارهم مع بعض ويصبح القيد كالتالى :

$$x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 = 0 \text{ or } 1$$

وإذا لم نختار x_1 مالم نختار x_2 فإن القيد هو :

$$x_1 \leq x_2$$
$$x_1, x_2 = 0 \text{ or } 1$$

مسائل محلولة

Maximization Using the Simplex Algorithm التعظيم باستخدام حساب السمبلكس

8.1. Maximize $\pi = 50x_1 + 30x_2$ المطلوب تعظيم الدالة **.8.1**

subject to $2x_1 + x_2 \leq 14 \qquad x_1 + 3x_2 \leq 18$ مع مراعاة القيود :

$5x_1 + 5x_2 \leq 40 \qquad x_1, x_2 \geq 0$

1. نشكل جدول السمبلكس الأوّلى .

(*a*) نضيف المتغيرات الخاملة إلى المتباينات لجعلهم معادلات .

$$2x_1+x_2+s_1=14 \qquad 5x_1+5x_2+s_2=40 \qquad x_1+3x_2+s_3=18$$

(*b*) نعبر عن معادلات القيود فى شكل مصفوفة .

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 40 \\ 18 \end{bmatrix}$$

(*c*) نكون جدول السمبلكس الأولى المكون من مصفوفة معاملات معادلات القيود ومتجه عمود الثوابت المحدد فوق صف المؤشرات وهى قيم سالبة لمعاملات دالة الهدف ومعـاملات صفريـة للمتغـيرات الخاملة . والجدول الأولى يكون كالآتى :

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ثابت t
②	1	1	0	0	14
5	5	0	1	0	40
1	3	0	0	1	18
$\underset{\uparrow}{-50}$	−30	0	0	0	0

وبوضع $x_1=x_2=0$ فإن أول حل أساسى ممكن هو $s_1=14$ ، $s_2=40$ ، $s_3=18$. وعند أول حـل أساسى ممكن $\pi=0$.

2. نغير الأساس . المؤشر السالب ذو القيمة المطلقة الكبيرة (السهم) يحدد عمود المحور . ونسبة الإزاحـة الأقل التى تنشأ بقسمة عناصر عمود الثوابت على عناصر عمود المحور تحدد صف المحور . ولذلك فـإن ② يصبح عنصر المحور وهو العنصر الذى عنده يتقاطع صف المحور مع عمود المحور .

3. التحوير (التدوير).

(*a*) نحول صف المحور إلى 1 من خلال ضرب الصف الأول فى $\frac{1}{2}$.

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ثابت
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	7
5	5	0	1	0	40
1	3	0	0	1	18
−50	−30	0	0	0	0

(*b*) نزيل عمود المحور من خلال طرح 5 مضروبة فى الصف الأول من الصف الثانى ، وطرح الصف الأول من الصف الثالث ، وإضافة 50 مضروبة فى الصف الأول إلى الصف الرابع . ونحصل على الجدول الثانى .

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ثابت
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	7
0	$\enclose{circle}{\frac{5}{2}}$	$-\frac{5}{2}$	1	0	5
0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	11
0	$\underset{\uparrow}{-5}$	25	0	0	350

4. نغير الأساس والتحوير مرة ثانية . العمود الثاني هو عمود المحور والصف الثـانى هـو صـف المحـور و $\enclose{circle}{\frac{5}{2}}$ هو عنصر المحور .

(*a*) نضرب الصف الثانى فى $\frac{2}{5}$.

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ثابت
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	7
0	1	-1	$\frac{2}{5}$	0	2
0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	11
0	-5	25	0	0	350

(*b*) نزيل عمود المحور مـن خـلال طرح $\frac{1}{2}$ مضروبًا فى الصف الثانى من الصف الأول وطرح $\frac{5}{2}$ مضروبًا فى الصف الثانى من الصف الثالث وإضافة 5 مضروبًا فى الصف الثانى إلى الصف الرابـع . ويكـون الجدول الثالث :

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ثابت
1	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	6
0	1	-1	$\frac{2}{5}$	0	2
0	0	2	-1	1	6
0	0	20	2	0	360

وحيث لا توجد مؤشرات سالبة باقية فإن هذا هو الجدول النهائى . وبوضـع المتغـيرات (s_1 ، s_2) أعلى متجهات عمود غير الوحدة مساويًا للصفر وإعادة الترتيب لتكوين مصفوفة متماثلة فإننا نجد أن $\bar{x}_1=6$ ، $\bar{x}_2=2$ ، $\bar{s}_1=0$ ، $\bar{s}_2=0$ و $\bar{s}_3=6$ ، $\bar{\pi}=360$ وأن أسعار الظل للمدخلات هى 20 ، 2 ، صفر على التوالى . انظر الشكل (1–7) للتفسير البيانى .

8.2. أعد حل المسألة 8.1 للمعادلة والمتباينات التالية :

8.2. **Redo Problem 8.1 for the equation and inequalities specified below:**

المطلوب تعظيم الدالة : $\pi = 56x_1 + 24x_2 + 18x_3$

مع مراعاة القيود : $4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 240 \qquad 8x_1 + 2x_2 + x_3 \le 120$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

نضيف المتغيرات الخاملة ونعبر عن معادلات القيود فى شكل مصفوفة .

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_1 = 240 \qquad 8x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 120$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 240 \\ 120 \end{bmatrix}$$

نكون الجدول الأوّلى :

ثابت	s_2	s_1	x_3	x_2	x_1
240	0	1	3	2	4
120	1	0	1	2	⑧
0	0	0	−18	−24	$\underset{\uparrow}{-56}$

ومن ثم نغير الأساس والتحوير كما يلى . (1) نضرب الصف الثانى فى $\frac{1}{8}$.

ثابت	s_2	s_1	x_3	x_2	x_1
240	0	1	3	2	4
15	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	1
0	0	0	−18	−24	−56

(2) نزيل عمود المحور وذلك بطرح 4 مضروبة فى الصف الثانى من الصف الأول وإضافة 56 مضروبة فى الصف الثانى إلى الصف الثالث . ونشكل الجدول الثانى .

ثابت	s_2	s_1	x_3	x_2	x_1
180	$-\frac{1}{2}$	1	$\boxed{\frac{5}{2}}$	1	0
15	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	1
840	7	0	$\underset{\uparrow}{-11}$	−10	0

نغير الأساس والتحوير مرة ثانية . (1) نضرب الصف الأول فى $\frac{2}{5}$.

ثابت	s_2	s_1	x_3	x_2	x_1
72	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	0
15	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	1
840	7	0	−11	−10	0

(2) نزيل عمود المحور وذلك بطرح $\frac{1}{8}$ مضروبًا فى الصف الأول من الصف الثانى وإضافة 11 مضروبًا فى الصف الأول إلى الصف الثالث . ونكون الجدول الثالث .

ثابت	s_2	s_1	x_3	x_2	x_1
72	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	0
6	$\frac{3}{20}$	$-\frac{1}{20}$	0	$\boxed{\frac{1}{5}}$	1
1632	$\frac{24}{5}$	$\frac{22}{5}$	0	$\underset{\uparrow}{-\frac{28}{5}}$	0

وطالما ما زال يوجد مؤشر سالب نعيد التحوير . نضرب الصف الثانى فى 5 .

ثابت	s_2	s_1	x_3	x_2	x_1
72	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	0
30	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	5
1632	$\frac{24}{5}$	$\frac{22}{5}$	0	$-\frac{28}{5}$	0

نطرح $\frac{2}{5}$ مضروبًا فى الصف الثانى من الصف الأول ونضيف $\frac{25}{5}$ مضروبًا فى الصف الثانى إلى الصف الثالث . نشكل الجدول النهائى :

ثابت	s_2	s_1	x_3	x_2	x_1
60	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	-2
30	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	5
1800	9	3	0	0	28

وهنا $\bar{x}_1 = 0$ ، $\bar{x}_2 = 30$ ، $\bar{x}_3 = 60$ ، $\bar{s}_1 = 0$ ، $\bar{s}_2 = 0$ ، $\bar{\pi} = 1800$. وسعر الظل للمدخل الأول هو 3 وللمدخل الثانى 9 . لاحظ أن x_1 التى أدخلت إلى الأساس من خلال التحوير الأول تركت الأساس فى التحوير الثالث . فالمتغير الذى يدخل الأساس يمكن أن يغادر الأساس فى سبيل تعظيم قيمة دالة الهدف .

8.3. أعد حل المسألة 8.1 إذا أعطيت البيانات الآتية :

8.3. Redo Problem 8.1, given the data below:

المطلوب تعظيم الدالة $\pi = 250x_1 + 200x_2$

مع مراعاة القيود : $x_1 + 4x_2 \le 20$ $\quad 6x_1 + 2x_2 \le 36$

$x_1, x_2 \ge 0$ $\quad 3x_1 + 5x_2 \le 30$

1. نشكل الجدول الأولى .

ثابت	s_3	s_2	s_1	x_2	x_1
36	0	0	1	2	⑥
30	0	1	0	5	3
20	1	0	0	4	1
0	0	0	0	-200	$\underset{\uparrow}{-250}$

2. نغير الأساس والمحور .

(*a*) نضرب الصف الأول فى $\frac{1}{6}$.

ثابت	s_3	s_2	s_1	x_2	x_1
6	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	1
30	0	1	0	5	3
20	1	0	0	4	1
0	0	0	0	-200	-250

(*b*) نطرح 3 مضروبة فى الصف الأول من الصف الثانى ونطرح الصف الأول من الصف الثالث ونضيف 250 مضروبة فى الصف الأول إلى الصف الرابع . نكون الجدول الثانى .

ثابت	s_3	s_2	s_1	x_2	x_1
6	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	1
12	0	1	$-\frac{1}{2}$	④	0
14	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{11}{3}$	0
1500	0	0	$\frac{125}{3}$	$\underset{\uparrow}{-\frac{350}{3}}$	0

3. نغير الأساس والتحوير مرة ثانية .

(a) نضرب الصف الثانى فى $\frac{1}{4}$.

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ثابت
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	6
0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	3
0	$\frac{11}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	1	14
0	$-\frac{350}{3}$	$\frac{125}{3}$	0	0	1500

(b) نطرح $\frac{1}{3}$ مضروبًا فى الصف الثانى من الصف الأول ونطرح $\frac{11}{3}$ مضروبة فى الصف الثانى من الصف الثالث ونضيف $\frac{350}{3}$ مضروبًا فى الصف الثانى من الصف الرابع . نشكل الجدول النهائى :

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ثابت
1	0	$\frac{5}{24}$	$-\frac{1}{12}$	0	5
0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	3
0	0	$\frac{7}{24}$	$-\frac{11}{12}$	1	3
0	0	$\frac{325}{12}$	$\frac{175}{6}$	0	1850

إذًا $\bar{x}_1 = 5$ ، $\bar{x}_2 = 3$ ، $\bar{s}_1 = 0$ ، $\bar{s}_2 = 0$ ، $\bar{s}_3 = 3$ ، $\bar{\pi} = 1850$. وأسعار الظل للمدخلات هى : $\frac{325}{12} \approx 27.28$ ، $\frac{175}{6} \approx 29.17$ على التوالى .

حل المشكلة الأصلية من خلال الثنائى Solving The Primal Through The Dual

8.4. للمشكلات الأصلية التالية (a) كون الثنائى (b) حل الثنائى بيانيًا . ومن ثم استخدم حل الثنائى فى إيجاد القيم المثلى لـ (c) دالة الهدف الأصلية و (d) متغيرات القرار الأصلية .

8.4. For the following primal problem, (*a*) formulate the dual, (*b*) solve the dual graphically. Then use the dual solution to find the optimal values of (*c*) the primal objective function and (*d*) the primal decision variables.

المطلوب تدنية الدالة : $c = 36y_1 + 30y_2 + 20y_3$

مع مراعاة القيود : $6y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 10$

$2y_1 + 5y_2 + 4y_3 \geq 8$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

(a) الثنائى هو :

المطلوب تعظيم الدالة : $\pi = 10x_1 + 8x_2$

مع مراعاة القيود : $6x_1 + 2x_2 \leq 36$

$3x_1 + 5x_2 \leq 30$

$x_1 + 4x_2 \leq 20$

$x_1, x_2 \geq 0$

(b) الثنائى حل بيانيًا كما فى المشكلة الأصلية فى المسألة 7-10 حيث $\bar{x}_1 = 5$ ، $\bar{x}_2 = 3$ ، $\bar{\pi} = 74$.

(*c*) ومع $\bar{\pi}=74$ فإن $\bar{c}=74$.

(*d*) لإيجاد متغيرات القرار الأصلية y_1 ، y_2 ، y_3 من متغيرات القرار الثنائى أولاً ، نحول (I) متباينات المشكلة الأصلية و (II) متباينات الثنائى إلى معادلات .

$$\text{I.}\quad \begin{aligned} 6y_1+3y_2+\ \ y_3-s_1&=10\\ 2y_1+5y_2+4y_3-s_2&=8 \end{aligned} \qquad\qquad \text{II.}\quad \begin{aligned} 6x_1+2x_2+t_1&=36\\ 3x_1+5x_2+t_2&=30\\ x_1+4x_2+t_3&=20 \end{aligned}$$

ومن ثم بالتعويض $\bar{x}_1=5$ ، $\bar{x}_2=3$ فى معادلات قيود الثنائى لإيجاد المتغيرات الخاملة t_1 ، t_2 ، t_3 .

$$\begin{aligned} 6(5)+2(3)+t_1&=36 \qquad (\bar{t}_1=0)\\ 3(5)+5(3)+t_2&=30 \qquad (\bar{t}_2=0)\\ (5)+4(3)+t_3&=20 \qquad (\bar{t}_3=3) \end{aligned}$$

مع $\bar{t}_3\neq 0$ فإن متغير القرار المناظر $\bar{y}_3$ يجب أن يساوى صفرًا ومع $\bar{t}_1=\bar{t}_2=0$ فإن $\bar{y}_1 ، \bar{y}_2\neq 0$.

وطالما أن القيم المثلى لمتغيرات القرار الثنائى $\bar{x}_1$ ، $\bar{x}_2$ لا تساوى صفرًا فإن المتغيرات الفائضة للمشكلة الأصلية المناظرة يجب أن تساوى صفرًا . وبإدخال معرفة أن $\bar{y}_3=\bar{s}_1=\bar{s}_2=0$ فى معادلات القيود الأصلية .

$$\begin{aligned} 6y_1+3y_2+\ (0)-(0)&=10\\ 2y_1+5y_2+4(0)-(0)&=8 \end{aligned}$$

وبحل المعادلتين آنيًا . $\bar{y}_1=\frac{13}{12}\approx 1.08$ ، $\bar{y}_2=\frac{7}{6}\approx 1.17$. ومن ثم فإن متغيرات القرار الأصلية هى بالتقريب $\bar{y}_1=1.08$ ، $\bar{y}_2=1.17$ ، $\bar{y}_3=0$.

8.5. **Redo Problem 8.4 for the following primal problem:**

8.5. أعد حل المسألة 8.4 للمشكلة الأصلية التالية :

المطلوب تعظيم الدالة $c=40y_1+60y_2+48y_3$

مع مراعاة القيود : $5y_1+3y_2+4y_3\geq 7 \qquad 2y_1+12y_2+8y_3\geq 21$

$$y_1, y_2, y_3\geq 0$$

(*a*) الثنائى هو :

المطلوب تعظيم الدالة : $\pi=7x_1+21x_2$

مع مراعاة القيود : $5x_1+\ 2x_2\leq 40 \qquad 4x_1+8x_2\leq 48$

$$3x_1+12x_2\leq 60 \qquad x_1, x_2\geq\ 0$$

(*b*) الثنائى حل بيانيًا كالمشكلة الأصلية فى المسألة 7.9 حيث $\bar{x}_1=4$ ، $\bar{x}_2=4$ ، $\bar{\pi}=112$.

(*c*) ومع $\bar{\pi}=112$ فإن $\bar{c}=112$.

(*d*)

$$\text{I.}\quad \begin{aligned} 5y_1+\ 3y_2+4y_3-s_1&=7\\ 2y_1+12y_2+8y_3-s_2&=21 \end{aligned} \qquad\qquad \text{II.}\quad \begin{aligned} 5x_1+\ 2x_2+t_1&=40\\ 3x_1+12x_2+t_2&=60\\ 4x_1+\ 8x_2+t_3&=48 \end{aligned}$$

وبالتعويض $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 4$ فى II .

$$5(4) + 2(4) + t_1 = 40 \qquad (\bar{t}_1 = 12)$$
$$3(4) + 12(4) + t_2 = 60 \qquad (\bar{t}_2 = 0)$$
$$4(4) + 8(4) + t_3 = 48 \qquad (\bar{t}_3 = 0)$$

ومع $\bar{t}_1 \neq 0$ فـإن $\bar{y}_1 = 0$. وبما أن $\bar{t}_2 = \bar{t}_3 = 0$ فـإن $\bar{y}_2 ، \bar{y}_3 \neq 0$. ومـع $\bar{x}_1 ، \bar{x}_2 \neq 0$ فـإن $\bar{s}_1 = \bar{s}_2 = 0$.

وبالتعويض فى I .

$$5(0) + 3y_2 + 4y_3 - (0) = 7$$
$$2(0) + 12y_2 + 8y_3 - (0) = 21$$

وبحل المعادلتين آنيًا . $\bar{y}_2 = \frac{7}{6} \approx 1.167$ و $\bar{y}_3 = \frac{7}{8} \approx 0.875$ ومن ثم فإن متغيرات القرار الأصلية هى $\bar{y}_1 = 0$ ، $\bar{y}_2 = 1.167$ ، $\bar{y}_3 = 0.875$.

8.6. أعد حل المسألة 8.4 للمشكلة الأصلية التالية :

8.6. Redo Problem 8.4 for the following primal problem:

المطلوب تعظيم الدالة $\pi = 30x_1 + 20x_2 + 24x_3$

مع مراعاة القيود : $2x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 80 \qquad 6x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 160$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(*a*) الثنائى هو :

المطلوب تدنية الدالة : $c = 80y_1 + 160y_2$

مع مراعاة القيود : $2y_1 + 6y_2 \geq 30 \qquad 2y_1 + 3y_2 \geq 24$

$$5y_1 + y_2 \geq 20 \qquad y_1, y_2 \geq 0$$

(*b*) الثنائى حل بيانيًا كالمشكلة الأصلية فى المسألة 7.15 حيث $\bar{y}_1 = 9$ ، $\bar{y}_2 = 2$ ، $\bar{c} = 1040$.

(*c*) ومع $\bar{c} = 1040$ فإن $\bar{\pi} = 1040$.

(*d*) I. $2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + s_1 = 80$

$6x_1 + x_2 + 3x_3 + s_2 = 160$

II. $2y_1 + 6y_2 - t_1 = 30$

$5y_1 + y_2 - t_2 = 20$

$2y_1 + 3y_2 - t_3 = 24$

وبالتعويض $\bar{y}_1 = 9$ ، $\bar{y}_2 = 2$ فى II .

$$2(9) + 6(2) - t_1 = 30 \qquad (\bar{t}_1 = 0)$$
$$5(9) + (2) - t_2 = 20 \qquad (\bar{t}_2 = 27)$$
$$2(9) + 3(2) - t_3 = 24 \qquad (\bar{t}_3 = 0)$$

ومع $\bar{t}_1 = \bar{t}_3 = 0$ فإن $\bar{x}_1 ، \bar{x}_3 \neq 0$. وبما أن $\bar{t}_2 \neq 0$ فإن $\bar{x}_2 = 0$ ومع $\bar{y}_1 ، \bar{y}_2 \neq 0$ فإن $\bar{s}_1 = \bar{s}_2 = 0$.

وبالتعويض فى I .

$$2x_1 + 5(0) + 2x_3 + (0) = 80$$

$$6x_1 + (0) + 3\bar{x}_3 + (0) = 160$$

وبحل المعادلتين آنيًا $\bar{x}_1 = \frac{40}{3} \approx 13.33$ ، $\bar{x}_3 = \frac{80}{3} \approx 26.67$. ومن ثم فإن $\bar{x}_1 = 13.33$ ، $\bar{x}_2 = 0$ ، $\bar{x}_3 = 26.67$

8.7. أعد حل المسألة 8.4 للمشكلة الأصلية الآتية :

8.7. Redo Problem 8.4 for the following primal problem:

المطلوب تعظيم الدالة $\pi = 36x_1 + 84x_2 + 16x_3$

مع مراعاة القيود : $3x_1 + 6x_2 + x_3 \le 20 \qquad 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 15$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

(*a*) الثنائى هو :

المطلوب تدنية الدالة : $c = 20y_1 + 15y_2$

مع مراعاة القيود : $3y_1 + 2y_2 \ge 36 \qquad y_1 + 4y_2 \ge 16$

$$6y_1 + 6y_2 \ge 84 \qquad y_1, y_2 \ge 0$$

(*b*) الثنائى حل بيانيًا كالمشكلة الأصلية فى المسألة 7.14 حيث $\bar{y}_1 = 8$ ، $\bar{y}_2 = 6$ ، $\bar{c} = 250$.

(*c*) ومع $\bar{c} = 250$ فإن $\bar{\pi} = 250$.

I. $3x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 = 20$

$2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + s_2 = 15$

II. $3y_1 + 2y_2 - t_1 = 36$

$6y_1 + 6y_2 - t_2 = 84$

$y_1 + 4y_2 - t_3 = 16$

بالتعويض $\bar{y}_1 = 8$ ، $\bar{y}_2 = 6$ فى II .

$$3(8) + 2(6) - t_1 = 36 \qquad (\bar{t}_1 = 0)$$

$$6(8) + 6(6) - t_2 = 84 \qquad (\bar{t}_2 = 0)$$

$$(8) + 4(6) - t_3 = 16 \qquad (\bar{t}_3 = 16)$$

ومع $\bar{t}_1 = \bar{t}_2 = 0$ فإن $\bar{x}_1$ ، $\bar{x}_2 \ne 0$. وطالما $\bar{t}_3 \ne 0$ فإن $\bar{x}_3 = 0$ ومع $\bar{y}_1$ ، $\bar{y}_2 \ne 0$ فإن $\bar{s}_1$ ، $\bar{s}_2 = 0$.

وبالتعويض فى I .

$$3x_1 + 6x_2 + (0) + (0) = 20$$

$$2x_1 + 6x_2 + 4(0) + (0) = 15$$

وبحل المعادلتين آنيًا فإن $\bar{x}_1 = 5$ ، $\bar{x}_2 = \frac{5}{6}$. ومن ثم فإن $\bar{x}_1 = 5$ ، $\bar{x}_2 = \frac{5}{6}$ ، $\bar{x}_3 = 0$

8.8. استخدم الثنائى فى المسائل 8.4 إلى 8.7 فى تحديد أسعار الظل أو القيم الحدية (MVs) للموارد فى القيود الأصلية . (*b*) استخدم *A* ، *B* للموارد فى القيود وبين أن مجموع الموارد المتوفرة مضروبًا فى قيمها الحدية يساوى القيمة المثلى لدالة الهدف الأصلية .

8.8. (*a*) Use the duals in Problems 8.4 to 8.7 to determine the shadow prices or marginal values (MVs) of the resources in the primal constraints. (*b*) Using *A* and *B* for the resources in the constraints, show that the sum of the available resources times their respective marginal values equals the optimal value of the primal objective function.

من المسألة 8.4

(*a*) $\text{MV}_A = \bar{x}_1 = 5$ and $\text{MV}_B = \bar{x}_2 = 3$

(*b*) $\bar{c} = \text{MV}_A(A) + \text{MV}_B(B) = 5(10) + 3(8) = 74$

من المسألة 8.5

(*a*) $\text{MV}_A = \bar{x}_1 = 4$ and $\text{MV}_B = \bar{x}_2 = 4$

(*b*) $\bar{c} = \text{MV}_A(A) + \text{MV}_B(B) = 4(7) + 4(21) = 112$

من المسألة 8.6

(*a*) $\text{MV}_A = \bar{y}_1 = 9$ and $\text{MV}_B = \bar{y}_2 = 2$

(*b*) $\bar{\pi} = \text{MV}_A(A) + \text{MV}_B(B) = 9(80) + 2(160) = 1040$

من المسألة 8.7

(*a*) $\text{MV}_A = \bar{y}_1 = 8$ and $\text{MV}_B = \bar{y}_2 = 6$

(*b*) $\bar{\pi} = \text{MV}_A(A) + \text{MV}_B(B) = 8(20) + 6(15) = 250$.

The Simplex Algorithm and The Dual حساب السمبلكس والمشكلة المقابلة

.8.9 للمشكلة التالية (*a*) كون الثنائى (*b*) حل الثنائى باستخدام حساب السمبلكس (*c*) استخدم جدول المشكلة المقابلة النهائى فى تحديد القيم المثلى لدالة الهدف الأصلية ومتغيرات القرار .

8.9. For the following problem (*a*) formulate the dual. (*b*) Solve the dual, using the simplex algorithm. (*c*) Use the final dual tableau to determine the optimal values of the primal objective function and decision variables.

المطلوب تدنية الدالة : $c = 14y_1 + 40y_2 + 18y_3$

مع مراعاة القيود : $2y_1 + 5y_2 + y_3 \geq 50$

$y_1 + 5y_2 + 3y_3 \geq 30$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

(*a*) الثنائى هو :

المطلوب تعظيم الدالة : $\pi = 50x_1 + 30x_2$

مع مراعاة القيود : $2x_1 + x_2 \leq 14$

$5x_1 + 5x_2 \leq 40$

$x_1 + 3x_2 \leq 18$

$x_1, x_2 \geq 0$

(*b*) الثنائى حل كما فى المشكلة الأصلية فى المسألة 8.1 حيث كان الجدول النهائى .

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ثابت
1	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	6
0	1	−1	$\frac{2}{5}$	0	2
0	0	2	−1	1	6
0	0	20	2	0	360

(*c*) متغيرات القرار الأصلية عبر عنهما بأسعار الظل أو القيم الحدية للمتغيرات المناظرة فى الثنائى والتى وضعت فى شكل صندوق لسهولة التعرف عليهما . ولهذا فإن $\bar{y}_1 = 20$ ، $\bar{y}_2 = 2$ ، $\bar{y}_3 = 0$. وأن $\bar{c} = 14(20) + 40(2) + 18(0) = 360$.

8.10. أعد حل المسألة 8.9 لمشكلة البرمجة الخطية التالية :

8.10. Redo Problem 8.9 for the following linear programming problem:

المطلوب تدنية المشكلة :

$$c = 240y_1 + 120y_2$$

مع مراعاة القيود :

$$\begin{aligned} 4y_1 + 8y_2 &\geq 56 \\ 2y_1 + 2y_2 &\geq 24 \\ 3y_1 + \ \ y_2 &\geq 18 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(*a*) الثنائى هو :

المطلوب تعظيم الدالة :

$$\pi = 56x_1 + 24x_2 + 18x_3$$

مع مراعاة القيود :

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 240 \\ 8x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 &\leq 120 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(*b*) الثنائى حل كما فى المشكلة الأصلية فى المسألة 8.2 حيث كان الجدول النهائى .

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	ثابت
-2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	60
5	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	30
28	0	0	$\boxed{3}$	$\boxed{9}$	1800

(*c*) ومن ثم فإن $\bar{y}_1 = 3$ ، $\bar{y}_2 = 9$ ، $\bar{y}_3 = 0$. $\bar{c} = 240(3) + 120(9) = 1800$.

8.11. أعد حل المسألة 8.9 إذا أعطيت البيانات الآتية :

8.11. Redo Problem 8.9, given

المطلوب تدنية الدالة

$$c = 36y_1 + 30y_2 + 20y_3$$

مع مراعاة القيود :

$$\begin{aligned} 6y_1 + 3y_2 + \ \ y_3 &\geq 250 \\ 2y_1 + 5y_2 + 4y_3 &\geq 200 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(*a*) الثنائى هو :

المطلوب تعظيم الدالة :

$$\pi = 250x_1 + 200x_2$$

مع مراعاة القيود :

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 &\leq 36 \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 30 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 20 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(*b*) الثنائى حل مثل المشكلة الأصلية فى المسألة 8.3 . كان الجدول النهائى هو :

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ثابت
1	0	$\frac{5}{24}$	$-\frac{1}{12}$	0	5
0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	3
0	0	$\frac{7}{24}$	$-\frac{11}{12}$	1	3
0	0	$\frac{325}{12}$	$\frac{175}{6}$	0	1850

(*c*) ومن ثم فإن $\bar{y}_1 = \frac{325}{12} \approx 27.08$ ، $\bar{y}_2 = \frac{175}{6} \approx 29.17$ ، $\bar{y}_3 = 0$. $\bar{c} = 36(\frac{325}{12}) + 30(\frac{175}{6}) + 20(0) = 1850$.

مسائل إضافية

التعظيم باستخدام السمبلكس Maximization With The Simplex Algorithm

استخدم حساب السمبلكس لحل كل من المشكلات البرمجة الخطية التالية :

Use the simplex algorithm to solve each of the following linear programming problems.

8.12. المطلوب تعظيم الدالة
مع مراعاة القيود :

8.12. **Maximize** $\pi = 20x_1 + 8x_2$
subject to

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 &\le 200 \\ 6x_1 + 3x_2 &\le 180 \\ 8x_1 + 2x_2 &\le 160 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

8.13. المطلوب تعظيم الدالة
مع مراعاة القيود :

8.13. **Maximize** $\pi = 4x_1 + 3x_2$
subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + 9x_2 &\le 207 \\ 6x_1 + 4x_2 &\le 120 \\ 15x_1 + 5x_2 &\le 225 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

8.14. المطلوب تعظيم الدالة
مع مراعاة القيود :

8.14. **Maximize** $\pi = 8x_1 + 2x_2$
subject to

$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 &\le 216 \\ 6x_1 + 3x_2 &\le 180 \\ 12x_1 + 2x_2 &\le 312 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

8.15. المطلوب تعظيم الدالة
مع مراعاة القيود :

8.15. **Maximize** $\pi = 9x_1 + 5x_2$
subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\le 280 \\ 6x_1 + 5x_2 &\le 450 \\ 15x_1 + 6x_2 &\le 720 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

8.16. Maximize $\pi = 39x_1 + 70x_2 + 16x_3$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\le 180 \\ 5x_1 + 2.5x_2 + x_3 &\le 300 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

8.16. المطلوب تعظيم الدالة
مع مراعاة القيود :

8.17. Maximize $\pi = 168x_1 + 222x_2 + 60x_3$

subject to

$$\begin{aligned} 7x_1 + 14x_2 + 2x_3 &\le 90 \\ 8x_1 + 8x_2 + 4x_3 &\le 120 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

8.17. المطلوب تعظيم الدالة
مع مراعاة القيود :

The Dual الثنائى

8.18. Find the dual of Problem 8.12.

8.18. أوجد الثنائى للمسألة 8.12.

8.19. Find the dual of Problem 8.16.

8.19. أوجد الثنائى للمسألة 8.16.

Minimization With the Dual التدنية باستخدام الثنائى

حل كل من المشكلات التالية أولاً بإيجاد الثنائى وثانيًا استخدم حساب السمبلكس .

Solve each of the following problems by first finding the dual and then using the simplex algorithm.

8.20. Minimize $c = 225y_1 + 180y_2$

subject to

$$\begin{aligned} 8y_1 + y_2 &\ge 32 \\ 7y_1 + 4y_2 &\ge 112 \\ y_1 + 6y_2 &\ge 54 \\ y_1, y_2, &\ge 0 \end{aligned}$$

8.20. المطلوب تدنية الدالة
مع مراعاة القيود :

8.21. Minimize $c = 540y_1 + 900y_2$

subject to

$$\begin{aligned} 3y_1 + 15y_2 &\ge 195 \\ 4y_1 + 5y_2 &\ge 140 \\ 10y_1 + 2y_2 &\ge 80 \\ y_1, y_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

8.21. المطلوب تدنية الدالة
مع مراعاة القيود :

8.22. Minimize $c = 24y_1 + 61y_2 + 60y_3$

subject to

$$\begin{aligned} 2y_1 + 2y_2 + 6y_3 &\ge 60 \\ y_1 + 3y_2 + y_3 &\ge 15 \\ y_1, y_2, y_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

8.22. المطلوب تدنية الدالة
مع مراعاة القيود :

8.23 المطلوب تدنية الدالة

مع مراعاة القيود :

8.23. Minimize $c = 48y_1 + 168y_2 + 145y_3$

subject to

$$2y_1 + 4y_2 + 8y_3 \geq 48$$
$$3y_1 + 12y_2 + 6y_3 \geq 96$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

حل المسائل الإضافية

8.12. $\bar{x}_1 = 12.5, \bar{x}_2 = 30, \bar{\pi} = 490$

8.13. $\bar{x}_1 = 6, \bar{x}_2 = 21, \bar{\pi} = 87$

8.14. $\bar{x}_1 = 24, \bar{x}_2 = 12, \bar{\pi} = 216$

8.15. $\bar{x}_1 = 25, \bar{x}_2 = 57.5, \bar{\pi} = 512.5$

8.16. $\bar{x}_1 = 20, \bar{x}_2 = 80, \bar{x}_3 = 0, \bar{\pi} = 6380$

8.17. $\bar{x}_1 = 10, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = 10, \bar{\pi} = 2280$

8.18.

تدنية الدالة :

$$c = 200y_1 + 180y_2 + 160y_3$$

مع مراعاة القيود :

$$4y_1 + 6y_2 + 8y_3 \geq 20$$
$$5y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 8$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

8.19.

تدنية الدالة :

$$c = 180y_1 + 300y_2$$

مع مراعاة القيود :

$$y_1 + 5y_2 \geq 39$$
$$2y_1 + 2.5y_2 \geq 70$$
$$5y_1 + y_2 \geq 16$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

8.20. $\bar{y}_1 = 12, \bar{y}_2 = 7, \bar{c} = 3960$

8.21. $\bar{y}_1 = 25, \bar{y}_2 = 8, \bar{c} = 20,700$

8.22. $\bar{y}_1 = 7.5, \bar{y}_2 = 0, \bar{y}_3 = 7.5, \bar{c} = 630$

8.23. $\bar{y}_1 = 16, \bar{y}_2 = 4, \bar{y}_3 = 0, \bar{c} = 1440$

الفصل التاسع

حساب التفاضل : المشتقة وقواعد التفاضل

Differential Calculus : The Derivative and the Rules of Differentiation

Limits النهايات 9.1

إذا اقتربت القيم الدالية $f(x)$ للدالة f من عدد حقيقى L لجميع قيم x حينما تقترب x من a من كلا الجانبين ولكنها لا تساوى a فإن L تعرف كنهاية لـ $f(x)$ عندما تقترب x من a وتكتب :

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

وبافتراض أن $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ موجودتان فـإن قواعد النهايات مبينة أدناه مشروحة فى المثال 2 ومعالجة فى المسائل 9.1 إلى 9.5 .

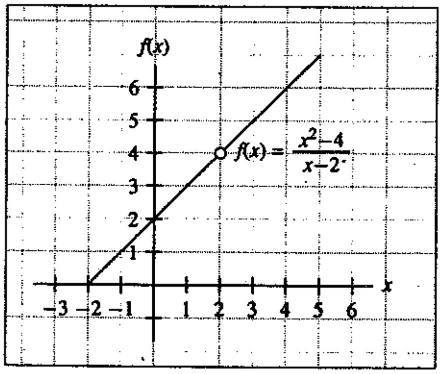
1. $\lim_{x\to a} k = k$ $\qquad$ ($k =$ ثابت)
2. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ $\qquad$ ($n =$ عدد صحيح موجب)
3. $\lim_{x\to a} kf(x) = k\lim_{x\to a} f(x)$ $\qquad$ ($k =$ ثابت)
4. $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
5. $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
6. $\lim_{x\to a}[f(x) \div g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \div \lim_{x\to a} g(x)$ $\qquad$ $[\lim_{x\to a} g(x) \neq 0]$
7. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$ $\qquad$ $(n > 0)$

EXAMPLE 1. (*a*) To find $\lim_{x\to 2} f(x)$, if it exists, given

مثال 1 : (a) لإيجاد $\lim_{x\to 2} f(x)$ إذا وجدت وأعطيت

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} \qquad (x \neq 2)$$

فإننا ننشئ جدولاً ونرسم الشكل البيانى كما فى الشكل (1–9) ولاحظ أن المقدار ما بين القوسين ($x \neq 2$) والدائـرة المفتوحة فى الشكل 1–9 تدل على أن $f(x)$ غير معرفة $x = 2$ طالما أن القسمة على صفر غير جائزة رياضيًا .



x	$f(x)$
−2	0
−1	1
0	2
1	3
1.5	3.5
1.75	3.75
2.25	4.25
2.5	4.5
3	5
4	6

شكل (1–9)

فى الشكل (9–1) لاحظ أنه رغم أن $f(x)$ غير معرفة عند $x = 2$ حينما تقترب x من 2 من اليسار (من القيـم < 2) وتكتب $x \to 2^-$ فإن $f(x)$ تقترب من 4 ؛ وحينما تقترب x من 2 من اليمين (من القيم > 2) وتكتب $x \to 2^+$ فـإن $f(x)$ تقترب من 4 . إذًا توجد نهاية طالما أن نهاية الدالة عندما تقترب x من عدد يعتمد فقط على قيم x القريبة من ذلك العدد . وتكتب .

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

(b) ولإيجاد $\lim_{x \to 2} g(x)$ إذا وجدت وأعطيت .

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{عندما} \quad x < 6 \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{عندما} \quad x \geq 6 \end{cases}$$

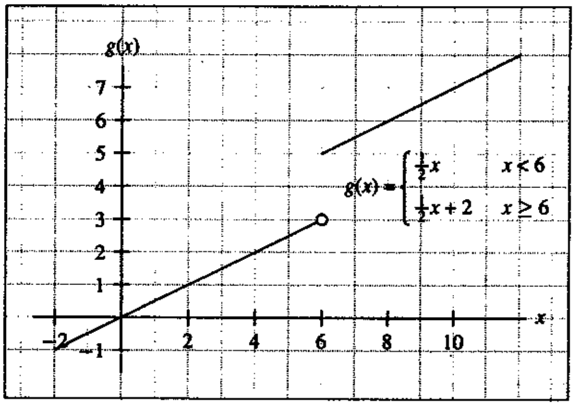
نشكل الجداول ونرسم الشكل البيانى كما فى الشكل 9–2 .

$g(x) = \frac{1}{2}x$

x	$f(x)$
0	0
2	1
4	2
5	2.5

$g(x) = \frac{1}{2}x + 2$

x	$f(x)$
6	5
8	6
10	7



شكل (9–2)

فى الشكل 9–2 عندما تقترب x من 6 من اليسار $(x \to 6^-)$ فإن $g(x)$ تقترب من 3 وتسمى نهاية ذات جانب واحـد . كما أنه عندما تقترب x من 6 من اليمين $(x \to 6^+)$ فإن $g(x)$ تقترب من 5 وتسمى نهاية ذات جـانب واحـد . إذًا لا توجد نهاية طالما أن $g(x)$ لا تقترب من عدد وحيد عندما تقترب x من 6 من كلا الجانبين .

مثال 2 : فى غياب التمثيل البيانى فإنه يمكننا إيجاد النهايات باستخدام قواعد النهايات المحددة أعلاه .

EXAMPLE 2. In the absence of graphs, limits can be found by using the rules of limits enumerated above.

(a) $\lim_{x \to 5} 24 = 24$ — قاعدة (1)

(b) $\lim_{x \to 7} x^2 = (7)^2 = 49$ — قاعدة (2)

(c) $\lim_{x \to 2} 4x^3 = 4 \lim_{x \to 2} x^3 = 4(2)^3 = 32$ — قاعدة (2) و (3)

(d) $\lim_{x \to 3} (x^4 + 5x) = \lim_{x \to 3} x^4 + 5 \lim_{x \to 3} x$ — قاعدة (4)

$$= (3)^4 + 5(3) = 96$$

(e) $\lim_{x \to 4} [(x + 8)(x - 5)] = \lim_{x \to 4} (x + 8) \cdot \lim_{x \to 4} (x - 5)$ — قاعدة (5)

$$= (4 + 8) \cdot (4 - 5) = -12$$

9.2 الاستمرارية Continuity

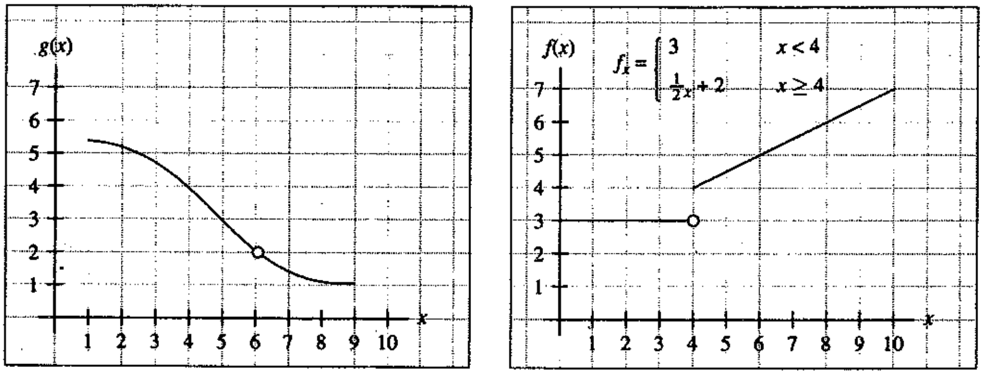
الدالة المستمرة هى الدالة التى ليس لها انكسارات فى منحناها . إذ يمكن أن ترسم دون رفع القلم من الورقة . فالدالة f تكون مستمرة عند $x=a$ إذا :

1. $f(x)$ معرفة ، أى توجد عند $x=a$.
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة .
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

والواقع أن جميع دوال كثيرة الحدود هى دوال مستمرة كما أن جميع الدوال النسبية هى دوال مستمرة ما عدا تلك التى تكون غير معرفة ؛ أى التى يكون مقامها مساويًا للصفر . انظر المسألة 9.6 .

مثال 3 : لقد بينا أن التمثيل البيانى للدالة المستمرة يمكن أن يرسم دون رفع القلم من على الورقة وأن الدائرة المفتوحة تعنى أن الدالة غير معرفة عند تلك النقطة . وإنه من الواضح أنه فى الشكل $(9-3)(a)$ أن $f(x)$ دالة غير مستمرة عند $x=4$ وفى الشكل $(9-3)(b)$ أن $g(x)$ دالة غير مستمرة عند $x=6$.

EXAMPLE 3. Recalling that the graph of a continuous function can be sketched without ever removing the pencil from the paper and that an open circle means the function is not defined at that point, it is clear that in Fig. 9-3(a) $f(x)$ is discontinuous at $x=4$ and in Fig. 9-3(b) $g(x)$ is discontinuous at $x=6$.



(b)

(a)

شكل (9–3)

لاحظ أنه عند نقطة عدم الاستمرارية فى الشكل $(9-3)(a)$ أن $\lim_{x\to 4} f(x)$ لا توجد ، ولكن عند نقطة عدم الاستمرارية فى الشكل $(9-3)(b)$ أن $\lim_{x\to 6} g(x)$ توجد . فالنهايات والاستمرارية غير متلازمتين . فالنهاية يمكن أن توجد عند نقطة ما بدون أن تكون الدالة مستمرة عند هذه النقطة ؛ والدالة لا يمكن أن تكون مستمرة عند نقطة مالم توجد نهاية عند هذه النقطة . وباختصار فالنهاية شرط ضرورى وليست شرطًا كافيًا للاستمرارية .

9.3 ميل دالة الخط المنحنى The Slope of a Curvilinear Function

ميل دالة الخط المنحنى غير ثابت حيث يختلف عند نقاط مختلفة على المنحنى . وفى الهندسة فإن ميل الخط المنحنى عند نقطة ما يقاس بميل خط المماس المرسوم للدالة عند هذه النقطة . وخط المماس لدالة

الخط المنحنى هو خط مستقيم يمس المنحنى عند نقطة واحدة فقط فى المساحة المحيطة بالنقطة . وقياس ميل دالة الخط المنحنى عند نقاط مختلفة يتطلب خطوط مماس منفصلة كما نرى فى الشكل (9–4) حيث يصبح ميل المنحنى أفقيًا من النقطة A إلى B إلى C .

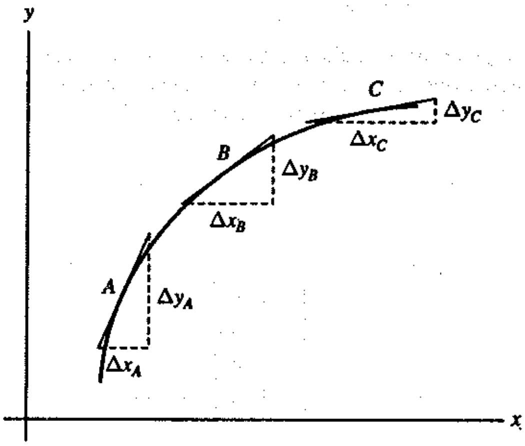
وميل خط المماس يشتق من ميول عائلة الخطوط القاطعة للقوس . فالخط القاطع s هو خط مستقيم يقطع المنحنى عند نقطتين كما فى الشكل (9–5) حيث .

$$S\ \text{ميل} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

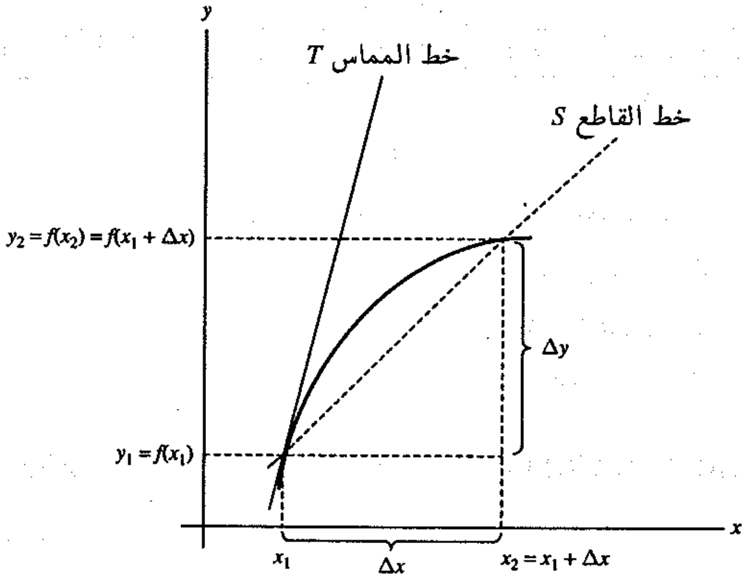
وبوضع $x_2 = x_1 + \Delta x$ ، $y_2 = f(x_1 - \Delta x)$ فإن ميل الخط القاطع يمكن التعبير عنه بمعادلة الفروق .

$$S\ \text{ميل} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{(x_1 + \Delta x) - x_1}$$

$$S\ \text{ميل} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$



شكل (9–4)



شكل (9–5)

إذا أصبحت المسافة بين x_2 ، x_1 أصغر فأصغر ، أى إذا $\Delta x \to 0$ فإن الخط القاطع يرتكز إلى الخلف وإلى اليسار ويقترب من خط المماس . فإذا اقترب ميل الخط القاطع من النهاية عندما $\Delta x \to 0$ فإن النهاية هى ميل خط المماس T الذى هو أيضًا ميل الدالة عند النقطة ويكتب .

$$T\ \text{ميل}' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \tag{9.1}$$

ملاحظة : فى كثير من الكتب الدراسية فإن h تستخدم بدلاً من Δx .

$$T\ \text{ميل}' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \tag{9.1a}$$

مثال 4 : ميل دالة الخط المنحنى مثل $f(x) = 3x^2$ نحصل عليه كما يلى:

(1) نطبق الدالة الخاصة فى الصيغة الجبرية 9.1 أو $(9.1a)$ ونعوض $x_1 + \Delta x$ أو $(x_1 + h)$ و x_1 على الترتيب .

(2) نختصر الدالة .

(3) نقيم نهاية الدالة فى صيغتها المختصرة . إذًا من (9.1) .

EXAMPLE 4. The slope of a curvilinear function, such as $f(x) = 3x^2$, is found as follows: (1) employ the specific function in the algebraic formula *(9.1)* or *(9.1a)* and substitute the arguments $x_1 + \Delta x$ (or $x_1 + h$) and x_1, respectively; (2) simplify the function; and (3) evaluate the limit of the function in its simplified form. Thus, from *(9.1)*,

$$T\ \text{ميل}' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

(1) بتطبيق الدالة الخاصة وبالتعويض .

$$T\ \text{ميل} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x + \Delta x)^2 - 3x^2}{\Delta x}$$

(2) اختصر النتائج .

$$T\ \text{ميل}' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3[(x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2] - 3x^2}{\Delta x}$$

$$T\ \text{ميل} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

وبالقسم على Δx .

$$T\ \text{ميل}' = \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x)$$

(3) وبأخذ نهاية المقدار المحدد .

$$T\ \text{الميل} = 6x$$

ملاحظة : قيمة الميل يعتمد على قيمة x المختارة . فعند $x = 1$ فإن T الميل $= 6(1) = 6$. وعند $x = 2$ فإن T الميل $= 6(2) = 12$.

9.4 المشتقة The Derivative

إذا أعطيت الدالة $y = f(x)$ فإن مشتقة الدالة عند x تكتب : $f'(x)$ ، y' ، df/dx أو dy/dx . وتعرف :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{9.2}$$

بشرط وجود النهاية . أو باستخدام ($9.1a$)

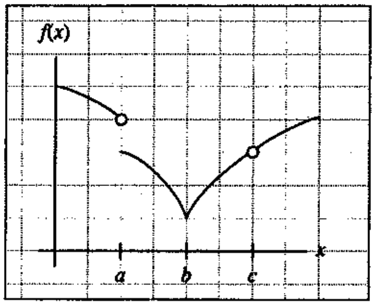
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{9.2a}$$

حيث تقرأ $f'(x)$ بمشتقة f بالنسبة لـ x . ومشتقة الدالة $f'(x)$ أو بشكل مبسط f' هى نفسها دالة حيث تقيس كل من الميل ومعدل التغير اللحظى للدالة الأصلية عند نقطة معينة .

9.5 القابلية للتفاضل والاستمرارية Differentiability and Continuity

تكون الدالة قابلة للتفاضل عند نقطة ما إذا وجدت المشتقة عند تلك النقطة . ولكى تكون الدالة قابلة للتفاضل عند نقطة ما فإن هذه الدالة يجب (1) أن تكون مستمرة عند هذه النقطة و (2) لها مماس وحيد عند هذه النقطة . وفى الشكل (6–9) فإن $f(x)$ ليست قابلة للتفاضل عند النقطة a ، c نظرًا لوجود فجوات فى الدالة عند هذه النقاط ومن ثم لا يمكن أن نحصل على المشتقة عند أى من هذه النقاط حيث الدالة غير مستمرة .

والاستمرارية بمفردها لا تضمن (ليست شرطًا كافيًا) القابلية للتفاضل . فى الشكل (6–9) $f(x)$ دالة مستمرة عند b ولكن ليست قابلة للتفاضل عند b لأن عند النقطة الحادة يمكننا رسم عدد لا نهائى من خطوط التماس (لا يوجد خط مماس وحيد) .



شكل (6–9)

9.6 رموز المشتقة Derivative Notation

مشتقة الدالة يمكن أن تكتب بطرق مختلفة . فإذا كانت $y=f(x)$ فإنه يمكن التعبير عن المشتقة بما يلى :

$$f'(x) \qquad f' \qquad y' \qquad \frac{df}{dx} \qquad \frac{dy}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[f(x)] \qquad \text{أو} \qquad D_x[f(x)]$$

إذا كانت $y=\phi(t)$ فإن المشتقة يمكن أن تكتب كالآتى :

$$\phi'(t) \qquad \phi' \qquad y' \qquad \frac{dy}{dt} \qquad \frac{d\phi}{dt} \qquad \frac{d}{dt}[\phi(t)] \qquad \text{أو} \qquad D_t[\phi(t)]$$

إذا كانت المشتقة $y=f(x)$ قد قدرت عند $x=a$ فإن الرمز المناسب يشتمل $f'(x)$ و $dy/dx|_a$ انظر المسائل 9.7 و 9.8 .

EXAMPLE 5. If $y = 5x^2 + 7x + 12$, the derivative can be written

مثال 5 : إذا كانت $y = 5x^2 + 7x + 12$.
فإن المشتقة يمكن أن تكتب كالتالى :

$$y' \qquad \frac{dy}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[5x^2 + 7x + 12] \qquad \text{or} \qquad D_x[5x^2 + 7x + 12]$$

إذا كانت $z = \sqrt{8t-3}$ فإن المشتقة يمكن أن تكتب كالتالى :

$$z' \qquad \frac{dz}{dt} \qquad \frac{d}{dt}[\sqrt{8t-3}] \qquad D_t[\sqrt{8t-3}]$$

Rules of Differentiation قواعد التفاضل 9.7

التفاضل هو عملية إيجاد مشتقة الدالة ، ويتضمن تطبيق مجموعة من القواعد الأساسية أو الصيغ لدالة معينة . وفى إطار شرح قواعد التفاضل لدالة مثل $y = f(x)$ والدوال الأخرى مثل $g(x)$ و $h(x)$ والتى هى شائعة الاستخدام حيث g و h كلاهما دوال غير معينة لـ x فإنه يفترض أن تكون هذه الدوال قابلة للتفاضل . وقواعد التفاضل مبينة أدناه ومعالجة فى المسائل 9.7 إلى 9.22 . وهناك بعض الإثباتات موجودة فى المسائل 9.23 إلى 9.25 .

The Constant Function Rule قاعدة الدالة الثابتة 9.7.1

مشتقة الدالة الثابتة ، $f(x) = k$ حيث k ثابت ، تساوى صفرًا .

إذا أعطيت : $f(x) = k, \qquad f'(x) = 0$

EXAMPLE 6.

مثال 6 : إذا أعطيت

Given $f(x) = 5, \qquad f'(x) = 0$

Given $f(x) = -9, \qquad f'(x) = 0$

The Linear Function Rule قاعدة الدالة الخطية 9.7.2

مشتقة الدالة الخطية $f(x) = mx + b$ تساوى m ، وهى معامل x . ومشتقة المتغير المرفوع للقوة الأولى يساوى دائمًا معامل المتغير ، بينما مشتقة الثابت تساوى صفرًا .

إذا أعطيت : $f(x) = mx + b, \qquad f'(x) = m$

EXAMPLE 7.

مثال 7 : إذا أعطيت

Given $f(x) = 6x + 7, \qquad f'(x) = 6$

Given $f(x) = 9 - \frac{1}{4}x, \qquad f'(x) = -\frac{1}{4}$

Given $f(x) = 18x, \qquad f'(x) = 18$

The Power Function Rule قاعدة دالة القوى 9.7.3

مشتقة دالة القوى ، $f(x) = kx^n$ حيث k ثابت و n أى عدد حقيقى ، تساوى المعامل k مضروبًا فى الأس n ومضروبًا بالمتغير x مرفوعًا للقوى $(n - 1)$.

إذا أعطيت : $f(x) = kx^n, \qquad f'(x) = k \cdot n \cdot x^{n-1}$

مثال 8 : إذا أعطيت

EXAMPLE 8.

$$\text{Given } f(x) = 6x^3, \qquad f'(x) = 6 \cdot 3 \cdot x^{3-1} = 18x^2$$

$$\text{Given } f(x) = 7x^2, \qquad f'(x) = 7 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 14x$$

$$\text{Given } f(x) = x^5, \qquad f'(x) = (1) \cdot 5 \cdot x^{5-1} = 5x^4$$

انظر أيضًا المسألة 9.8 .

9.7.4 قاعدة الجمع والطرح The Rule for Sums and Differences

مشتقة حاصل جمع دالتين يساوى جمع مشتقات الدوال الفردية . وبالمثل مشتقة حاصل طرح دالتين يساوى طرح مشتقات الدالتين .

إذا أعطيت : $f(x) = g(x) \pm h(x)$

$$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

مثال 9 : إذا أعطيت

EXAMPLE 9.

$$\text{Given } f(x) = 16x^4 - 5x^3, \qquad f'(x) = 64x^3 - 15x^2$$

$$\text{Given } f(x) = 6x^2 + 4x - 9, \qquad f'(x) = 12x + 4$$

انظر المسألة 9.9 . ومن أجل اشتقاق القاعدة ، انظر المسألة 9.23 .

9.7.5 قاعدة الضرب The Product Rule

مشتقة حاصل ضرب دالتين تساوى الدالة الأولى مضروبة فى مشتقة الدالة الثانية مضافًا إليها الدالة الثانية مضروبة فى مشتقة الدالة الأولى .

إذا أعطيت : $f(x) = g(x) . h(x)$

$$f'(x) = g(x) \cdot h'(x) + h(x) \cdot g'(x) \tag{9.3}$$

مثال 10 : إذا أعطيت $f(x) = 4x^5(3x - 2)$. افترض أن $g(x) = 4x^5$ و $h(x) = (3x - 2)$. وبأخذ المشتقات الفردية $g'(x) = 20x^4$ و $h'(x) = 3$. وبالتعويض بالقيم المناسبة فى الأماكن المحددة فى صيغة قاعدة الضرب (9.3) .

EXAMPLE 10. Given $f(x) = 4x^5(3x - 2)$, let $g(x) = 4x^5$ and $h(x) = (3x - 2)$. Taking the individual derivatives, $g'(x) = 20x^4$ and $h'(x) = 3$. Then substituting the appropriate values in the specified places in the product rule formula *(9.3)*,

$$f'(x) = 4x^5(3) + (3x - 2)(20x^4)$$

واختصارها جبريًا :

$$f'(x) = 12x^5 + 60x^5 - 40x^4 = 72x^5 - 40x^4$$

انظر المسائل 9.10 إلى 9.12 . ولاشتقاق القاعدة ، انظر المسألة 9.24 .

9.7.6 قاعدة خارج القسمة The Quotient Rule

مشتقة خارج قسمة دالتين تساوى المقام مضروبًا فى مشتقة البسط ناقصًا البسط مضروبًا فى مشتقة المقام والجميع مقسومًا على مربع المقام .

إذا أعطيت : $f(x)=g(x)/h(x)$ حيث $h(x)\neq 0$.

$$f'(x)=\frac{h(x)\cdot g'(x)-g(x)\cdot h'(x)}{[h(x)]^2} \qquad (9.4)$$

مثال 11 :

EXAMPLE 11.

$$\text{Given } f(x)=\frac{6x^3}{2x+5} \qquad \left(x\neq-\frac{5}{2}\right)$$

حيث $g(x)=6x^3$ ، $h(x)=2x+5$ ، $g'(x)=18x^2$ ، $h'(x)=2$. وبالتعويض بهذه القيم فى صيغة قاعدة خارج القسمة (9.4) .

$$f'(x)=\frac{(2x+5)(18x^2)-6x^3(2)}{(2x+5)^2}$$

وباختصارها جبريًا :

$$f'(x)=\frac{36x^3+90x^2-12x^3}{(2x+5)^2}=\frac{24x^3+90x^2}{(2x+5)^2}=\frac{6x^2(4x+15)}{(2x+5)^2}$$

انظر المسائل 9.13 و 9.14 ولاشتقاق القاعدة ، انظر المسألة 9.25 .

9.7.7 قاعدة دالة القوى العامة The Generalized Power Function Rule

مشتقة الدالة المرفوعة لقوى ما $f(x)=[g(x)]^n$ ، حيث $g(x)$ دالة قابلة للتفاضل و n أى عدد حقيقى ، تساوى الأس n مضروبًا فى الدالة $g(x)$ مرفوعًا للقوى $(n-1)$ مضروبًا بالتالى فى مشتقة الدالة نفسها $g'(x)$.

إذا أعطيت : $f(x)=[g(x)]^n$

$$f'(x)=n[g(x)]^{n-1}\cdot g'(x) \qquad (9.5)$$

مثال 12 : إذا أعطيت $f(x)=(x^2+8)^3$. افترض أن $g(x)=x^2+8$ ومن ثم فإن $g'(x)=2x$ وبالتعويض بهذه القيم فى صيغة دالة القوى العامة (9.5) .

EXAMPLE 12. Given $f(x)=(x^2+8)^3$, let $g(x)=x^2+8$, then $g'(x)=2x$. Substituting these values in the generalized power function formula (9.5),

$$f'(x)=3(x^2+8)^{3-1}\cdot 2x$$

وبالاختصار جبريًا :

$$f'(x)=6x(x^2+8)^2$$

ملاحظة : قاعدة دالة القوى العامة تشتق من قاعدة السلسلة والتى المبينة أدناه ولكننا عرضناها أولاً من أجل سهولة الفهم . انظر المسائل 9.15 و 9.16 .

9.7.8 قاعدة السلسلة The Chain Rule

إذا أعطيت الدالة المركبة Composite Function والتى تسمى أيضًا دالة الدالة ، حيث y دالة فى u و u بالتالى دالة فى x ، أى $y=f(u)$ و $u=g(x)$ ومن ثم فإن $y=f[g(x)]$. إن مشتقة y بالنسبة لـ x تساوى مشتقة

الدالة الأولى بالنسبة لـ u مضروبة فى مشتقة الدالة الثانية بالنسبة لـ x .

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \tag{9.6}$$

انظر المسائل 9.17 و 9.18 .

مثال 13 : إذا أعطيت الدالة $y=(4x^3+7)^5$ ولكى تستخدم قاعدة السلسلة افترض أن $y=u^5$ وأن $u=4x^3+7$ ومن ثم فإن $dy/du=5u^4$ و $du/dx=12x^2$. وبالتعويض بهذه القيم فى (9.6) .

EXAMPLE 13. Consider the function $y=(4x^3+7)^5$. To use the chain rule, let $y=u^5$ and $u=4x^3+7$. Then $dy/du=5u^4$ and $du/dx=12x^2$. Substituting these values in (9.6),

$$\frac{dy}{dx}=5u^4\cdot 12x^2=60x^2u^4$$

ومن ثم نعبر عن المشتقة بدلالة المتغير الوحيد وبالتعويض بـ $(4x^3+7)$ بالنسبة u .

$$\frac{dy}{dx}=60x^2(4x^3+7)^4$$

ولمزيد من الدوال المعقدة فإن توليفات مختلفة من القواعد الأساسية يجب أن تستخدم . انظر المسائل 9.19 و9.20 .

9.8 المشتقات من درجات عليا Higher-Order Derivatives

مشتقة الدرجة الثانية ، وتكتب $f''(x)$ تقيس الميل ومعدل تغير المشتقة الأولى وهى بالضبط مثل المشتقة الأولى التى تقيس الميل ومعدل تغير الدالة الأصلية . ومشتقة الدرجة الثالثة $[f'''(x)]$ تقيس الميل ومعدل تغير المشتقة الثانية وإلخ ... ومشتقات الدرجات العليا نحصل عليها من خلال تطبيق قواعد التفاضل لمشتقات الدرجات الأقل كما هو موضح فى المثال 14 ومعالج فى المسائل 9.21 و 9.22 .

مثال 14 : إذا أعطيت $y=f(x)$ فإن الرموز الشائعة لمشتقة الدرجة الثانية تشمل $f''(x)$ ، y'' ، d^2y/dx^2 ، D^2y . ولمشتقة الدرجة الثالثة : $f'''(x)$ ، y''' ، d^3y/dx^3 ، D^3y . ولمشتقة الدرجة الرابعة : $f^{(4)}(x)$ ، $y^{(4)}$ ، d^4y/dx^4 ، D^4y ..... وإلخ .

EXAMPLE 14. Given $y=f(x)$, common notation for the second-order derivative includes $f''(x)$, y'', d^2y/dx^2, D^2y; for the third-order derivative, $f'''(x)$, y''', d^3y/dx^3, D^3y; for the fourth-order derivative, $f^{(4)}(x)$, $y^{(4)}$, d^4y/dx^4, D^4y; and so on.

ومشتقات الدرجات العليا نحصل عليها بالتطبيق المتعاقب لقواعد التفاضل مشتقات الدرجة السابقة . ومن ثم إذا كانت $f(x)=5x^4+8x^3+7x^2$.

$$f'(x)=20x^3+24x^2+14x$$

$$f''(x)=60x^2+48x+14$$

$$f'''(x)=120x+48$$

$$f^{(4)}(x)=120 \qquad f^{(5)}(x)=0$$

انظر المسائل 9.21 و 9.22 .

9.9 الدوال الضمنية Implicit Functions

قواعد التفاضل التى عرضت سابقًا كانت بدلالة الدوال الصريحة . والدالة الصريحة هى الدالة التى يكون فيها المتغير التابع على يسار علامة التساوى والمتغير المستقل والمعاملات إلى اليمين . وأحيانًا يواجه الفرد بالدالة الضمنية وهى الدالة التى يكون فيها كلا المتغيرين على جانب واحد من علامة التساوى . انظر المثال 15 ، ولتفاضل الدوال الضمنية انظر القسم 13.11 .

مثال 15 : عينات من الدوال الضمنية والصريحة تشمل :

EXAMPLE 15. Samples of explicit and implicit functions include:

الدوال الصريحة $$y = 9x, \qquad y = x^2 + 5x - 8, \qquad y = \frac{x^4 - 7x^3}{x^2 - 48} \quad (x \neq \pm\sqrt{48})$$

الدوال الضمنية $$3x + 8y = 54, \qquad 4x^2 - 7xy - 6y = 82, \qquad 78x^5y^9 = 429$$

مسائل محلولة

النهايات والاستمرارية Limits and Continuity

9.1. استخدم قواعد النهايات لإيجاد النهايات للدوال التالية :

9.1. Use the rules of limits to find the limits for the following functions:

(*a*) $\lim_{x\to 3}[x^4(x+5)]$

القاعدة (5)
$$\lim_{x\to 3}[x^4(x+5)] = \lim_{x\to 3} x^4 \cdot \lim_{x\to 3}(x+5)$$
$$= (3)^4 \cdot (3+5) = 81 \cdot 8 = 648$$

(*b*) $\lim_{x\to 5} \dfrac{7x^2 - 9x}{x+8}$

القاعدة (6)
$$\lim_{x\to 5} \frac{7x^2 - 9x}{x+8} = \frac{\lim_{x\to 5}(7x^2 - 9x)}{\lim_{x\to 5}(x+8)}$$
$$= \frac{7(5)^2 - 9(5)}{5+8} = \frac{175 - 45}{13} = 10$$

(*c*) $\lim_{x\to 4} \sqrt{2x^3 - 7}$

القاعدة (7)
$$\lim_{x\to 4} \sqrt{2x^3 - 7} = \lim_{x\to 4}(2x^3 - 7)^{1/2}$$
$$= \left[\lim_{x\to 4}(2x^3 - 7)\right]^{1/2}$$
$$= [2(4)^3 - 7]^{1/2} = (121)^{1/2} = 11$$

9.2. أوجد نهايات الدوال كثيرة الحدود والدوال النسبية التالية :

9.2. Find the limits for the following polynomial and rational functions.

(*a*) $\lim_{x\to 4}(3x^2 - 5x + 9)$

مـن خصائص النهايات يمكن أن نثبت أن جميع الدوال كثيرة الحدود والدوال النسبية $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. ويمكننا الحصول على النهايات من خلال تقدير الدوال عند مستوى معين a .

$$\lim_{x\to 4}(3x^2-5x+9) = 3(4)^2-5(4)+9 = 37$$

(*b*) $\lim_{x\to -3}(6x^2+8x-13)$

$$\lim_{x\to -3}(6x^2+8x-13) = 6(-3)^2+8(-3)-13 = 17$$

(*c*) $\lim_{x\to 8}\dfrac{2x^2-3x-9}{4x^2+29}$

$$\lim_{x\to 8}\frac{2x^2-3x-9}{4x^2+29} = \frac{2(8)^2-3(8)-9}{4(8)^2+29} = \frac{95}{285} = \frac{1}{3}$$

9.3. أوجد نهايات الدوال النسبية التالية علمًا بأنه إذا كانت نهاية المقام تساوى صفــرًا فإنـه لا يمكـن تطبيـق القاعدة (6) والقاعدة العامة للدوال النسبية التى استخدمت أعلاه .

9.3. **Find the limits of the following rational functions, aware that if the limit of the denominator equals zero, neither Rule 6 nor the generalized rule for rational functions used above apply.**

(*a*) $\lim_{x\to 9}\dfrac{x-9}{x^2-81}$

نهاية المقام تساوى صفرًا ولذلك لا يمكن استخدام القاعدة (6) . وحيث أننا نهتم فقط بالدالة حينما تقترب x من 9 ، فإنه يمكن إيجاد النهاية إذا حلت مشكلة الصفر فى المقام من خلال تحليل العوامل ثم الحذف .

$$\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{x^2-81} = \lim_{x\to 9}\frac{x-9}{(x+9)(x-9)}$$
$$= \lim_{x\to 9}\frac{1}{x+9} = \frac{1}{18}$$

(*b*) $\lim_{x\to -9}\dfrac{x-9}{x^2-81}$

$$\lim_{x\to -9}\frac{x-9}{x^2-81} = \lim_{x\to -9}\frac{x-9}{(x+9)(x-9)}$$
$$= \lim_{x\to -9}\frac{1}{x+9}$$

نهاية المقام مازالت تساوى صفرًا ولا توجد إمكانية لمزيد من تحليل العوامل ولذلك فإن النهاية لا توجد .

(*c*) $\lim_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}$

وحيث نهاية المقام تساوى صفرًا فإننا نحلل الدالة .

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-3x-4}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{(x+1)(x-4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}(x+1) = 5$$

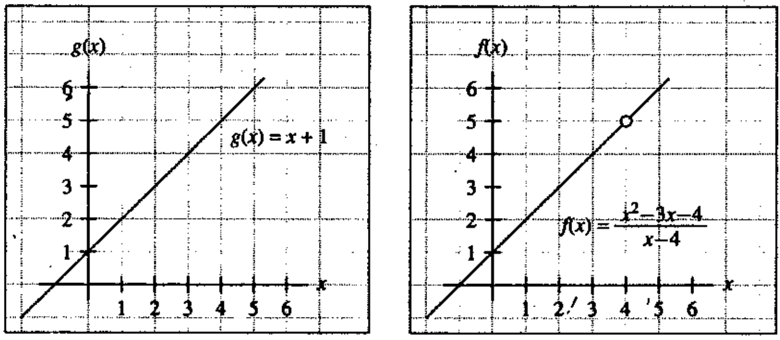
9.4. مثل بيانيًا الدوال التالية واشرح أهمية التمثيل البيانى بدلالة المسألة $(9.3)(c)$.

9.4. Graph the following functions and explain the significance of the graphs in terms of Problem 9.3 (c):

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} \qquad g(x) = x + 1$$

من الرسوم البيانية فى الشكل $(9\text{–}7)(a), (b)$ فإنه من الواضح أن $f(x)$ و $g(x)$ هما نفس الشيء ، أى أن $f(x)$ معرفة . وهذا يثبت التحليل فى المسألة $(9.3)(c)$ ويمكننا من القول :

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} = \lim_{x \to 4} (x + 1) = 5$$



(b) (a)

شكل (9–7)

9.5. أوجد نهايات الدوال التالية ولاحظ الدور الذى تؤديه مالانهاية .

9.5. Find the limits of the following functions, noting the role that infinity plays.

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{2}{x} \qquad (x \neq 0)$

وكما رأينا فى الشكل (2–3) عندما تقترب x من الصفر من اليمين $[x \to 0^+]$ فإن $f(x)$ تقترب من موجب مالانهاية ؛ وعندما تقترب x من الصفر من اليسار $[x \to 0^-]$ فإن $f(x)$ تقترب من عدد سالب مالانهاية . فإذا اقتربت النهاية من موجب أو سالب مالانهاية فإن النهاية لا توجد وتكتب :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x} = \infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{2}{x} = -\infty$$ النهاية غير موجودة

(b) $\lim_{x \to \infty} \frac{2}{x} \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x}$

وأيضًا كما رأينا فى الشكل (2–3) فعندما تقترب x من ∞ فإن $f(x)$ تقترب من الصفر ؛ وعندما تقترب x من $-\infty$ فإن $f(x)$ أيضًا تقترب من الصفر . النهاية توجد فى كل الحالات طالما أن الصفر هو نهاية صحيحة وتكتب :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

(c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{4x^2 - 9x}{5x^2 - 34}$

وعندما تؤول $x \to \infty$ فإن كلا من البسط والمقام يصبح لا نهائى تاركًا الأمور غير واضحة . والحل فى مثل هذه الظروف هى قسمة جميع الحدود على القوى الأكبر لـ x الذى يظهر فى الدالة ، وهنا بقسم جميع الحدود على x^2 نحصل على :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 - 9x}{5x^2 - 34} = \lim_{x\to\infty} \frac{4 - (9/x)}{5 - (34/x^2)} = \frac{4 - (0)}{5 - (0)} = \frac{4}{5}$$

9.6. حدد ما إذا كانت الدوال التالية مستمرة عند النقاط المعينة من خلال تحديد ما إذا كانت هذه النقاط تحقق جميع الشروط التالية من القسم 9.2: (1) إذا كانت $f(a)$ معرفة . (2) إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة . (3) وأن $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

9.6. Indicate whether the following functions are continuous at the specified points by determining whether at the given point all of the following conditions from Section 9.2 hold: (1) $f(a)$ is defined, (2) $\lim_{x\to a} f(x)$ exists, and (3) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

(a) $f(x) = 3x^2 - 7x + 4$ at $x = 5$

(1) $f(5) = 3(5)^2 - 7(5) + 4 = 44$

(2) $\lim_{x\to 5} 3x^2 - 7x + 4 = 3(5)^2 - 7(5) + 4 = 44$

(3) $\lim_{x\to 5} f(x) = 44 = f(5)$

$\therefore$ $f(x)$ دالة معتمرة

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 26}{x - 4}$ at $x = 3$

(1) $f(3) = \dfrac{(3)^2 + 5(3) + 26}{(3) - 4} = \dfrac{50}{-1} = -50$

(2) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 + 5x + 26}{x - 4} = -50$

(3) $\lim_{x\to 3} f(x) = -50 = f(3)$

$\therefore$ $f(x)$ دالة مستمرة

(c) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$ at $x = 2$

(1) $f(2) = \dfrac{2 - 2}{(2)^2 - 4}$

وحيث إن المقام يساوى صفرًا فإن $f(x)$ غير معرفة عند $x = 2$ ومن ثم فهى دالة غير مستمرة عند $x = 2$ بالرغم من أن لها نهاية عند $x = 2$. $\lim_{x\to a} f(x) = \frac{1}{4}$.

Derivative notation and Simple Derivatives رموز المشتقة والمشتقات البسيطة

9.7. فاضل كل من الدوال التالية مستخدمًا مختلف الرموز للمشتقة .

9.7. Differentiate each of the following functions and practice the use of the different notations for a derivative.

(a) $f(x) = 29$

$f'(x) = 0$ (قاعدة الثابت)

(b) $y = -18$

$\dfrac{dy}{dx} = 0$

(*c*) $y = 6x + 13$

$y' = 6$ (قاعدة الدالة الخطية)

(*d*) $f(x) = -7x + 2$

$f' = -7$

9.8. فاضل كل من الدوال التالية مستخدمًا قاعدة دالة القوى . واستخدم مختلفة الرموز .

9.8. Differentiate each of the following functions, using the power function rule. Continue to use the different notations.

(*a*) $y = 9x^4$

$$\frac{d}{dx}(9x^4) = 36x^3$$

(*b*) $f(x) = -5x^3$

$$f' = -15x^2$$

(*c*) $f(x) = 7x^{-2}$

$$f'(x) = 7(-2) \cdot x^{[-2-(1)]} = -14x^{-3} = -\frac{14}{x^3}$$

(*d*) $y = -8x^{-3}$

$$\frac{dy}{dx} = -8(-3) \cdot x^{[-3-(1)]} = 24x^{-4} = \frac{24}{x^4}$$

(*e*) $y = \dfrac{6}{x} = 6x^{-1}$

$$D_x(6x^{-1}) = 6(-1)x^{-2} = -6x^{-2} = -\frac{6}{x^2}$$

(*f*) $f(x) = 42\sqrt{x} = 42x^{1/2}$

$$\frac{df}{dx} = 42\left(\frac{1}{2}\right) \cdot x^{[1/2-1]} = 21x^{-1/2} = \frac{21}{\sqrt{x}}$$

9.9. استخدم قاعدة الجمع والطرح لتفاضل الدوال التالية . عامل المتغير التابع على اليسار مثل y والمتغير المستقل على اليمين مثل x .

9.9. Use the rule for sums and differences to differentiate the following functions. Simply treat the dependent variable on the left as y and the independent variable on the right as x.

(*a*) $R = 9t^2 + 7t - 4$

$$\frac{dR}{dt} = 18t + 7$$

(*b*) $C = 5t^3 - 8t^2 + 36t + 79$

$$C' = 15t^2 - 16t + 36$$

(*c*) $p = 6q^4 - 2q^3$

$$\frac{dp}{dq} = 24q^3 - 6q^2$$

(*d*) $q = 5p^3 + 16p^{-2}$

$$D_p(5p^3 + 16p^{-2}) = 15p^2 - 32p^{-3}$$

The Product Rule قاعدة الضرب

9.10. إذا أعطيت $y = f(x) = 6x^3(4x - 9)$. (*a*) استخدم قاعدة الضرب لإيجاد المشتقة . (*b*) اختصر الدالة الأصلية أولاً ثم أوجد المشتقة . (*c*) قارن بين المشتقتين .

9.10. Given $y = f(x) = 6x^3(4x - 9)$, (*a*) use the product rule to find the derivative. (*b*) Simplify the original function first and then find the derivative. (*c*) Compare the two derivatives.

(*a*) إن صيغة قاعدة الضرب من (9.3) هي :

$$f'(x) = g(x) \cdot h'(x) + h(x) \cdot g'(x)$$

نفترض أن $g(x) = 6x^3$ وأن $h(x) = 4x - 9$ ، ومن ثم فإن $g'(x) = 18x^2$ وأن $h'(x) = 4$ وبالتعويض بهذه القيم فى صيغة قاعدة الضرب :

$$y' = f'(x) = 6x^3(4) + (4x - 9)(18x^2)$$

وباختصار المقدار جبريًا :

$$y' = 24x^3 + 72x^3 - 162x^2 = 96x^3 - 162x^2$$

(*b*) اختصر الدالة الأصلية باستخدام الضرب

$$y = 6x^3(4x - 9) = 24x^4 - 54x^3$$

وبأخذ المشتقة

$$y' = 96x^3 - 162x^2$$

(*c*) المشتقات فى (*a*) و (*b*) متماثلة . ومشتقة حاصل الضرب يمكن أن توجد بأى من الطريقتين ولكن حينما تتعقد الدوال أكثر فإن قاعدة الضرب تصبح أكثر فائدة . ومعرفة الطريقة الأخرى تساعد على التأكد من الحلول .

9.11. Redo Problem 9.10, given.

9.11. أعد حل المسألة 9.10 . إذا أعطيت

$$y = f(x) = (x^6 + 4)(x^3 + 15)$$

(*a*) نفترض أن $g(x) = (x^6 + 4)$ وأن $h(x) = (x^3 + 15)$ ومن ثم فإن $g'(x) = 6x^5$ وأن $h'(x) = 3x^2$. وبالتعويض بهذه القيم فى (9.3) .

$$y' = f'(x) = (x^6 + 4)(3x^2) + (x^3 + 15)(6x^5)$$

$$y' = 3x^8 + 12x^2 + 6x^8 + 90x^5 = 9x^8 + 90x^5 + 12x^2$$

(*b*) اختصر أولاً من خلال الضرب .

$$y = (x^6 + 4)(x^3 + 15) = x^9 + 15x^6 + 4x^3 + 60$$

ومن ثم فإن

$$y' = 9x^8 + 90x^5 + 12x^2$$

(*c*) المشتقات طبعًا متماثلات .

9.12. فاضل كلاً من الدوال التالية باستخدام قاعدة الضرب .

9.12. Differentiate each of the following functions, using the product rule.

ملاحظة : اختيار المسائل البسيطة فى هذا القسم والأقسام الأخرى فى هذا الكتاب هدفه تمكين الطلبة ليروا كيف تطبق القواعد المختلفة . وحينما يمكن تبسيط الدالة جبريًا قبل إيجاد التفاضل ، ثم يتم تطبيق القاعدة المناسبة بدقة ، يساعد الطالب فى المدى الطويل على إتقان القواعد .

(*a*) $y = 7x^4(4x^2 - 10)$

$$\frac{dy}{dx} = 7x^4(8x) + (4x^2 - 10)(28x^3)$$

$$\frac{dy}{dx} = 56x^5 + 112x^5 - 280x^3 = 168x^5 - 280x^3$$

(*b*) $f(x) = (4x^3 + 1)(6x^5)$

$$\frac{df}{dx} = (4x^3 + 1)(30x^4) + 6x^5(12x^2)$$

$$\frac{df}{dx} = 120x^7 + 30x^4 + 72x^7 = 192x^7 + 30x^4$$

(*c*) $y = (5x^4 + 6)(2x^5 - 8)$

$$y' = (5x^4 + 6)(10x^4) + (2x^5 - 8)(20x^3)$$

$$y' = 50x^8 + 60x^4 + 40x^8 - 160x^3 = 90x^8 + 60x^4 - 160x^3$$

(*d*) $f(x) = (4 - 6x^5)(3 + 2x^8)$

$$f' = (4 - 6x^5)(16x^7) + (3 + 2x^8)(-30x^4)$$

$$f' = 64x^7 - 96x^{12} - 90x^4 - 60x^{12} = -156x^{12} + 64x^7 - 90x^4$$

قاعدة خارج القسمة Quotient Rule

9.13. Given

.9.13 إذا أعطيت

$$f(x) = \frac{18x^5 - 9x^4}{3x} \qquad (x \neq 0)$$

(*a*) أوجد المشتقة مباشرة باستخدام قاعدة خارج القسمة . (*b*) اختصر الدالة من خلال القسمة ثم أوجد المشتقة . (*c*) قارن بين المشتقتين .

(*a*) Find the derivative directly, using the quotient rule. (*b*) Simplify the function by division and then take its derivative. (*c*) Compare the two derivatives.

(*a*) من (9.4) فإن صيغة قاعدة خارج القسمة هى :

$$f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

حيث $g(x) =$ البسط $= 18x^5 - 9x^4$ وأن $h(x) =$ المقام $= 3x$ وبأخذ المشتقات الفردية

$$g'(x) = 90x^4 - 36x^3 \qquad h'(x) = 3$$

وبالتعويض فى الصيغة

$$f'(x) = \frac{3x(90x^4 - 36x^3) - (18x^5 - 9x^4)(3)}{(3x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{270x^5 - 108x^4 - 54x^5 + 27x^4}{9x^2} = \frac{216x^5 - 81x^4}{9x^2}$$

$$f'(x) = 24x^3 - 9x^2 = 3x^2(8x - 3)$$

(*b*) اختصر الدالة الأصلية أولاً بالقسمة :

$$f(x) = \frac{18x^5 - 9x^4}{3x} = 6x^4 - 3x^3$$

$$f'(x) = 24x^3 - 9x^2$$

(*c*) المشتقات سوف تكون دائمًا نفس الشيء إذا أجريت بشكل صحيح ولكن حينما تتعقد الدالة فإن

قاعدة خارج القسمة تصبح أكثر أهمية . والطريقة الثانية هى أيضًا طريقة مفيدة للتأكد من الحلول .

9.14. فاضل كل من الدوال التالية باستخدام قاعدة خارج القسمة . واستمر فى تطبيق القواعد للدوال كما أعطيت . وأخيرًا عندما تطبق كل القواعد فإن الدوال يمكن أن تختصر أولاً ثم تطبق القاعدة الأسهل .

9.14. Differentiate each of the following functions by means of the quotient rule. Continue to apply the rules to the functions as given. Later, when all the rules have been mastered, the functions can be simplified first and the easiest rule applied.

(*a*) $y = \dfrac{9x^7 - 8x^6}{5x^4} \qquad (x \neq 0)$

وهنا $g(x) = 9x^7 - 8x^6$ وأن $h(x) = 5x^4$ ومن ثم فإن $g'(x) = 63x^6 - 48x^5$ وأن $h'(x) = 20x^3$. وبالتعويض فى صيغة قاعدة خارج القسمة .

$$y' = \frac{5x^4(63x^6 - 48x^5) - (9x^7 - 8x^6)(20x^3)}{(5x^4)^2}$$

$$y' = \frac{315x^{10} - 240x^9 - 180x^{10} + 160x^9}{25x^8} = \frac{135x^{10} - 80x^9}{25x^8} = 5.4x^2 - 3.2x$$

(*b*) $y = \dfrac{6x^8}{1 - 4x} \qquad \left(x \neq \dfrac{1}{4}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - 4x)(48x^7) - 6x^8(-4)}{(1 - 4x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{48x^7 - 192x^8 + 24x^8}{(1 - 4x)^2} = \frac{48x^7 - 168x^8}{(1 - 4x)^2}$$

(*c*) $f(x) = \dfrac{10x^3}{4x^2 + 9x - 2} \qquad \left(x \neq \dfrac{-9 \pm \sqrt{113}}{8}\right)$

$$\frac{df}{dx} = \frac{(4x^2 + 9x - 2)(30x^2) - 10x^3(8x + 9)}{(4x^2 + 9x - 2)^2}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{120x^4 + 270x^3 - 60x^2 - 80x^4 - 90x^3}{(4x^2 + 9x - 2)^2} = \frac{40x^4 + 180x^3 - 60x^2}{(4x^2 + 9x - 2)^2}$$

(*d*) $f = \dfrac{5x - 4}{9x + 2} \qquad \left(x \neq -\dfrac{2}{9}\right)$

$$f' = \frac{(9x + 2)(5) - (5x - 4)(9)}{(9x + 2)^2}$$

$$f' = \frac{45x + 10 - 45x + 36}{(9x + 2)^2} = \frac{46}{(9x + 2)^2}$$

(*e*) $y = \dfrac{4x^2 + 7x - 9}{3x^2 - 5} \qquad \left(x \neq \pm\dfrac{\sqrt{15}}{3}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x^2 - 5)(8x + 7) - (4x^2 + 7x - 9)(6x)}{(3x^2 - 5)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{24x^3 + 21x^2 - 40x - 35 - 24x^3 - 42x^2 + 54x}{(3x^2 - 5)^2} = \frac{-21x^2 + 14x - 35}{(3x^2 - 5)^2}$$

The generalized Power Function Rule قاعدة دالة القوى العامة

9.15 إذا أعطيت $f(x) = (6x+7)^2$. (a) استخدم قاعدة دالة القوى العامة لإيجاد المشتقة . (b) اختصر الدالة أولاً من خلال تربيعها ثم أخذ المشتقة . (c) قارن بين الحلول .

9.15. Given $f(x) = (6x+7)^2$, (*a*) use the generalized power function rule to find the derivative. (*b*) Simplify the function first by squaring it and then taking the derivative. (*c*) Compare answers.

(a) من قاعدة دالة القوى العامة فى (9.5) إذا كانت $f(x) = [g(x)]^n$ فإن :

$$f'(x) = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

وهنا $g(x) = 6x+7$ وأن $g'(x) = 6$ و $n = 2$. وبالتعويض بهذه القيم فى قاعدة دالة القوى العامة .

$$f'(x) = 2(6x+7)^{2-1} \cdot 6 = 12(6x+7) = 72x+84$$

(b) ربع الدالة أولاً ثم أوجد المشتقة .

$$f(x) = (6x+7)(6x+7) = 36x^2+84x+49$$

$$f'(x) = 72x+84$$

(c) المشتقات متماثلة . وقاعدة دالة القوى العامة تكون أسرع وأكثر عملية فى حالة القيم الكسرية n ، المرتفعة والسالبة .

9.16. أوجد المشتقة لكل من الدوال التالية باستخدام قاعدة دالة القوى العامة .

9.16. Find the derivative for each of the following functions with the help of the generalized power function rule.

(*a*) $y = (3x^3+8)^5$

وهنا : $g(x) = (3x^3+8)$ ، $g'(x) = 9x^2$ ، $n = 5$. وبالتعويض فى قاعدة دالة القوى العامة .

$$y' = 5(3x^3+8)^{5-1} \cdot 9x^2$$

$$y' = 5(3x^3+8)^4 \cdot 9x^2 = 45x^2(3x^3+8)^4$$

(*b*) $y = (3x^2-5x+9)^4$

$$y' = 4(3x^2-5x+9)^3 \cdot (6x-5)$$

$$y' = (24x-20)(3x^2-5x+9)^3$$

(*c*) $y = \dfrac{1}{9x^3+11x+4}$

أولاً حول الدالة إلى صيغة مناسبة .

$$y = (9x^3+11x+4)^{-1}$$

ومن ثم استخدم قاعدة دالة القوى العامة

$$y' = -1(9x^3+11x+4)^{-2} \cdot (27x^2+11)$$

$$y' = -(27x^2+11)(9x^3+11x+4)^{-2}$$

$$y' = \frac{-(27x^2+11)}{(9x^3+11x+4)^2}$$

(*d*) $y = \sqrt{21 - 4x^3}$

حول الجذر إلى دالة قوى ثم فاضل .

$$y = (21 - 4x^3)^{1/2}$$

$$y' = \frac{1}{2}(21 - 4x^3)^{-1/2} \cdot (-12x^2)$$

$$y' = -6x^2(21 - 4x^3)^{-1/2} = \frac{-6x^2}{\sqrt{21 - 4x^3}}$$

(*e*) $y = \dfrac{1}{\sqrt{7x^2 + 66}}$

حول إلى صيغة مناسبة ثم أوجد المشتقة .

$$y = (7x^2 + 66)^{-1/2}$$

$$y' = -\frac{1}{2}(7x^2 + 66)^{-3/2} \cdot (14x) = -7x(7x^2 + 66)^{-3/2} = \frac{-7x}{(7x^2 + 66)^{3/2}} = \frac{-7x}{\sqrt{(7x^2 + 66)^3}}$$

Chain Rule قاعدة السلسلة

9.17. استخدم قاعدة السلسلة لإيجاد المشتقة dy/dx لكل من الدوال التالية وتحقق وحدك من كل حل بقاعدة دالة القوى العامة ولاحظ أن قاعدة دالة القوى العامة هى ببساطة استخدام خاص لقاعدة السلسلة .

9.17. Use the chain rule to find the derivative dy/dx for each of the following functions of a function. Check each answer on your own with the generalized power function rule, noting that the generalized power function rule is simply a specialized use of the chain rule.

(*a*) $y = (2x^5 + 9)^7$

افترض أن $y = u^7$ وأن $u = 2x^5 + 9$ ومن ثم فإن $dy/du = 7u^6$ وأن $du/dx = 10x^4$. ومن قاعدة السلسلة فى (9.6) .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

وبالتعويض

$$\frac{dy}{dx} = 7u^6 \cdot 10x^4 = 70x^4u^6$$

وحيث إن $u = 2x^5 + 9$ وبالتعويض مرة ثانية .

$$\frac{dy}{dx} = 70x^4(2x^5 + 9)^6$$

(*b*) $y = (6x + 1)^2$

افترض أن $y = u^2$ وأن $u = 6x + 1$ ومن ثم فإن $dy/du = 2u$ وأن $du/dx = 6$. وبالتعويض بهذه القيم فى قاعدة السلسلة .

$$\frac{dy}{dx} = 2u \cdot 6 = 12u$$

وبالتعويض بقيمة $u = (6x + 1)$.

$$\frac{dy}{dx} = 12(6x + 1) = 72x + 12$$

(*c*) $y = (7x^3 - 4)^5$

افترض أن $y = u^5$ وأن $u = 7x^3 - 4^5$ ومن ثم فإن $\frac{dy}{du} = 5u^4$ وأن $\frac{du}{dx} = 21x^2$.

$$\frac{dy}{dx} = 5u^4 \cdot 21x^2 = 105x^2u^4$$

وبالتعويض $u = (7x^3 - 4)$.

$$\frac{dy}{dx} = 105x^2(7x^3 - 4)^4$$

.9.18 أعد حل المسألة 9.17 . إذا أعطيت

9.18. Redo Problem 9.17, given

(*a*) $y = (x^2 + 5x - 8)^6$

نفترض أن $y = u^6$ وأن $u = x^2 + 5x - 8$ ومن ثم فإن $\frac{dy}{du} = 6u^5$ وأن $\frac{du}{dx} = 2x + 5$. وبالتعويض فى (9.6) .

$$\frac{dy}{dx} = 6u^5(2x + 5) = (12x + 30)u^5$$

ولكن $u = x^2 + 5x - 8$. وبالتعويض نجد أن .

$$\frac{dy}{dx} = (12x + 30)(x^2 + 5x - 8)^5$$

(*b*) $y = -4(x^2 - 3x + 9)^5$

نفترض أن $y = -4u^5$ وأن $u = x^2 - 3x + 9$ ومن ثم فإن $\frac{dy}{du} = -20u^4$ وأن $\frac{du}{dx} = 2x - 3$ وبالتعويض .

$$\frac{dy}{dx} = -20u^4(2x - 3) = (-40x + 60)u^4$$

$$\frac{dy}{dx} = (-40x + 60)(x^2 - 3x + 9)^4$$

مجموعة من القواعد Combination of Rules

.9.19 استخدم أى مجموعة من القواعد تكون ضرورية لإيجاد مشتقات الدوال التالية . لا تختصر الدوال الأصلية فى البداية .

9.19. Use whatever combination of rules is necessary to find the derivatives of the following functions. Do not simplify the original functions first. They are deliberately kept simple to facilitate the practice of the rules.

(*a*) $y = \frac{4x(3x - 1)}{2x - 5} \qquad \left(x \neq \frac{5}{2}\right)$

الدالة تتطلب استخدام قاعدة خارج القسمة مع استخدام قاعدة الضرب فى البسط . ابدأ بقاعدة خارج القسمة من (9.4) .

$$y' = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

حيث $g(x) = 4x(3x - 1)$ وأن $h(x) = 2x - 5$ وأن $h'(x) = 2$. استخدام قاعدة الضرب من (9.3) $g'(x)$.

$$g'(x) = 4x \cdot 3 + (3x - 1) \cdot 4 = 24x - 4$$

وبالتعويض بالقيم المناسبة فى قاعدة خارج القسمة

$$y' = \frac{(2x-5)(24x-4)-[4x(3x-1)]\cdot 2}{(2x-5)^2}$$

وباختصار المقدار جبريًا :

$$y' = \frac{48x^2-8x-120x+20-24x^2+8x}{(2x-5)^2} = \frac{24x^2-120x+20}{(2x-5)^2}$$

ملاحظة : للتأكد من هذا نفترض .

$$y = \frac{4x}{2x-5}\cdot(3x-1) \qquad\qquad y = 4x\cdot\frac{3x-1}{2x-5}$$

واستخدم قاعدة الضرب وخارج القسمة .

(b) $y = 5x(3x-4)^2$

الدالة تتطلب استخدام قاعدة الضرب وقاعدة دالة القوى العامة ونبدأ بقاعدة الضرب .

$$y' = g(x)\cdot h'(x) + h(x)\cdot g'(x)$$

حيث $g(x) = 5x$ ، $h(x) = (3x-4)^2$ ، $g'(x) = 5$. نستخدم قاعدة دالة القوى العامة لإيجاد $h'(x)$.

$$h'(x) = 2(3x-4)\cdot 3 = 6(3x-4) = 18x-24$$

وبالتعويض بالقيم المناسبة فى قاعدة الضرب

$$y' = 5x\cdot(18x-24) + (3x-4)^2\cdot(5)$$

وباختصار المقدار جبريًا :

$$y' = 90x^2-120x+5(9x^2-24x+16) = 135x^2-240x+80$$

(c) $y = (2x-7)\cdot\dfrac{4x+1}{3x+5} \qquad \left(x \neq -\dfrac{5}{3}\right)$

الدالة بحاجة إلى استخدام قاعدة خارج القسمة والضرب ونبدأ بقاعدة الضرب .

$$y' = g(x)\cdot h'(x) + h(x)\cdot g'(x)$$

حيث $g(x) = 2x-7$ ، $h(x) = (4x+1)/(3x+5)$ ، $g'(x) = 2$. ونستخدم قاعدة خارج القسمة لإيجاد $h'(x)$.

$$h'(x) = \frac{(3x+5)(4)-(4x+1)(3)}{(3x+5)^2} = \frac{17}{(3x+5)^2}$$

وبالتعويض بالقيم المناسبة فى قاعدة الضرب

$$y' = (2x-7)\cdot\frac{17}{(3x+5)^2} + \frac{4x+1}{3x+5}\cdot 2 = \frac{34x-119}{(3x+5)^2} + \frac{8x+2}{3x+5}$$

$$y' = \frac{34x-119+(8x+2)(3x+5)}{(3x+5)^2} = \frac{24x^2+80x-109}{(3x+5)^2}$$

ويمكن التأكد من هذا الحل بافتراض $y = \dfrac{(2x-7)(4x+1)}{(3x+5)}$ واستخدام قاعدة خارج القسمة والضرب .

(*d*) $y = \dfrac{(7x-3)^4}{(5x+9)} \qquad \left(x \neq -\dfrac{9}{5}\right)$

نبدأ بقاعدة خارج القسمة حيث $g(x) = (7x-3)^4$ ، $h(x) = 5x+9$ ، $h'(x) = 5$. وتستخدم قاعدة دالة القوى العامة لإيجاد $g'(x)$.

$$g'(x) = 4(7x-3)^3 \cdot 7 = 28(7x-3)^3$$

وبالتعويض بهذه القيم فى قاعدة خارج القسمة

$$y' = \frac{(5x+9)\cdot 28(7x-3)^3 - (7x-3)^4 \cdot 5}{(5x+9)^2}$$

$$y' = \frac{(140x+252)(7x-3)^3 - 5(7x-3)^4}{(5x+9)^2}$$

وللتأكد من هذا الحل يمكن أن نفترض أن $y = (7x-3)^4 . (5x+9)^{-1}$ ونستخدم قاعدة الضرب وقاعدة دالة القوى العامة .

(*e*) $y = \left(\dfrac{5x+4}{3x+2}\right)^2 \qquad \left(x \neq -\dfrac{2}{3}\right)$

نبدأ بقاعدة دالة القوى العامة

$$y' = 2\left(\frac{5x+4}{3x+2}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{5x+4}{3x+2}\right) \tag{9.7}$$

ومن ثم نستخدم قاعدة خارج القسمة

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{5x+4}{3x+2}\right) = \frac{(3x+2)(5) - (5x+4)(3)}{(3x+2)^2} = \frac{-2}{(3x+2)^2}$$

وبالتعويض بهذه القيمة فى (9.7)

$$y' = 2\left(\frac{5x+4}{3x+2}\right) \cdot \frac{-2}{(3x+2)^2} = \frac{-4(5x+4)}{(3x+2)^3} = \frac{-20x-16}{(3x+2)^3}$$

وللتأكد من هذا الحل نفترض أن $y = (5x+4)^2 . (3x+2)^{-2}$ ونستخدم قاعدة الضرب وقاعدة دالة القوى العامة .

9.20. فاضل كل من الدوال التالية مستخدمًا أى من القواعد الضرورية .

9.20. Differentiate each of the following, using whatever rules are necessary:

(*a*) $y = \dfrac{(4x^2-7)(6x+5)}{3x} \qquad (x \neq 0)$

وباستخدام قاعدة خارج القسمة وقاعدة الضرب

$$y' = \frac{3x[(4x^2-7)(6) + (6x+5)(8x)] - (4x^2-7)(6x+5)(3)}{(3x)^2}$$

وباختصار المقدار جبريًا :

$$y' = \frac{3x[24x^2 - 42 + 48x^2 + 40x] - 3[24x^3 + 20x^2 - 42x - 35]}{9x^2}$$

$$y' = \frac{144x^3 + 60x^2 + 105}{9x^2}$$

$(b)\quad f(x) = (9x+4)(2x-7)^4$

وباستخدام قاعدة الضرب وقاعدة دالة القوى العامة

$$f' = (9x+4)[4(2x-7)^3(2)] + (2x-7)^4(9)$$

وباختصار المقدار جبريًا :

$$f' = (9x+4)(8)(2x-7)^3 + 9(2x-7)^4$$

$$f' = (72x+32)(2x-7)^3 + 9(2x-7)^4$$

$(c)\quad y = \frac{12x+7}{(5x+2)^2} \qquad \left(x \neq -\frac{5}{2}\right)$

وباستخدام قواعد خارج القسمة ودالة القوى العامة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(5x+2)^2(12) - (12x+7)[2(5x+2)(5)]}{(5x+2)^4}$$

وباختصار المقدار جبريًا :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12(5x+2)^2 - (12x+7)(50x+20)}{(5x+2)^4} = \frac{-300x^2 - 350x - 92}{(5x+2)^4}$$

$(d)\quad f(x) = \left(\frac{4x-5}{3x+1}\right)^2 \quad \left(x \neq -\frac{1}{3}\right)$

وباستخدام قاعدة دالة القوى العامة وقاعدة خارج القسمة

$$\frac{df}{dx} = 2\left(\frac{4x-5}{3x+1}\right)\frac{(3x+1)(4) - (4x-5)(3)}{(3x+1)^2}$$

وباختصار المقدار جبريًا

$$\frac{df}{dx} = 2\left(\frac{4x-5}{3x+1}\right)\frac{19}{(3x+1)^2} = \frac{152x-190}{(3x+1)^3}$$

$(e)\quad y = (5x+6)\frac{3x}{8x-1} \qquad \left(x \neq -\frac{1}{8}\right)$

وباستخدام قاعدة الضرب وقاعدة خارج القسمة

$$D_y = (5x+6)\frac{(8x-1)(3) - 3x(8)}{(8x-1)^2} + \frac{3x}{8x-1}(5)$$

وباختصار المقدار جبريًا

$$D_y = (5x+6)\frac{(24x-3-24x)}{(8x-1)^2} + \frac{15x}{8x-1}$$

وبجمع الحدين واستخدام المقام المشترك $(8x-1)^2$

$$D_y = \frac{120x^2 - 30x - 18}{(8x-1)^2}$$

مشتقات الدرجة العليا Higher-Order derivatives

9.21. لكل من الدوال التالية : (1) أوجد مشتقة الدرجة الثانية . (2) وقدر هذه المشتقة عند $x = 3$. استخدم رموز الدرجة الثانية المختلفة .

9.21. For each of the following functions, (1) find the second-order derivative and (2) evaluate it at $x = 3$. Practice the use of the different second-order notations.

(*a*) $y = 10x^3 + 8x^2 + 19$

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 30x^2 + 16x$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 60x + 16$

(2) عند $x = 3$,

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 60(3) + 16 = 196$

(*b*) $f(x) = 3x^4 + 5x^3 + 6x$

(1) $f'(x) = 12x^3 + 15x^2 + 6$

$f''(x) = 36x^2 + 30x$

(2) عند $x = 3$,

$f''(3) = 36(3)^2 + 30(3) = 414$

(*c*) $f(x) = (4x - 1)(3x^2 + 2)$

(1) $f' = (4x - 1)(6x) + (3x^2 + 2)(4)$

$f' = 24x^2 - 6x + 12x^2 + 8$

$f' = 36x^2 - 6x + 8$

$f'' = 72x - 6$

(2) عند $x = 3$,

$f''(3) = 72(3) - 6$

$f''(3) = 210$

(*d*) $y = \dfrac{3x}{2x - 1}$

(1) $y' = \dfrac{(2x - 1)(3) - 3x(2)}{(2x - 1)^2}$

$y' = \dfrac{-3}{(2x - 1)^2}$

$y'' = \dfrac{(2x - 1)^2(0) - (-3)[2(2x - 1)(2)]}{(2x - 1)^4}$

$y'' = \dfrac{24x - 12}{(2x - 1)^4}$

(2) $y''(3) = \dfrac{24(3) - 12}{[2(3) - 1]^4}$

$y''(3) = \dfrac{60}{625} = \dfrac{12}{125}$

(*e*) $f(x) = (6x - 5)^3$

(1) $f' = 3(6x - 5)^2(6)$

$f' = 18(6x - 5)^2$

$f'' = 18[2(6x - 5)(6)] = 216(6x - 5)$

(2) $f''(3) = 216[6(3) - 5]$

$f''(3) = 216(13) = 2808$

9.22. لكل من الدوال التالية : (1) أوجد المشتقات المتتالية و (2) قدر هذه المشتقات عند $x = 2$.

9.22. For each of the following functions, (1) investigate the successive derivatives and (2) evaluate them at $x = 2$.

(*a*) $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 9x - 2$

(1) $f'(x) = 6x^2 + 14x + 9$

$f''(x) = 12x + 14$

$f'''(x) = 12$

$f^{(4)}(x) = 0$

(2) $f'(2) = 6(2)^2 + 14(2) + 9 = 61$

$f''(2) = 12(2) + 14 = 38$

$f'''(2) = 12$

$f^{(4)}(2) = 0$

(*b*) $y = (6x + 7)(3x - 8)$

(1) $y' = (6x + 7)(3) + (3x - 8)(6)$

$y' = 36x - 27$

$y'' = 36$

$y''' = 0$

(2) $y'(2) = 36(2) - 27$

$y'(2) = 45$

$y''(2) = 36$

$y'''(2) = 0$

(*c*) $f(x) = (8 - x)^4$

(1) $D_x = 4(8 - x)^3(-1) = -4(8 - x)^3$

$D_x^2 = -12(8 - x)^2(-1) = 12(8 - x)^2$

$D_x^3 = 24(8 - x)(-1) = -24(8 - x)$

$D_x^4 = -24(-1) = 24$

$D_x^5 = 0$

(2) $D_x(2) = -4(6)^3 = -864$

$D_x^2(2) = 12(6)^2 = 432$

$D_x^3(2) = -24(6) = -144$

$D_x^4(2) = 24$

$D_x^5(2) = 0$

Derivation of the Rules of Differentiation اشتقاق قواعد التفاضل

9.23. إذا أعطيت $f(x) = g(x) + h(x)$ حيث إن $g(x)$ و $h(x)$. دوال قابلة للتفاضل ، أثبت قاعدة الجمع من خلال توضيح أن $f'(x) = g'(x) + h'(x)$.

9.23. Given $f(x) = g(x) + h(x)$, where $g(x)$ and $h(x)$ are both differentiable functions, prove the rule of sums by demonstrating that $f'(x) = g'(x) + h'(x)$.

من (9.2) فإن مشتقة $f(x)$ هي :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

وبالتعويض $f(x) = g(x) + h(x)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[g(x + \Delta x) + h(x + \Delta x)] - [g(x) + h(x)]}{\Delta x}$$

وبإعادة ترتيب الحدود

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x) + h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

أفصل الحدود ثم خذ النهايات

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

9.24. إذا أعطيت $f(x) = g(x) . h(x)$ حيث إن $g'(x)$ و$h'(x)$ موجودتين . أثبت أن قاعدة الضرب من خلال توضيح أن $f'(x) = g(x) . h'(x) + h(x) . g'(x)$.

9.24. Given $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, where $g'(x)$ and $h'(x)$ both exist, prove the product rule by demonstrating that $f'(x) = g(x) \cdot h'(x) + h(x) \cdot g'(x)$.

من (9.2) فإن مشتقة $f(x)$ هي :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

وبالتعويض $f(x) = g(x) . h(x)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) \cdot h(x+\Delta x) - g(x) \cdot h(x)}{\Delta x}$$

اطرح واجمع $g(x+\Delta x) . h(x)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)h(x+\Delta x) - g(x+\Delta x)h(x) + g(x+\Delta x)h(x) - g(x)h(x)}{\Delta x}$$

حلل جزئيًا $g(x+\Delta x)$ و $h(x)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)[h(x+\Delta x) - h(x)] + h(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)[h(x+\Delta x) - h(x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} h(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = g(x) \cdot h'(x) + h(x) \cdot g'(x)$$

9.25. إذا أعطيت $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ حيث $g'(x)$ و $h'(x)$ موجودتين وأن $h(x) \neq 0$. أثبت قاعدة خارج القسمة من خلال توضيح أن :

9.25. Given $f(x) = g(x)/h(x)$, where $g'(x)$ and $h'(x)$ both exist and $h(x) \neq 0$, prove the quotient rule by demonstrating

$$f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

نبدأ بالدالة $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ حيث :

$$g(x) = f(x) \cdot h(x)$$

ثم نوجد مشتقة $g(x)$ باستخدام قاعدة الضرب :

$$g'(x) = f(x) \cdot h'(x) + h(x) \cdot f'(x)$$

ونحلل جبريًا بالنسبة $f'(x)$

$$h(x) \cdot f'(x) = g'(x) - f(x) \cdot h'(x)$$

$$f'(x) = \frac{g'(x) - f(x) \cdot h'(x)}{h(x)}$$

وبالتعويض $\frac{g(x)}{h(x)}$ بالنسبة لـ $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{g'(x) - [g(x) \cdot h'(x)/h(x)]}{h(x)}$$

وبضرب كل من البسط والمقام فى $h(x)$.

$$f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

مسائل إضافية

النهايات Limits

9.26. Find the limits of the following functions:

9.26. أوجد نهايات الدوال التالية:

(*a*) $\lim_{x \to 6} (5x^2 - 2x - 18)$ (*b*) $\lim_{x \to -3} (4x^2 + 9x - 5)$

(*c*) $\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 4x + 6}{x^2 + 8x - 15}$ (*d*) $\lim_{x \to -4} \frac{7x^2 - 12}{8x^2 + 3x + 4}$

(*e*) $\lim_{x \to 5} \sqrt{x^3 + 9x - 1}$ (*f*) $\lim_{x \to -9} \sqrt[3]{2x^2 + 5x + 8}$

9.27. أوجد النهايات لكل من الدوال التالية عندما تقترب نهاية المقام من الصفر .

9.27. Find the limits of each of the following functions in which the limit of the denominator approaches zero:

(*a*) $\lim_{x \to -12} \frac{x + 12}{x^2 - 144}$ (*b*) $\lim_{x \to 7} \frac{x - 7}{2x^2 - 98}$

(*c*) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 11x + 30}{x - 5}$ (*d*) $\lim_{x \to 8} \frac{x^2 + 7x - 120}{x - 8}$

9.28. Find the limits of each of the following functions:

9.28. أوجد النهايات كل من الدوال التالية:

(*a*) $\lim_{x \to \infty} \frac{7x - 22}{21x + 8}$ (*b*) $\lim_{x \to \infty} \frac{8x^2 - 49}{3x^3 + 16}$

(*c*) $\lim_{x \to \infty} \frac{9x^2 - 4x + 2}{4x^2 + 6x - 7}$ (*d*) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^4 - 9}{x^3 + 8}$

المشتقات Derivatives

9.29. أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال التالية

9.29. Find the first derivative for each of the following functions:

(*a*) $y = 6x^5$ (*b*) $f(x) = 2x + 9$ (*c*) $f(x) = 17$

(*d*) $y = 8x^3 + 4x^2 + 9x + 3$ (*e*) $y = 6x^{-4}$ (*f*) $f(x) = -7x^{-2}$

(*g*) $y = 18x^{1/3}$ (*h*) $f(x) = 5x^{-1/2}$

ولكن نسهل التمكن من القواعد الأساسية للتفاضل ، طبق القاعدة أو القواعد المناسبة كما هى على التمارين المتبقية من هذا الباب بدون محاولة الاختصار الجبرى .

Product Rule قاعدة الضرب

9.30. استخدم قاعدة الضرب لتفاضل كل من الدوال التالية :

9.30. Use the product rule to differentiate each of the following functions:

(*a*) $f(x) = (8x-9)(4x^5)$ (*b*) $f(x) = 12x^3(7x+3)$

(*c*) $y = (6x^2+11)(9x^3-4)$ (*d*) $y = (15-8x^4)(6x^6-5)$

Quotient Rule قاعدة خارج القسمة

9.31. فاضل كل من الدوال التالية مستخدمًا قاعدة خارج القسمة :

9.31. Differentiate each of the following functions, using the quotient rule:

(*a*) $y = \dfrac{22x^4-15}{8x-1}$ (*b*) $y = \dfrac{8x^6}{3x+5}$

(*c*) $y = \dfrac{5x^3}{6x^2-7x+2}$ (*d*) $y = \dfrac{8x^2+3x-9}{7x^2-4}$

Generalized Power Function Rule قاعدة دالة القوى العامة

9.32. استخدم قاعدة دالة القوى العامة لتفاضل كل من الدوال التالية :

9.32. Use the generalized power function rule to differentiate each of the following functions:

(*a*) $f(x) = (9x-4)^5$ (*b*) $f(x) = (7x^3+6)^4$

(*c*) $f(x) = \dfrac{1}{(3x^2-11)^2} = (3x^2-11)^{-2}$

(*d*) $f(x) = \dfrac{-50}{6x^2-4x-9} = -50(6x^2-4x-9)^{-1}$

(*e*) $f(x) = \sqrt{14x^4-45} = (14x^4-45)^{1/2}$

(*f*) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{22-9x^6}} = (22-9x^6)^{-1/2}$

Chain Rule قاعدة السلسلة

9.33. قاعدة السلسلة لإيجاد المشتقة الأولى لكل من الدوال التالية :

9.33. Using the chain rule, find the first derivative of each of the following functions:

(*a*) $y = (6x^4-35)^8$ (*b*) $y = (27-8x^3)^5$

(*c*) $f(x) = (18x^2+23)^{1/3}$ (*d*) $f(x) = (122x^3-49)^{-4}$

Combination of Rules مجموعة من القواعد

9.34. فاضل كل من الدوال التالية مستخدمًا مجموعة من القواعد :

9.34. Differentiate each of the following functions using whatever combination of rules is necessary.

(*a*) $y = 5x^2(4x-9)^3$ (*b*) $y = \dfrac{6x(x^2+7)}{4x+1}$

(*c*) $f(x) = \dfrac{(8x-5)^3}{3x+2}$ (*d*) $f(x) = (7x-4)(3x+8)^4$

Higher-Order Derivatives مشتقات الدرجة العليا

9.35. أوجد المشتقات المتتالية لكل من الدوال التالية :

9.35. Find the successive derivatives of each of the following functions:

(*a*) $y = 3x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 13$ (*b*) $y = (8x+9)(10x-3)$

(*c*) $f(x) = (6x-7)^4$ (*d*) $f(x) = (5-2x)^4$

حل المسائل الإضافية

9.26. (*a*) 150 (*b*) 4 (*c*) 2 (*d*) $\frac{5}{6}$ (*e*) 13 (*f*) 5

9.27. (*a*) $-\frac{1}{24}$ (*b*) $\frac{1}{28}$ (*c*) -1 (*d*) 23

9.28. (*a*) $\frac{1}{3}$ (*b*) 0 (*c*) 2.25 (*d*) النهاية غير موجودة

9.29. (*a*) $y' = 30x^4$ (*b*) $f' = 2$ (*c*) $f' = 0$ (*d*) $y' = 24x^2 + 8x + 9$

(*e*) $y' = -24x^{-5}$ (*f*) $f' = 14x^{-3}$ (*g*) $y' = 6x^{-2/3}$ (*h*) $f' = -2.5x^{-3/2}$

9.30. (*a*) $f' = 192x^5 - 180x^4$ (*b*) $f' = 336x^3 + 108x^2$

(*c*) $y' = 270x^4 + 297x^2 - 48x$ (*d*) $y' = -480x^9 + 540x^5 + 160x^3$

9.31. (*a*) $y' = \dfrac{528x^4 - 88x^3 + 120}{(8x-1)^2}$ (*b*) $y' = \dfrac{120x^6 + 240x^5}{(3x+5)^2}$

(*c*) $y' = \dfrac{30x^4 - 70x^3 + 30x^2}{(6x^2 - 7x + 2)^2}$ (*d*) $y' = \dfrac{-21x^2 + 62x - 12}{(7x^2 - 4)^2}$

9.32. (*a*) $f' = 45(9x-4)^4$ (*b*) $f' = 84x^2(7x^3+6)^3$

(*c*) $f' = -12x(3x^2 - 11)^{-3} = \dfrac{-12x}{(3x^2 - 11)^3}$

(*d*) $f' = (600x - 200)(6x^2 - 4x - 9)^{-2} = \dfrac{600x - 200}{(6x^2 - 4x - 9)^2}$

(*e*) $f' = 28x^3(14x^4 - 45)^{-1/2} = \dfrac{28x^3}{\sqrt{14x^4 - 45}}$

(*f*) $f' = 27x^5(22 - 9x^6)^{-3/2} = \dfrac{27x^5}{\sqrt{(22 - 9x^6)^3}}$ or $\dfrac{27x^5}{\left(\sqrt{22 - 9x^6}\right)^3}$

9.33. (*a*) $y' = 192x^3(6x^4 - 35)^7$ (*b*) $y' = -120x^2(27 - 8x^3)^4$

(*c*) $f'(x) = 12x(18x^2 + 23)^{-2/3} = \dfrac{12x}{\sqrt[3]{(18x^2 + 23)^2}}$ or $\dfrac{12x}{\left(\sqrt[3]{18x^2 + 23}\right)^2}$

(*d*) $f'(x) = -1464x^2(122x^3 - 49)^{-5} = \dfrac{-1464x^2}{(122x^3 - 49)^5}$

9.34. (*a*) $y' = 60x^2(4x-9)^2 + 10x(4x-9)^3$

(*b*) $y' = \dfrac{48x^3 + 18x^2 + 42}{(4x+1)^2}$

(*c*) $f'(x) = \dfrac{(72x + 48)(8x-5)^2 - 3(8x-5)^3}{(3x+2)^2}$

(*d*) $f'(x) = (84x - 48)(3x+8)^3 + 7(3x+8)^4$

9.35. (*a*) $y' = 12x^3 - 15x^2 + 16x - 7$

$y'' = 36x^2 - 30x + 16$

$y''' = 72x - 30$

$y^{(4)} = 72$

$y^{(5)} = 0$

(*b*) $y' = 160x + 66$

$y'' = 160$

$y''' = 0$

(*c*) $f'(x) = 24(6x - 7)^3$

$f''(x) = 432(6x - 7)^2$

$f'''(x) = 5184(6x - 7)$

$f^{(4)}(x) = 31,104$

$f^{(5)}(x) = 0$

(*d*) $f'(x) = -8(5 - 2x)^3$

$f''(x) = 48(5 - 2x)^2$

$f'''(x) = -192(5 - 2x)$

$f^{(4)}(x) = 384$

$f^{(5)}(x) = 0$

الفصل العاشر

حساب التفاضل : استخدامات المشتقة

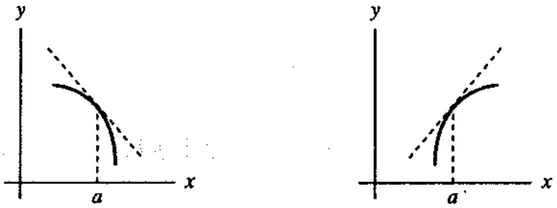
Differential Calculus : Uses of the Derivative

10.1 الدوال المتزايدة والمتناقصة Increasing and Decreasing Functions

يقال أن الدالة $f(x)$ متزايدة (متناقصة) عند النقطة $x=a$ إذا ارتفع (انخفض) فى المنطقة المجاورة للنقطة $[a,f(a)]$ ـ منحنى الدالة عندما تتحرك من اليسار إلى اليمين . وطالما أن المشتقة تقيس كل من معدل التغير وميل الدالة فإن المشتقة الأولى الموجبة تقيس كل من معدل التغير وميل الدالة فإن المشتقة الأولى الموجبة عند $x=a$ تحدد أن الدالة متزايدة عند $x=a$ وأن المشتقة الأولى السالبة تحدد أن الدالة متناقصة . وباختصار كما نرى من الشكل (1–10) .

دالة متزايدة عند $x=a$: $f'(a)>0$

دالة متناقصة عند $x=a$: $f'(a)<0$



0 < الميل
دالة تناقصية عند $x=a$
(*a*)

0 > الميل
دالة تزايدية عند $x=a$
(*b*)

شكل (1–10)

الدالة التى تتزايد (أو تتناقص) طوال مجالها تسمى دالة مطردة "Monotonic Function" . وهذا يعنى أنها تتزايد (تتناقص) على نحو مماثل أى على رتيبة واحدة . انظر المسائل من 10.1 إلى 10.3 .

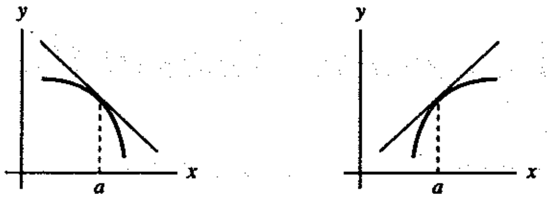
10.2 التقعر والتحدب Concavity and Convexity

يقال أن الدالة $f(x)$ مقعرة عند $x=a$ إذا وقع ـ وفى بعض المناطق قريب من النقطة $[a, f(a)]$ ـ منحنى الدالة بالكامل أسفل خط المماس . ويقال بأن الدالة $f(x)$ محدبة عند $x=a$ إذا وقع ـ وفى منطقة قريبة من النقطة $[a,f(a)]$ ـ منحنى الدالة بالكامل فوق خط المماس . فالمشتقة الثانية الموجبة عند $x=a$ توضح أن الدالة محدبة عند $x=a$ والمشتقة الثانية السالبة عند $x=a$ توضح أن الدالة مقعرة عند $x=a$. إن إشارة المشتقة الأولى غير مناسبة للتقعر . وباختصار كما نرى فى الشكل (2–10) والمسائل من 10.1 إلى 10.4 .

$f''(a) < 0$: $\quad$ $x = a$ مقعرة عند $f(x)$

$f''(a) > 0$: $\quad$ $x = a$ محدبة عند $f(x)$

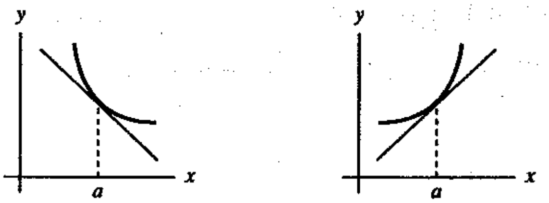
إذا كان $f''(a) < 0$ عند كل نقطة فى المجال ، فإن الدالة $f(x)$ مقعرة تامة وإذا كان $f''(a) > 0$ عند كل نقطة فى المجال ، فإن الدالة $f(x)$ محدبة تامة .



(a) $f'(a) > 0$
$f''(a) < 0$

(b) $f'(a) < 0$
$f''(a) < 0$

مقعرة عند $x = a$



(c) $f'(a) > 0$
$f''(a) > 0$

(d) $f'(a) < 0$
$f''(a) > 0$

محدبة عند $x = a$

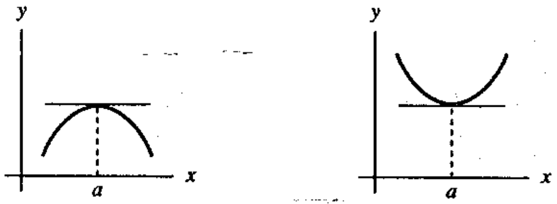
شكل (2–10)

10.3 النهايات النسبية Relative Extrema

النهاية النسبية أو المحلية Local هى النقطة التى تصل عندها الدالة إلى نهاية عظمى نسبية أو نهاية صغرى نسبية . ولكى يكون للدالة نهاية عظمى نسبية أو نهاية صغرى نسبية عند النقطة a فإن الدالة يجب أن تكون فى حالة استقرار نسبى . أى ليست متزايدة أو متناقصة . فإذا لم تكن الدالة متناقصة أو متزايدة عند a فإن المشتقة الأولى للدالة عند a يجب أن تساوى صفرًا أو تكون غير محددة . والنقطة فى مجال الدالة والتى عندها المشتقة تساوى صفرًا أو غير محددة تسمى النقطة الحرجة أو القيمة الحرجة .

ومن أجل التمييز رياضيًا بين النهايات العظمى والصغرى النسبية فيستخدم اختبار المشتقة الثانية . افترض أن $f'(a) = 0$.

1. إذا كانت $f''(a) > 0$ فهذا يعنى أن الدالة محدبة وأن منحنى الدالة يقع بالكامل أعلى خط المماس عند $x = a$ وأن الدالة يجب أن تكون عند نهاية صغرى عند $x = a$ كما نرى من الشكل $10\text{–}3(a)$.
2. إذا كانت $f''(a) < 0$ فهذا يوضح أن الدالة مقعرة وأن منحنى الدالة يقع بالكامل أسفل خط المماس عند $x = a$ وأن الدالة يجب أن تكون عند نهاية عظمى عند $x = a$ كما نرى من الشكل $10\text{–}3(b)$.
3. إذا كانت $f''(a) = 0$ فإن الاختبار لا يعطى نتيجة حاسمة .



$f'(a) = 0$
$f''(a) > 0$
نهاية عظمى نسبية عند $x = a$
(*a*)

$f'(a) = 0$
$f''(a) < 0$
نهاية صغرى نسبية عند $x = a$
(*b*)

شكل (10–3)

الدوال التى تكون قابلة للتفاضل عند جميع قيم x تسمى دوال قابلة للتفاضل أو دوال ملساء "differential or Smooth Functions" حيث نتعامل معها فى الإدارة والاقتصاد . وسنحتاج فقط إلى الحالات التى تكون عندها $f'(x) = 0$ من أجل البحث عن النقاط الحرجة . وباختصار :

نهاية صغرى نسبية عند $x = a$ $\quad f'(a) = 0, \quad f''(a) > 0$

نهاية عظمى نسبية عند $x = a$ $\quad f'(a) = 0, \quad f''(a) < 0$

انظر المثال 1 والمسائل من 10.5 إلى 10.6 .

مثال 1 : ضع فى الذاكرة أن (*a*) المشتقة الثانية الموجبة (+ +) عند النقطة الحرجة تعنى أن الدالة تتحرك إلى أعلى من وضع مستقر (◡) و (*b*) أن المشتقة الثانية السالبة (– –) عند النقطة الحرجة تعنى أن الدالة تتحرك إلى اسفل من وضع مستقر (◠) ولكى يظل فى الذاكرة تذكر القاعدة المبينة فى الشكل (10–4) .

EXAMPLE 1. Keeping in mind that (*a*) a positive second derivative (++) at a critical point means that the function is moving up from a plateau (◡) and (*b*) a negative second derivative (– –) at a critical point means that the function is moving down from a plateau (◠), a simple mnemonic to remember the rule is presented in Fig. 10-4.

(*a*) نهاية صغرى

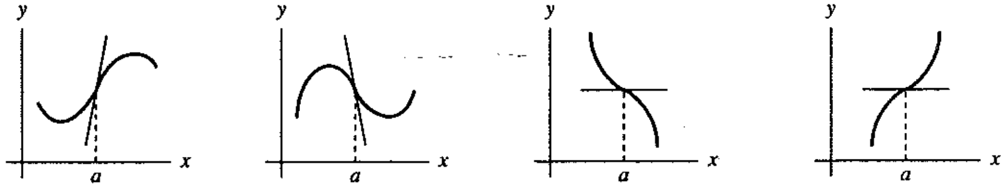
(*b*) نهاية عظمى

شكل (10–4)

10.4 نقاط التحول Inflection Points

نقطة التحول هى نقطة على المنحنى تقطع عندها الدالة خط المماس وتتغير من مقعرة إلى محدبة والعكس بالعكس . ونقاط التحول ممكنة فقط عندما تكون المشتقة الثانية مساوية صفر أو غير محددة . وتكون إشارة المشتقة الأولى غير مهمة . وباختصار فلنقطة التحول عند a كما نرى فى الشكل (10–5) .

1. $f''(a) = 0$ أو غير محددة .
2. التقعر يتغير عند $x = a$.
3. المنحنى يقطع خط المماس عند $x = a$.



$f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ (a)

$f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ (b)

$f'(a) < 0$, $f''(a) = 0$ (c)

$f'(a) > 0$, $f''(a) = 0$ (d)

نقاط التحول عند $x = a$

شكل (10-5)

انظر أيضًا المثال 2 والمسائل 10.7 و 10.9 و 10.14 .

10.5 مخطط (رسم) المنحنى Curve Sketching

توفر المشتقات الأولى والثانية معلومات مفيدة عن الشكل العام للمنحنى وتسهل عملية الرسم البيانى . فالدالة المعقدة نسبيًا يمكن عمل مخطط لها بعدد قليل من الخطوات . فإذا أعطيت $f(x)$ قابلة للتفاضل .

1. ابحث عن أى نهاية نسبية من خلال البحث عن النقاط التى عندها المشتقة الأولى تساوى $(f(x) = 0)$.
2. حدد التقعر عند النقطة الحرجة من خلال اختبار إشارة المشتقة الثانية للتمييز بين النهاية العظمى النسبية $(f''(a) < 0)$ والنهاية الصغرى النسبية $(f''(a) > 0)$.
3. تأكد من نقاط التحول حيث $f''(a) = 0$ أو $f''(x)$ غير محددة وأن التقعر يتغير .

مثال 2 : الدالة $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 + 45x$ أعد لها هيكل تخطيطى أدناه باستخدام الإجراءات السابقة فى القسم 10.5 .

EXAMPLE 2. The function $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 + 45x$ is sketched below using the procedure outlined above in Section 10.5.

(a) نوجد المشتقة الأولى :

$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 45$$

وبوصفها مساوية للصفر ونوجد قيمة x

$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 45 = 0$$

وبتحليل العوامل

$$-3(x^2 - 2x - 15) = 0$$

$$(x + 3)(x - 5) = 0$$

$$x = -3 \qquad x = 5 \qquad \text{النقاط الحرجة}$$

(b) نوجد المشتقة الثانية ونحسب قيمتها عند النقاط الحرجة ونجرى اختبار التقعر من خلال فحص الإشارات .

$$f''(x) = -6x + 6$$

$f''(-3) = -6(-3) + 6 = 24 > 0$ محدبة ونهاية صغرى نسبية

$f''(5) = -6(5) + 6 = -24 < 0$ مقعرة ونهاية عظمى نسبية

(c) نبحث عن نقاط التحول عند $f''(x) = 0$ والتقعر يتغير .

$$f''(x) = -6x + 6 = 0$$

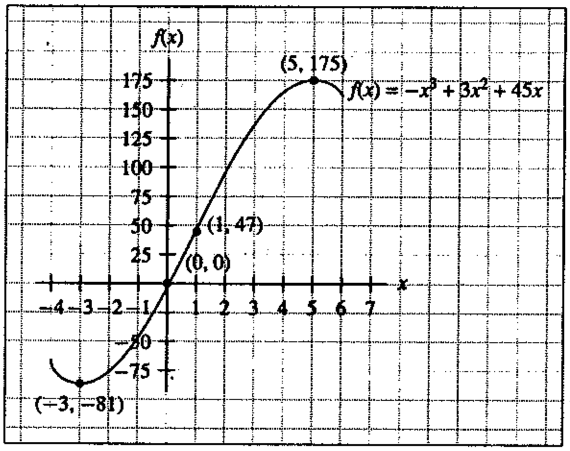
$$x = 1$$

مع $f''(x) = 0$ عند $x = 1$ وأن الدالة تتغير من محدبة عند $x = -3$ إلى مقعرة عند $x = 5$ وتظهر نقطة التحول عند $x = 1$.

(d) نحسب قيمة $f(x)$ عند $x = -3$ و $x = 1$ و $x = 5$ والمنحنى مبين فى الشكل (10–6) .

$$\begin{aligned} f(-3) &= -(-3)^3 + 3(-3)^2 + 45(-3) = -81 \\ f(1) &= -(1)^3 + 3(1)^2 + 45(1) = 47 \\ f(5) &= -(5)^3 + 3(5)^2 + 45(5) = 175 \end{aligned}$$

انظر المسائل من 10.6 إلى 10.14 .



شكل (10–6)

10.6 أمثلية الدوال Optimization of Functions

الأمثلية هى عملية تحديد النهايات العظمى والصغرى النسبية للدالة . وبدون مساعدة الرسم البيانى فإن هذه العملية تتم باستخدام الطرق فى الأقسام 10.3 إلى 10.5 والمبينة أدناه . إذا أعطيت الدالة العادية القابلة للتفاضل .

1. نوجد المشتقة الأولى ونضعها مساوية للصفر ونوجد النقاط الحرجة . وهذه الخطوة تعرف بشرط الرتبة الأولى وهذا شرط ضرورى .
2. نوجد المشتقة الثانية ونحسب قيمتها عند النقاط الحرجة ونفحص الإشارات . إذا كانت عند النقطة الحرجة a :

$f''(a) > 0$: محدبة ونهاية صغرى نسبية

$f''(a) < 0$: مقعرة ونهاية عظمى نسبية

$f''(a) = 0$: الاختبار غير حاسم

وهذه الخطوة ـ اختبار المشتقة الثانية ـ تعرف بشرط الرتبة الثانية وهذا شرط كافى . وعمومًا :

النهاية الصغرى النسبية	النهاية العظمى النسبية
$f'(a)=0$	$f'(a)=0$
$f''(a)>0$	$f''(a)<0$

انظر المثال 3 والمسائل 10.15 و 10.16 .

مثال 3 : لإيجاد أمثلية : **EXAMPLE 3.** To optimize $f(x)=3x^3-54x^2+288x-22,$

(*a*) نوجد النقاط الحرجة عن طريق إيجاد المشتقة الأولى ونضعها مساوية للصفر ونوجد قيمة x .

$$f'(x)=9x^2-108x+288=0$$

$$9(x-4)(x-8)=0$$

النقاط الحرجة $x=8 \qquad x=4$

(*b*) نجرى اختبار التقعر عن طريق إيجاد المشتقة الثانية وحساب قيمتها عند النقاط الحرجة ونفحص الإشارات للتمييز بين النهايات الصغرى والعظمى النسبية .

$$f''(x)=18x-108$$

مقعرة ، نهاية عظمى نسبية $f''(4)=18(4)-108=-36<0$

محدبة ، نهاية صغرى نسبية $f''(8)=18(8)-108=36>0$

فالدالة تعظم عند $x=4$ وتصغر عند $x=8$.

10.7 اختبار المشتقة المتتالى The successive-Derivative Test

اختبار المشتقة الثانية سيكون غير حاسم للدوال مثل تلك المبينة فى الشكل (10–5)(*a*), (*b*) حيث تظهر نقاط التحول عند القيم الحرجة . فى الحالة التى تكون فيها $f''(a)=0$ وبدون رسم بيانى كدليل يطبق اختبار المشتقة المتتالى .

1. إذا كان العدد غير الصفرى الأول لمشتقة الرتبة العليا عندما نحسب قيمتها عند النقطة الحرجة عدد فردى (odd-numbered) (ثلاثة ، خمسة ... إلخ) فتكون الدالة عند نقطة التحول . انظر المسائل 10.7 و 10.9 و 10.14 .
2. إذا كان العدد غير الصفرى الأول لمشتقة الرتبة العليا عندما نحسب قيمتها عند النقطة الحرجة عدد زوجى (even-numbered) فتكون الدالة عند نهاية نسبية . فالقيمة الموجبة لهذه المشتقة تشير إلى نهاية صغرى نسبية والقيمة السالبة تشير إلى نهاية عظمى نسبية . انظر المسائل 10.6 و 10.8 و 10.13 و 10.16 .

10.8 المفاهيم الحدية فى الاقتصاد Marginal Concepts in Economics

يعرف الإيراد الحدى فى الاقتصاد بأنه التغير فى الإيراد الكلى الناتج عن بيع سلعة إضافية واحدة . أما التكلفة الحدية فتعرف بأنها التغير فى التكلفة الكلية الناجمة عن إنتاج وحدة إضافية . وطالما أن الإيراد الكلى TR والتكلفة الكلية TC دوال فى مستويات الناتج *Q* فإن الإيراد الحدى MR والتكلفة الحدية MC يمكن أن نعبر

عن كل منهما رياضيًا كمشتقات للدوال الكلية :

إذا أعطيت : $\text{TR} = \text{TR}(Q), \quad \text{MR} = \dfrac{d\text{TR}}{dQ}$

إذا أعطيت : $\text{TC} = \text{TC}(Q), \quad \text{MC} = \dfrac{d\text{TC}}{dQ}$

وباختصار فإن التعبير الرياضى الحدى لأى دالة اقتصادية يمكن كتابته كمشتقة للدالة الكلية .

مثال 4 : إذا كانت : $TC = Q^2 + 5Q + 72$ فإن :

EXAMPLE 4. If $TC = Q^2 + 5Q + 72$, then

$$MC = \frac{d\text{TC}}{dQ} = 2Q + 5$$

وإذا كانت : $\text{TR} = -3Q^2 + 95Q$

$$\text{MR} = -6Q + 95$$

مثال 5 : إذا كانت دالة الطلب $P = 80 - 3Q$ فإن الإيراد الحدى يمكن إيجاده عن طريق إيجاد دالة الإيراد الكلى أولاً ومن ثم نوجد المشتقة لدالة الإيراد الكلى . ولذلك

EXAMPLE 5. Given the demand function $P = 80 - 3Q$, the marginal revenue can be found by first finding the total revenue function and then taking the derivative of that function with respect to Q. Thus

$$\text{TR} = PQ = (80 - 3Q)Q = 80Q - 3Q^2$$

$$\text{MR} = \frac{d\text{TR}}{dQ} = 80 - 6Q$$

فإذا كانت $Q = 5$ فإن $\text{MR} = 80 - 6(5) = 50$ وإذا كانت $Q = 7$ فإن $\text{MR} = 80 - 6(7) = 38$. انظر المسائل من 10.17 إلى 10.19 .

10.9 أمثلية الدوال الاقتصادية للإدارة

Optimizing Economic Functions for Business

يطلب عادة من الاقتصاديين والإداريين مساعدة المؤسسات على حل بعض المشكلات مثل تعظيم الأرباح ومستويات الناتج المادى أو الإنتاجية ومثل تدنية التكاليف ومستويات التلوث أو الضوضاء واستخدام الموارد الطبيعية النادرة . وهذه المهمة تيسر بالطرق التى عرضت فى بداية الفصل ومبينة فى المثال 6 والمسائل 10.20 إلى 10.25 .

مثال 6 : لتعظيم الأرباح π لمؤسسة ما أعطيت الإيراد الكلى $R = 3300Q - 26Q^2$ والتكلفة الكلية: $C = Q^3 - 2Q^2 + 420Q + 750$. بافتراض أن $Q > 0$.

EXAMPLE 6. To maximize profits π for a firm, given total revenue $R = 3300Q - 26Q^2$ and total cost $C = Q^3 - 2Q^2 + 420Q + 750$, assuming $Q > 0$,

(a) نشكل دالة الربح : $\pi = R - C$

$$\pi = 3300Q - 26Q^2 - (Q^3 - 2Q^2 + 420Q + 750)$$

$$\pi = -Q^3 - 24Q^2 + 2880Q - 750$$

(*b*) نوجد المشتقة الأولى ثم نضعها مساوية للصفر ثم نحل بالنسبة إلى Q لإيجاد النقاط الحرجة .

$$\pi' = -3Q^2 - 48Q + 2880 = 0$$
$$= -3(Q^2 + 16Q - 960) = 0$$
$$= -3(Q - 24)(Q + 40) = 0$$

$Q = 24 \qquad Q = -40$ النقاط الحرجة

(*c*) نوجد المشتقة الثانية ونحسب قيمتها عند القيمة الحرجة الموجبة ومن ثم نفحص إشارة التقعر لنتأكد بأنها تمثل نهاية عظمى نسبية . ونتجاهل القيمة الحرجة السالبة لأنه ليس لها معنى اقتصادى وسوف نثبت رياضيًا بأنها صغرى نسبية .

$$\pi'' = -6Q - 48$$

$\pi''(24) = -6(24) - 48 = -192 < 0$ مقعرة ، نهاية عظمى نسبية

تعظم الأرباح عند $Q = 24$ حيث

$$\pi(24) = -(24)^3 - 24(24)^2 + 2880(24) - 750 = 40,722$$

10.10 العلاقات بين الدوال الكلية والحدية والمتوسطة

Relationships Among Total, Marginal, and Average Functions

يتعامل الاقتصاديون والإداريون عادة مع الدوال التى تتضمن تكاليفًا وإيرادات وأرباحًا . وأن العلاقات المهمة بين الدوال الكلية والحدية والمتوسطة من السهل معرفتها بدلالة الرسوم البيانية . وباستخدام طرق الهيكل التخطيطى للمنحنى الذى درس فى بداية الفصل فإن المثال 7 يوضح الاتصال الذى يظهر بين دوال التكلفة الكلية والتكلفة المتوسطة والتكلفة الحدية .

مثال 7 : إذا أعطيت دالة التكلفة الكلية $\text{TC} = Q^3 - 24Q^2 + 600Q$ فإن العلاقات بين دوال التكلفة الكلية والمتوسطة والحدية مبينة كما يلى :

EXAMPLE 7. Given the total cost function, $\text{TC} = Q^3 - 24Q^2 + 600Q$, the relationships among total, average, and marginal cost functions are demonstrated as follows:

(*a*) نوجد المشتقة الأولى والثانية لدالة التكلفة الكلية ونستخدم المشتقة الثانية .

$$\text{TC}' = 3Q^2 - 48Q + 600$$
$$\text{TC}'' = 6Q - 48$$

ونتحقق من (1) التقعر و (2) نقاط التحول .

(1) لـ $Q < 8$ فإن $\text{TC}'' < 0$ مقعرة .

لـ $Q > 8$ فإن $\text{TC}'' > 0$ محدبة .

(2)
$$6Q - 48 = 0$$
$$Q = 8$$
$$\text{TC}(8) = (8)^3 - 24(8)^2 + 600(8) = 3776$$

ومع تغير $\mathrm{TC}(Q)$ من مقعرة إلى محدبة عند $Q = 8$ فإن نقطة التحول هى $(8, 3776)$.

(*b*) نوجد دالة التكلفة المتوسطة AC والنهايات النسبية .

$$\mathrm{AC} = \frac{\mathrm{TC}}{Q} = Q^2 - 24Q + 600$$

$$\mathrm{AC}' = 2Q - 24 = 0$$

القيمة الحرجة $Q = 12$

محدبة ، نهاية صغرى نسبية $\mathrm{AC}'' = 2 > 0$

(*c*) ونعمل نفس الشىء لدالة التكلفة الحدية .

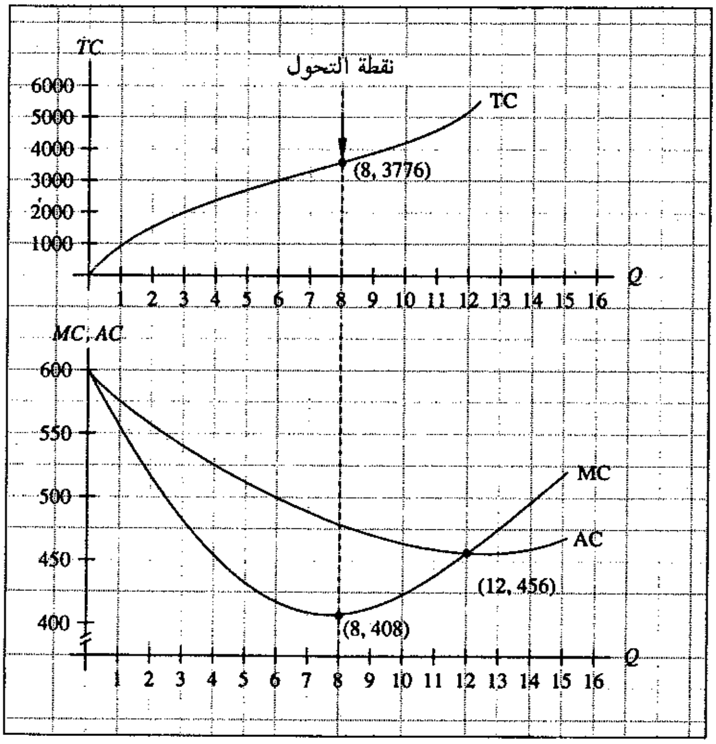
$$\mathrm{MC} = \mathrm{TC}' = 3Q^2 - 48Q + 600$$

$$\mathrm{MC}' = 6Q - 48 = 0$$

القيمة الحرجة $Q = 8$

محدبة ، نهاية صغرى نسبية $\mathrm{MC}'' = 6 > 0$

(*d*) نعمل رسمًا تخطيطيًا للمنحنى كما فى الشكل (7–10) .



شكل (7–10)

ملاحظة :

1. MC تتناقص عندما تكون TC مقعرة وتتزايد بمعدل متناقص ، وتتزايد MC عندما تكون TC محدبة ،

وتتزايد بمعدل متزايد ، وتكون نهاية صغرى حينما تكون TC عند نقطة التحول ويتغير التقعر .

2. AC تتناقص على طول المنطقة التى تكون فيها $MC < AC$ وتكون AC عند نهاية صغرى عندما $MC = AC$ وتتزايد AC عندما $MC > AC$.

3. إذا كانت $MC < AC$ فإن AC تتناقص . وإذا كانت $MC = AC$ فإن AC تكون عند نهاية صغرى . وإذا كانت $MC > AC$ فإن AC تتزايد .

انظر أيضًا المسألة 10.26 .

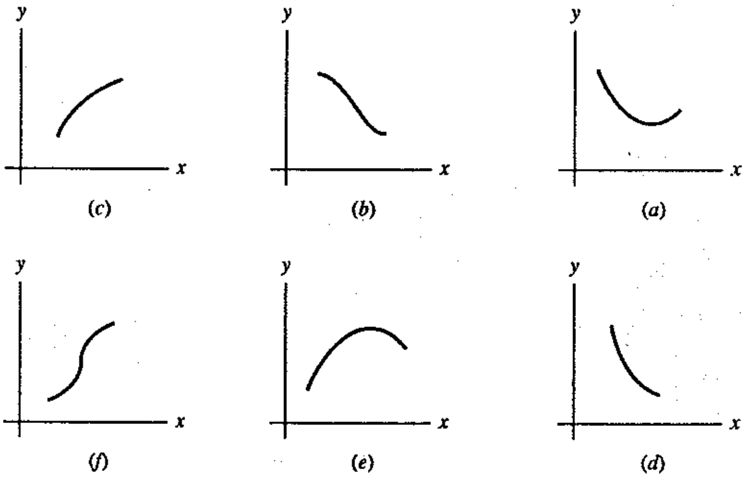
مسائل محلولة

الدوال المتزايدة والمتناقصة والتقعر والتحدب

Increasing and decreasing Functions, Concavity and Convexity

10.1. من الرسوم البيانية فى الشكل (8–10) حدد أى منها (1) دالة متزايدة لكل قيم x و (2) دالة متناقصة لكل قيم x و (3) محدبة لكل قيم x و (4) مقعرة لكل قيم x و (5) أى منها لها نهاية عظمى نسبية أو نهاية صغرى نسبية و (6) أى منها لها نقاط تحول .

10.1. From the graphs in Fig. 10-8, indicate which graphs are (1) increasing for all x, (2) decreasing for all x, (3) convex for all x, (4) concave for all x, (5) which have relative maxima or minima, and (6) which have inflection points.



(a) (b) (c)

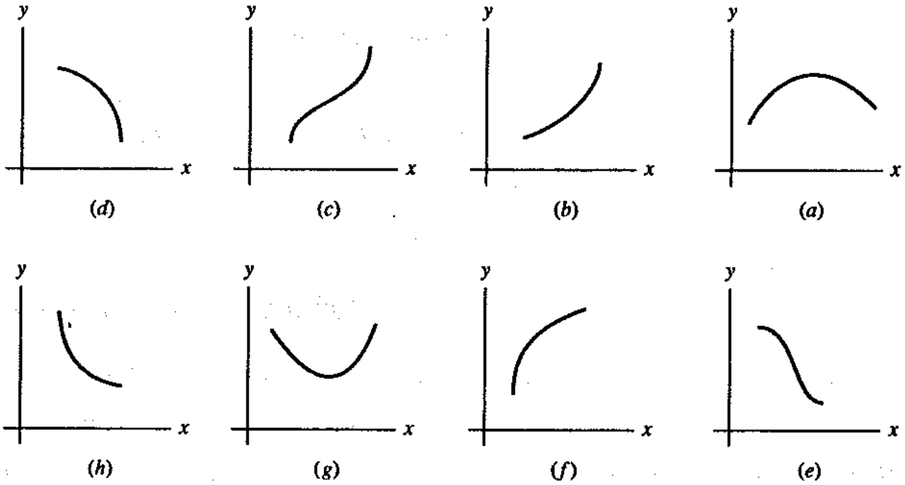
(d) (e) (f)

شكل (8–10)

1. c ، f دالة متزايدة لكل x .
2. b ، d دالة متناقصة لكل x .
3. a ، d محدبة لكل x .
4. c ، e مقعرة لكل x .
5. a ، e لها نهايات عظمى أو صغرى نسبية .
6. b ، f لها نقاط تحول .

10.2. حدد فيما يتعلق بالرسوم البيانية فى الشكل (10–a) أى دالة لها : (1) مشتقات أولى موجبة لكل x و(2) مشتقات أولى سالبة لكل x و (3) مشتقات ثانية موجبة لكل x و (4) مشتقات ثانية سالبة لكل x و(5) المشتقات الأولى تساوى صفرًا أو غير محددة عند بعض النقاط . (6) المشتقات الثانية تساوى صفرًا أو غير محددة عند بعض النقاط .

10.2. Indicate with respect to the graphs in Fig. 10-9 which functions have (1) positive first derivatives for all x, (2) negative first derivatives for all x, (3) positive second derivatives for all x, (4) negative second derivatives for all x, (5) first derivatives equal to zero or undefined at some point, and (6) second derivatives equal to zero or undefined at some point.



شكل (10–9)

1. b ، c ، f المنحنيات تتحرك إلى أعلى من اليسار إلى اليمين .
2. d ، e ، h المنحنيات تتحرك إلى أسفل من اليسار إلى اليمين .
3. b ، g ، h المنحنيات كلها محدبة .
4. a ، d ، f المنحنيات كلها مقعرة .
5. a ، g المنحنيات تصل إلى مستوى مستقر (عند نقطة نهائية) .
6. c ، e المنحنيات لها نقاط تحول .

10.3. اختبر لترى ما إذا كانت الدوال التالية متزايدة أو متناقصة أو مستقرة Stationary عند $x = 3$.

10.3. Test to see whether the following functions are increasing, decreasing, or stationary at $x = 3$.

(*a*) $y = 5x^2 - 12x + 8$

$$y' = 10x - 12$$

$$y'(3) = 10(3) - 12 = 18 > 0 \qquad \text{دالة متزايدة}$$

(*b*) $y = x^3 - 4x^2 - 9x + 19$

$$y' = 3x^2 - 8x - 9$$

$$y'(3) = 3(3)^2 - 8(3) - 9 = -6 < 0 \qquad \text{دالة متناقصة}$$

(*c*) $y = x^4 - 9x^3 + 22.5x^2 - 92$

$$y' = 4x^3 - 27x^2 + 45x$$

$$y'(3) = 4(3)^3 - 27(3)^2 + 45(3) = 0 \qquad \text{دالة مستقرة}$$

10.4. اختبر لترى ما إذا كانت الدوال التالية مقعرة أو محدبة عند $x = 2$.

10.4. Test to see if the following functions are concave or convex at $x = 2$.

(*a*) $y = -4x^3 + 5x^2 + 3x - 25$

$$y' = -12x^2 + 10x + 3$$

$$y'' = -24x + 10$$

$$y''(2) = -24(2) + 10 = -38 < 0 \qquad \text{مقعرة}$$

(*b*) $y = (3x^2 - 4)^2$

$$y' = 2(3x^2 - 4)(6x) = 12x(3x^2 - 4) = 36x^3 - 48x$$

$$y'' = 108x^2 - 48$$

$$y''(2) = 108(2)^2 - 48 = 384 > 0 \qquad \text{محدبة}$$

Relative Extrema النهايات النسبية

10.5. أوجد النهايات النسبية للدوال التالية عن طريق (1) إيجاد القيم الحرجة و (2) تحديد ما إذا كانت هـذه الدوال عند القيم الحرجة عند نهاية عظمى أو صغرى نسبية .

10.5. Find the relative extrema for the following functions by (1) finding the critical value(s) and (2) determining whether at the critical value(s) the function is at a relative maximum or minimum.

(*a*) $f(x) = -9x^2 + 126x - 45$

(1) نوجد المشتقة الأولى ونضعها مساوية للصفر ونحل بالنسبة إلى x لإيجاد القيم الحرجة .

$$f'(x) = -18x + 126 = 0$$

$$x = 7 \qquad \text{القيمة الحرجة}$$

(2) نوجد المشتقة الثانية ونحسب قيمتها عند القيم الحرجة ومن ثم نتحقق من التقعر للتمييز بين النهايات العظمى والصغرى النسبية .

$$f''(x) = -18$$

$$f''(7) = -18 < 0 \qquad \text{محدبة ، نهاية عظمى نسبية}$$

(*b*) $f(x) = 2x^3 - 18x^2 + 48x - 29$

(1)
$$f'(x) = 6x^2 - 36x + 48 = 0$$

$$f'(x) = 6(x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$f'(x) = 6(x - 2)(x - 4) = 0$$

$$x = 2 \qquad x = 4 \qquad \text{القيم الحرجة}$$

(2)
$$f''(x) = 12x - 36$$

$$f''(2) = 12(2) - 36 = -12 < 0 \qquad \text{محدبة ، نهاية عظمى نسبية}$$

$f''(4) = 12(4) - 36 = 12 > 0$ مقعرة ، نهاية صغرى نسبية

(c) $f(x) = x^4 + 8x^3 - 80x^2 + 195$

(1)
$$f'(x) = 4x^3 + 24x^2 - 160x = 0$$
$$f'(x) = 4x(x^2 + 6x - 40) = 0$$
$$f'(x) = 4x(x-4)(x+10) = 0$$

$x = 0 \qquad x = 4 \qquad x = -10$ القيم الحرجة

(2) $f''(x) = 12x^2 + 48x - 160$

$f''(-10) = 12(-10)^2 + 48(-10) - 160 = 560 > 0$ مقعرة ، نهاية صغرى نسبية

$f''(0) = 12(0)^2 + 48(0) - 160 = -160 < 0$ محدبة ، نهاية عظمى نسبية

$f''(4) = 12(4)^2 + 48(4) - 160 = 224 > 0$ مقعرة ، نهاية صغرى نسبية

10.6. من الدالة $y = (x-5)^4$ (1) أوجد القيم الحرجة و (2) اختبر لترى ما إذا كانت الدالة عند القيم الحرجة عند نهاية عظمى أو صغرى نسبية أو نقطة تحول ممكنة .

10.6. For the function $y = (x - 5)^4$, (1) find the critical values and (2) test to see if at the critical values the function is at a relative maximum, minimum, or possible inflection point.

(1) نوجد المشتقة الأولى ونضعها مساوية للصفر ونحل بالنسبة إلى x لإيجاد القيم الحرجة .

$$y' = 4(x-5)^3 = 0$$
$$x - 5 = 0$$

$x = 5$ القيمة الحرجة

(2) نوجد المشتقة الثانية ونحسب قيمتها عند القيمة الحرجة ونتحقق من إشارة التقعر للتمييز بين النهايات العظمى والصغرى النسبية أو نقطة التحول .

$$y'' = 12(x-5)^2$$

$y''(5) = 12(5-5)^2 = 0$ الاختبار غير حاسم

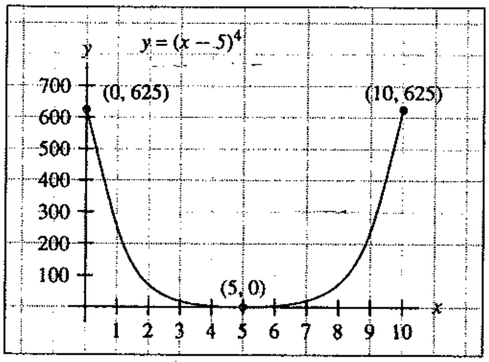
إذا كان اختبار المشتقة الثانية غير حاسم نواصل إيجاد المشتقات العليا المتتالية ونحسب قيمها عند النقطة الحرجة حتى نصل إلى أول عدد غير صفرى لمشتقة الرتبة العليا .

$$y''' = 24(x-5)$$

$y'''(5) = 24(5-5) = 0$ الاختبار غير حاسم

$$y^{(4)} = 24$$
$$y^{(4)}(5) = 24 > 0$$

وكما شرحنا فى القسم 10.7 فإذا كان العدد غير الصفرى الأول لمشتقة الرتبة العليا عدد زوجى (even) فإن y تكون عند نهاية نسبية . والمشتقة الموجبة تعنى أن y محدبة وعند نهاية صغرى نسبية . انظر الشكل (10–10) .



شكل (10–10)

10.7. Redo Problem 10.6, given $y = (6-x)^3$

10.7. أعد حل المسألة 10.6 . إذا أعطيت :

(1) $$y' = 3(6-x)^2(-1) = -3(6-x)^2 = 0$$

القيمة الحرجة $x = 6$

(2) $$y'' = -6(6-x)(-1) = 6(6-x)$$

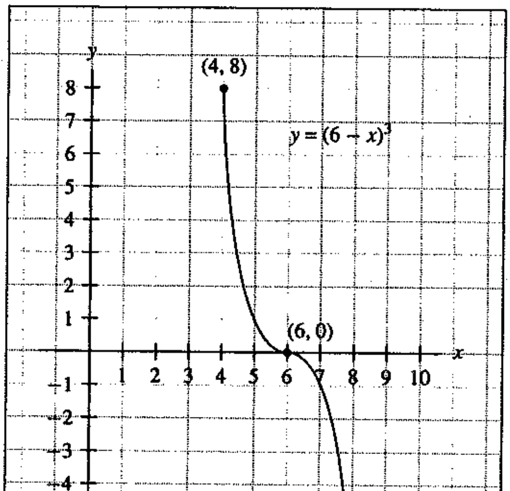
الاختبار غير حاسم $y''(6) = 6(6-6) = 0$

نوجد مشتقات الرتبة العليا ونحسب قيمها عند النقطة الحرجة بحثًا عن أول مشتقة عليا لا تساوى صفرًا .

$$y''' = -6$$

$$y'''(6) = -6 < 0$$

وكما شرحنا فى القسم 10.7 فحيث إن العدد غير الصفرى الأول لمشتقة الرتبة العليا عدد فردى (odd) فإن y تكون عند نقطة التحول وليس عند نقطة متطرفة . انظر الشكل (11–10) .



شكل (11–10)

10.8. Redo Problem 10.6, given $y = -3(x-4)^6$

10.8. أعد حل المسألة 10.6 . إذا أعطيت :

(1) $y' = -18(x-4)^5 = 0$

$x = 4$ القيمة الحرجة

(2) $y'' = -90(x-4)^4$

$y''(4) = -90(0)^4 = 0$ الاختبار غير حاسم

نواصل

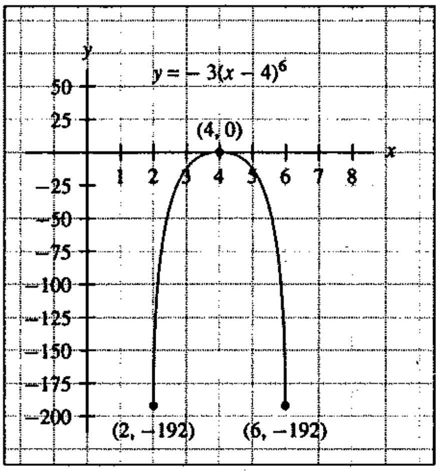
$y''' = -360(x-4)^3 \qquad y'''(4) = 0$ الاختبار غير حاسم

$y^{(4)} = -1080(x-4)^2 \qquad y^{(4)}(4) = 0$ الاختبار غير حاسم

$y^{(5)} = -2160(x-4) \qquad y^{(5)}(4) = 0$ الاختبار غير حاسم

$y^{(6)} = -2160 \qquad y^{(6)}(4) = -2160 < 0$

وحيث إن العدد غير الصفرى الأول لمشتقة الرتبة العليا عدد زوجى فإن y تكون عند نقطة متطرفة ، وإذا كانت $y^{(6)}(4) < 0$ فإن y تكون مقعرة وتكون عند نهاية عظمى نسبية . انظر الشكل (12–10) .



شكل (12–10)

10.9. Redo Problem 10.6, given $y = (x-3)^5$

10.9. أعد حل المسألة 10.6 . إذا أعطيت :

(1) $y' = 5(x-3)^4 = 0$

$x = 3$ القيمة الحرجة

(2) $y'' = 20(x-3)^3$

$y''(3) = 20(0)^3 = 0$ الاختبار غير حاسم

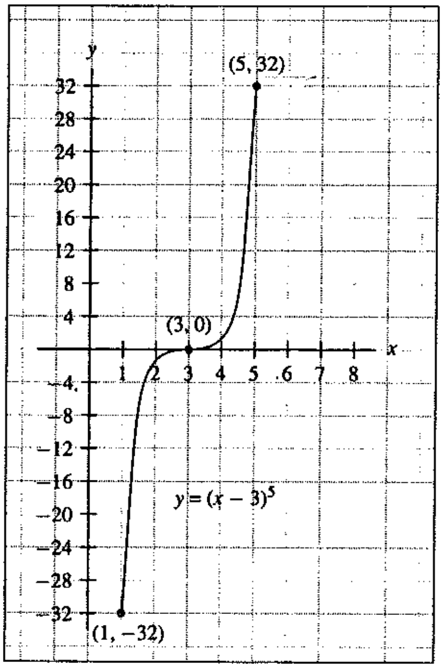
نوجد المشتقة الثالثة ومشتقات الرتبة العليا .

$y''' = 60(x-3)^2 \qquad y'''(3) = 0$ الاختبار غير حاسم

$y^{(4)} = 120(x-3) \qquad y^{(4)}(3) = 0$ الاختبار غير حاسم

$y^{(5)} = 120 \qquad y^{(5)}(3) = 120 > 0$

وحيث إن العدد غير الصفرى الأول لمشتقة الرتبة العليا عدد فردى فإن y تكون عند نقطة التحول . انظر الشكل (10–13) .



شكل (10–13)

الرسم التخطيطى للمنحنيات Sketching Curves

10.10. من المعلومات أدناه صِف ومن ثم ارسم مخططًا للدالة حول النقطة المحددة .

10.10. From the information below, describe and then draw a rough sketch of the function around the point indicated.

(*a*) $f(4) = 2, f'(4) = 3, f''(4) = 5$

فعند $f(4) = 2$ فإن الدالة تمر من خلال النقطة $(4, 2)$ ، وعند $f'(4) = 3 > 0$ فإن الدالة متزايدة ، وعند $f''(4) = 5 > 0$ فإن الدالة محدبة . انظر الشكل $(10–14)(a)$.

(*b*) $f(5) = 4, f'(5) = -6, f''(5) = -9$

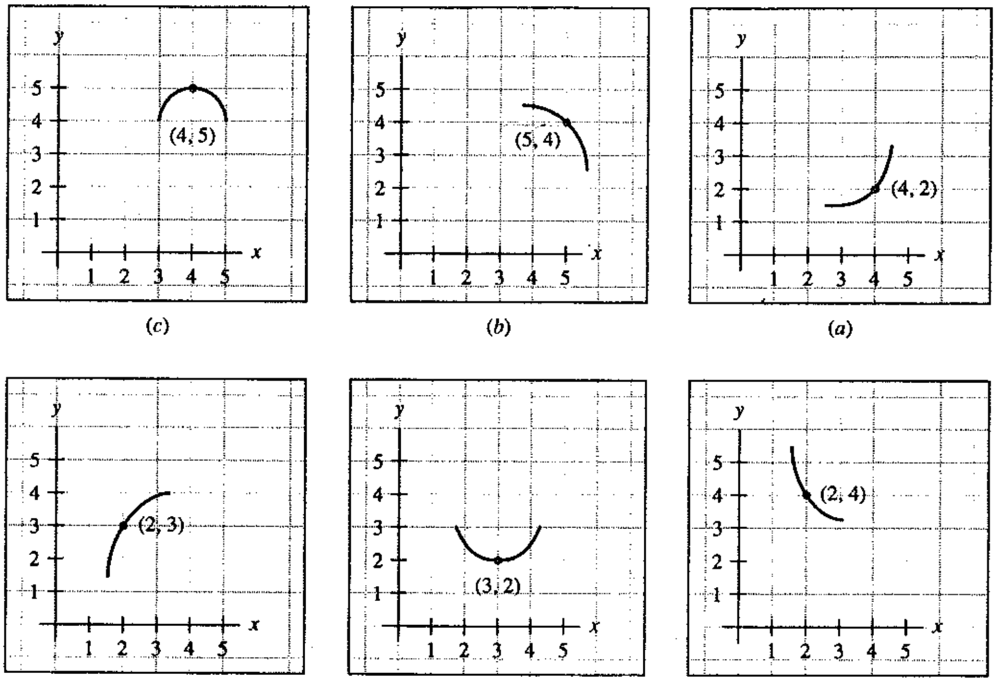
فعند $f(5) = 4$ فإن الدالة تمر من خلال النقطة $(5, 4)$ ، وطالما أن $f'(5) = -6$ فإن الدالة متناقصة ، وعند $f''(5) = -9$ فإن الدالة مقعرة . انظر الشكل $(10–14)(b)$.

(*c*) $f(4) = 5, f'(4) = 0, f''(4) = -7$

الدالة تمر من خلال النقطة $(4, 5)$. فمن $f'(4) = 0$ فإننا نعرف بأن الدالة عند مستوى مستقر (Plateau) عند $x = 4$ ، $f''(4) = -7$ فإننا نعرف أن الدالة محدبة عند $x = 4$. ومن ثم فالدالة عند نهاية عظمى نسبية . انظر الشكل $(10–14)(c)$.

(*d*) $f(2) = 4, f'(2) = -5, f''(2) = 6$

الدالة تمر عبر النقطة $(2, 4)$ وهى متناقصة ومحدبة . انظر الشكل $(d)(10–14)$.



(c) (b) (a)

(f) (e) (d)

شكل (10–14)

(e) $f(3) = 2, f'(3) = 0, f''(3) = 8$

الدالة تمر عبر النقطة $(3, 2)$ وهى عند مستوى مستقر نسبيًا ومحدبة . ولهذا فإن الدالة عند نهاية صغرى نسبية عند $(3, 2)$. انظر الشكل $(e)(10–14)$.

(f) $f(2) = 3, f'(2) = 7, f''(2) = -9$

الدالة تمر عبر النقطة $(2, 3)$ وهى متزايدة ومقعرة . انظر الشكل $(f)(10\text{-}14)$.

10.11. (a) أوجد القيم الحرجة . (b) اختبر التقعر لتحديد النهايات العظمى والصغرى النسبية . (c) تحقق من نقاط التحول . (d) احسب قيمة الدالة عند القيم الحرجة ونقاط التحول . (e) مثل الدالة بيانيًا .

10.11. (*a*) Find the critical values, (*b*) test for concavity to determine relative maxima or minima, (*c*) check for inflection points, (*d*) evaluate the function at the critical values and inflection points, and (*e*) graph the function, given

$$f(x) = x^3 - 18x^2 + 81x - 58$$

(a) $$f'(x) = 3x^2 - 36x + 81 = 3(x^2 - 12x + 27) = 0$$

$$f'(x) = 3(x - 3)(x - 9) = 0$$

$x = 3 \qquad x = 9$ القيم الحرجة

(b) $$f''(x) = 6x - 36$$

$f''(3) = 6(3) - 36 = -18 < 0$ مقعرة ، نهاية عظمى نسبية

محدبة ، نهاية صغرى نسبية $f''(9) = 6(9) - 36 = 18 > 0$

(*c*) $f'' = 6x - 36 = 0$

نقطة تحول ممكنة $x = 6$

ومع $f''(6) = 0$ فالتقعر يتغير بين $x = 3$ و $x = 9$ كما نرى في الجزء (*b*) ومن ثم توجد نقطة تحول عند $x = 6$.

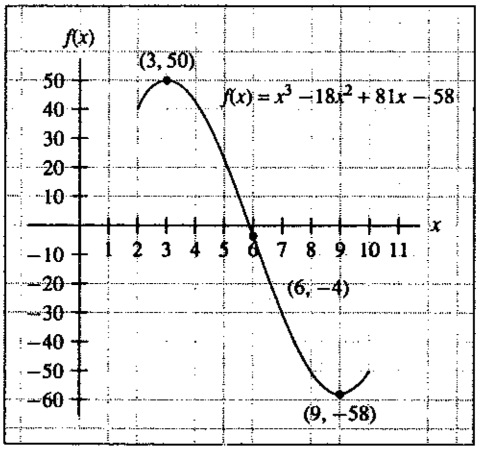
(*d*)

نهاية عظمى نسبية $f(3) = (3)^3 - 18(3)^2 + 81(3) - 58 = 50$ $(3, 50)$

نقطة تحول $f(6) = (6)^3 - 18(6)^2 + 81(6) - 58 = -4$ $(6, -4)$

نهاية صغرى نسبية $f(9) = (9)^3 - 18(9)^2 + 81(9) - 58 = -58$ $(9, -58)$

(*e*) انظر الشكل (10–15) .



شكل (10–15)

10.12. أعد حل المسألة 10.11 . إذا أعطيت :

10.12. Redo Problem 10.11, given $f(x) = -2x^3 + 12x^2 + 72x - 70$.

(*a*) $f'(x) = -6x^2 + 24x + 72 = -6(x^2 - 4x - 12) = 0$

$f'(x) = -6(x+2)(x-6) = 0$

القيم الحرجة $x = -2 \quad x = 6$

(*b*) $f''(x) = -12x + 24$

محدبة ، نهاية صغرى نسبية $f''(-2) = -12(-2) + 24 = 48 > 0$

مقعرة ، نهاية عظمى نسبية $f''(6) = -12(6) + 24 = -48 < 0$

(*c*) $f''(x) = -12x + 24 = 0$

نقطة تحول عند $x = 2$ $x = 2$

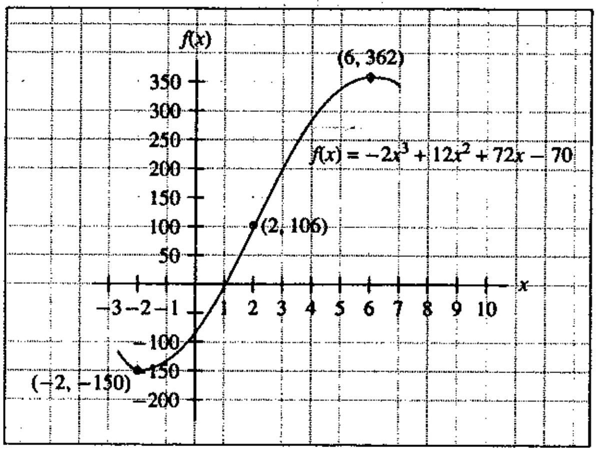
(*d*)

نهاية صغرى نسبية $f(-2) = -150$ $(-2, -150)$

نقطة تحول $f(2) = 106$ $(2, 106)$

نهاية عظمى نسبية $f(6) = 362$ $(6, 362)$

(*e*) انظر الشكل (10–16) .



شكل (10–16)

10.13. Redo Problem 10.11, given $f(x) = (3 - x)^4$

10.13. أعد حل المسألة 10.11 . إذا أعطيت :

(*a*) $f'(x) = 4(3-x)^3(-1) = -4(3-x)^3 = 0$

$x = 3$ القيمة الحرجة

(*b*) $f''(x) = 12(3-x)^2$

$f''(3) = 12(3-3)^2 = 0$ الاختبار غير حاسم

ونواصل إيجاد المشتقات العليا كما سبق وأن بينا فى القسم 10.7 .

$f'''(x) = -24(3-x)$

$f'''(3) = -24(3-3) = 0$ الاختبار غير حاسم

$f^{(4)}(x) = 24$

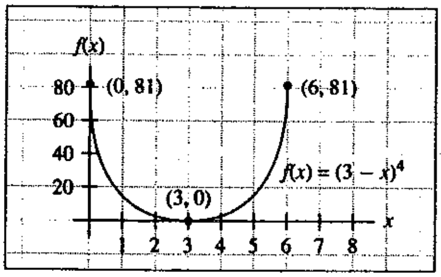
$f^{(4)}(3) = 24 > 0$ نهاية صغرى نسبية

وحيث إن أول عدد غير صفرى لمشتقة الرتبة العليا عدد زوجى وأكبر من الصفر فإن الدالة $f(x)$ تصغر عند $x = 3$.

(*c*) لا توجد نقطة تحول .

(*d*) نهاية صغرى نسبية $(3, 0)$ $f(3) = 0$

(*e*) انظر الشكل 10–17 .



شكل (10–17)

10.14. Redo Problem 10.11, given $f(x) = (2x - 8)^3$

10.14. أعد حل المسألة 10.11 . إذا أعطيت :

(*a*) $f'(x) = 3(2x-8)^2(2) = 6(2x-8)^2 = 0$

$x = 4$ القيمة الحرجة

(*b*) $f''(x) = 12(2x-8)(2) = 24(2x-8)$

$f''(4) = 24(8-8) = 0$ الاختبار غير حاسم

ونواصل إيجاد مشتقات الرتبة العليا المتتالية

$$f''' = 48$$

$$f'''(4) = 48 \neq 0$$

(*c*) وكما بينا فى القسم 10.7 فحيث إن أول عدد غير صفرى لمشتقة الرتبة العليـا هـو عـدد فـردى فـإن الدالة تكون عند نقطة التحول عند $x = 4$. وعندما تكون نقطة التحول عند القيمة الحرجة فقط فإنه لا توجد نهاية صغرى أو عظمى نسبية .

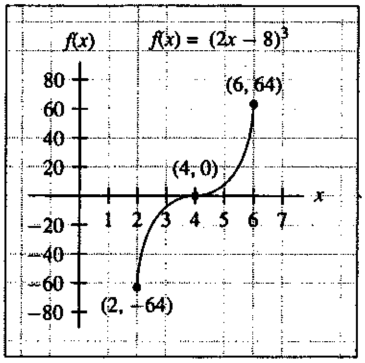
(*d*) نهاية صغرى نسبية $(4, 0)$ $f(4) = 0$

واختبار التقعر إلى اليسار $(x = 3)$ وإلى اليمين $(x = 5)$ لنقطة التحول .

$f''(3) = 24[2(3) - 8] = -48 < 0$ مقعرة

$f''(5) = 24[2(5) - 8] = 48 > 0$ محدبة

(*e*) انظر الشكل 18–10 .



شكل (18–10)

Optimization الأمثلية

10.15. أوجد أمثلية الدوال التربيعية والتكعيبة التالية عن طريق (1) إيجاد القيم الحرجة التى تكون عندها الدالة مثلى و (2) اختبر شرط الرتبة الثانية للتمييز بين النهايات الصغرى أو العظمى النسبية .

10.15. Optimize the following quadratic and cubic functions by (1) finding the critical value(s) at which the function is optimized and (2) testing the second-order condition to distinguish between a relative maximum or minimum.

(*a*) $y = 9x^2 + 126x - 74$

(1) نوجد المشتقة الأولى ونضعها مساوية للصفر ونحل بالنسبة إلى x لإيجاد القيم الحرجة .

$$y' = 18x + 126 = 0$$

$x = -7$ القيمة الحرجة

(2) نوجد المشتقة الثانية ونحسب قيمتها عند القيمة الحرجة ونفحص الإشارة للنهايات الصغرى والعظمى النسبية .

$$y'' = 18$$

$y''(-7) = 18 > 0$ محدبة ، نهاية صغرى نسبية

(*b*) $y = -5x^2 + 90x - 73$

(1) $y' = -10x + 90 = 0$

$x = 9$ القيمة الحرجة

(2) $y'' = -10$

$y''(9) = -10 < 0$ مقعرة ، نهاية عظمى نسبية

(*c*) $y = x^3 + 6x^2 - 96x + 23$

(1) $y' = 3x^2 + 12x - 96 = 0$

$y' = 3(x^2 + 4x - 32) = 0$

$y' = 3(x - 4)(x + 8) = 0$

$x = 4 \qquad x = -8$ القيم الحرجة

(2) $y'' = 6x + 12$

$y''(4) = 6(4) + 12 = 36 > 0$ محدبة ، نهاية صغرى نسبية

$y''(-8) = 6(-8) + 12 = -36 < 0$ مقعرة ، نهاية عظمى نسبية

(*d*) $y = -3x^3 + 40.5x^2 - 162x + 39$

(1) $y' = -9x^2 + 81x - 162 = 0$

$= -9(x^2 - 9x + 18)$

$= -9(x - 3)(x - 6) = 0$

$x = 3 \qquad x = 6$ القيم الحرجة

(2) $y'' = -18x + 81$

$y''(3) = -18(3) + 81 = 27 > 0$ محدبة ، نهاية صغرى نسبية

$y''(6) = -18(6) + 81 = -27 < 0$ مقعرة ، نهاية عظمى نسبية

10.16. أوجد أمثلية كثيرة الحدود التالية مستخدمًا نفس الإجراء كما فى المسألة 10.15 .

10.16. Optimize the following higher-order polynomial functions, using the same procedure as in Problem 10.15.

(*a*) $y = 2x^4 - 8x^3 - 40x^2 + 79$

(1) $y' = 8x^3 - 24x^2 - 80x = 0$

$y' = 8x(x^2 - 3x - 10) = 0$

$y' = 8x(x+2)(x-5) = 0$

القيم الحرجة $x = 0 \qquad x = -2 \qquad x = 5$

(2) $y'' = 24x^2 - 48x - 80$

محدبة ، نهاية صغرى نسبية $y''(-2) = 24(-2)^2 - 48(-2) - 80 = 112 > 0$

مقعرة ، نهاية عظمى نسبية $y''(0) = 24(0)^2 - 48(0) - 80 = -80 < 0$

محدبة ، نهاية صغرى نسبية $y''(5) = 24(5)^2 - 48(5) - 80 = 280 > 0$

(*b*) $y = -5x^4 + 20x^3 + 280x^2 - 19$

(1) $y' = -20x^3 + 60x^2 + 560x = 0$

$y' = -20x(x^2 - 3x - 28) = 0$

$y' = -20x(x+4)(x-7) = 0$

القيم الحرجة $x = 0 \qquad x = -4 \qquad x = 7$

(2) $y'' = -60x^2 + 120x + 560$

مقعرة ، نهاية عظمى نسبية $y''(-4) = -60(-4)^2 + 120(-4) + 560 = -880 < 0$

محدبة ، نهاية صغرى نسبية $y''(0) = -60(0)^2 + 120(0) + 560 = 560 > 0$

مقعرة ، نهاية عظمى نسبية $y''(7) = -60(7)^2 + 120(7) + 560 = -1540 < 0$

(*c*) $y = (7 - 2x)^4$

(1) $y' = 4(7-2x)^3(-2) = -8(7-2x)^3 = 0$

القيمة الحرجة $7 - 2x = 0 \qquad x = 3.5$

(2) $y'' = -24(7-2x)^2(-2) = 48(7-2x)^2$

الاختبار غير حاسم $y''(3.5) = 48[7 - 2(3.5)]^2 = 48(0)^2 = 0$

نواصل إيجاد المشتقات العليا كما بينا فى القسم 10.7 والمسألة 10.6 .

$y''' = 96(7-2x)(-2) = -192(7-2x)$

الاختبار غير حاسم $y'''(3.5) = -192(0) = 0$

$y^{(4)} = 384$

محدبة ، نهاية صغرى نسبية $y^{(4)}(3.5) = 384 > 0$

(*d*) $y = -2(x + 19)^4$

(1) $y' = -8(x+19)^3 = 0$

القيمة الحرجة $x + 19 = 0 \qquad x = -19$

(2) $y'' = -24(x+19)^2$

الاختبار غير حاسم $y''(-19) = -24(-19+19)^2 = 0$

$y''' = -48(x+19)$

$y'''(-19) = -48(0) = 0$ الاختبار غير حاسم

$y^{(4)} = -48$

$y^{(4)}(-19) = -48 < 0$ مقعرة ، نهاية عظمى نسبية

Marginal and Average Concepts المفاهيم الحدية والمتوسطة

10.17. أوجد الدوال (1) الحدية و (2) المتوسطة لكل من الدوال الكلية التالية . ثم احسب قيمها عند $Q = 2$ و$Q = 4$.

10.17. Find (1) the marginal and (2) the average functions for each of the following total functions. Evaluate them at $Q = 2$ and $Q = 4$.

(*a*)
$$\text{TC} = Q^2 + 9Q + 16$$

(1) $\text{MC} = \dfrac{d\text{TC}}{dQ} = 2Q + 9$

$\text{MC}(2) = 2(2) + 9 = 13$

$\text{MC}(4) = 2(4) + 9 = 17$

(2) $\text{AC} = \dfrac{\text{TC}}{Q} = Q + 9 + \dfrac{16}{Q}$

$\text{AC}(2) = (2) + 9 + \dfrac{16}{2} = 19$

$\text{AC}(4) = (4) + 9 + \dfrac{16}{4} = 17$

ملاحظة : حينما توجد الدالة المتوسطة ، تأكد من القسمة على الحد الثابت Q .

(*b*)
$$\text{TR} = 24Q - Q^2$$

(1) $\text{MR} = \dfrac{\text{d}TR}{dQ} = 24 - 2Q$

$\text{MR}(2) = 24 - 2(2) = 20$

$\text{MR}(4) = 24 - 2(4) = 16$

(2) $\text{AR} = \dfrac{\text{TR}}{Q} = 24 - Q$

$\text{AR}(2) = 24 - 2 = 22$

$\text{AR}(4) = 24 - 4 = 20$

(*c*)
$$\pi = -Q^2 + 75Q - 12$$

(1) $M\pi = \dfrac{d\pi}{dQ} = -2Q + 75$

$M\pi(2) = -2(2) + 75 = 71$

$M\pi(4) = -2(4) + 75 = 67$

(2) $A\pi = \dfrac{\pi}{Q} = -Q + 75 - \dfrac{12}{Q}$

$A\pi(2) = -(2) + 75 - \dfrac{12}{2} = 67$

$A\pi(4) = -(4) + 75 - \dfrac{12}{4} = 68$

10.18. أوجد الدوال الحدية المرتبطة بدوال الطلب التالية ثم احسب قيمها عند $Q = 20$ و $Q = 40$.

10.18. Find the MR functions associated with each of the following demand functions and evaluate them at $Q = 20$ and $Q = 40$.

(*a*)
$$P = -0.1Q + 25$$

لإيجاد الدالة الحدية نوجد أولاً دالة TR بدلالة Q ومن ثم نوجد مشتقتها بالنسبة إلى Q .

$$\text{TR} = PQ = (-0.1Q + 25)Q = -0.1Q^2 + 25Q$$

$$\text{MR} = d\text{TR}/dQ = -0.2Q + 25$$

$$\text{MR}(20) = -0.2(20) + 25 = 21$$

$$\text{MR}(40) = -0.2(40) + 25 = 17$$

(*b*) $$P = -0.5Q + 48$$

$$\text{TR} = (-0.5Q + 48)Q = -0.5Q^2 + 48Q$$

$$\text{MR} = d\text{TR}/dQ = -Q + 48$$

$$\text{MR}(20) = -(20) + 48 = 28$$

$$\text{MR}(40) = -(40) + 48 = 8$$

(*c*) $$Q = -4P + 240$$

إذا أعطيت دالة الطلب كدالة فى P أوجد أولاً الدالة العكسية ومن ثم اشتق دالة TR . وبإيجاد العكس .

$$P = -0.25Q + 60$$

ومن ثم فإن

$$\text{TR} = (-0.25Q + 60)Q = -0.25Q^2 + 60Q$$

$$\text{MR} = -0.5Q + 60$$

$$\text{MR}(20) = -0.5(20) + 60 = 50$$

$$\text{MR}(40) = -0.5(40) + 60 = 40$$

10.19. لكل من الدوال الاستهلاكية التالية ، استخدم المشتقة لإيجاد الميل الحدى للاستهلاك $\text{MPC} = dC/dY$.

10.19. For each of the following consumption functions, use the derivative to find the marginal propensity to consume $\text{MPC} = dC/dY$.

(*a*) $C = bY + C_0$

$\text{MPC} = dC/dY = b$

(*b*) $C = 0.85Y + 1250$

$\text{MPC} = dC/dY = 0.85$

Optimizing Business and Economic Functions أمثلية الدوال الاقتصادية والإدارية

10.20. المطلوب تعظيم دوال الإيراد الكلى TR والربح الكلى π التالية عن طريق (1) إيجاد القيم الحرجة و (2) اختبار شروط الرتبة الثانية و (3) حساب أقصى إيراد كلى TR وربح كلى π .

10.20. Maximize the following total revenue TR and total profit π functions by (1) finding the critical value(s), (2) testing the second-order conditions, and (3) calculating the maximum TR or π.

(*a*) $\text{TR} = 96Q - 2Q^2$

(1) $\text{TR}' = 96 - 4Q = 0$

$Q = 24$ القيمة الحرجة

(2) $\text{TR}'' = -4 < 0$ محدبة ، نهاية صغرى نسبية

(3) $\text{TR} = 96(24) - 2(24)^2 = 1152$

(*b*) $\pi = -Q^2 + 25Q - 12$

(1) $\pi' = -2Q + 25 = 0$

$Q = 12.5$ القيمة الحرجة

(2) $\pi'' = -2 < 0$ مقعرة ، نهاية عظمى نسبية

(3) $\pi = -(12.5)^2 + 25(12.5) - 12 = 144.25$

(*c*) $\pi = -\frac{1}{3}Q^3 - 7.5Q^2 + 450Q - 200$

(1) $\pi' = -Q^2 - 15Q + 450 = 0$ (10.1)

$-1(Q^2 + 15Q - 450) = 0$ (10.2)

$(Q - 15)(Q + 30) = 0$

القيم الحرجة $Q = 15 \qquad Q = -30$

(2) $\pi'' = -2Q - 15$

مقعرة ، نهاية عظمى نسبية $\pi''(15) = -2(15) - 15 = -45 < 0$

محدبة ، نهاية صغرى نسبية $\pi''(-30) = -2(-30) - 15 = 45 > 0$

إن القيم الحرجة السالبة سيتم تجاهلها لأنه ليس لها معنى اقتصادى .

(3) $\pi = -\frac{1}{3}(15)^3 - 7.5(15)^2 + 450(15) - 200 = 3737.50$

ملاحظة : فى اختبار شروط الرتبة الثانية كما فى الخطوة 2 ، نأخذ دائمًا المشتقة الثانية من المشتقة الأولى (10.1) قبل عملية التحليل للعوامل . خذ المشتقة الثانية من المشتقة الأولى بعد التحليل كما فى (10.2) فتنعكس شروط الرتبة الثانية وتقرر أن الدالة نهاية عظمى عند $Q = -30$ ونهاية صغرى عند $Q = 15$. اختبر ذلك بنفسك .

(*d*) $\pi = -2Q^3 - 15Q^2 + 3000Q - 1200$

(1) $\pi' = -6Q^2 - 30Q + 3000 = 0$

$= -6(Q^2 + 5Q - 500) = 0$

$= -6(Q - 20)(Q + 25) = 0$

القيم الحرجة $Q = 20 \qquad Q = -25$

(2) $\pi'' = -12Q - 30$

مقعرة ، نهاية عظمى نسبية $\pi''(20) = -12(20) - 30 = -270 < 0$

(3) $\pi = -2(20)^3 - 15(20)^2 + 3000(20) - 1200 = 36{,}800$

10.21. من دوال التكاليف الكلية TC التالية (1) أوجد دالة التكلفة المتوسطة AC و (2) القيمة الحرجة عند تدنية AC و (3) التكلفة المتوسطة الأدنى .

10.21. From each of the following total cost TC functions, (1) find the average cost AC function, (2) the critical value at which AC is minimized, and (3) the minimum average cost.

(*a*) $\text{TC} = 2Q^3 - 12Q^2 + 225Q$

(1) $\text{AC} = \dfrac{\text{TC}}{Q} = \dfrac{2Q^3 - 12Q^2 + 225Q}{Q} = 2Q^2 - 12Q + 225$

(2) $\text{AC}' = 4Q - 12 = 0 \qquad Q = 3$

$\text{AC}'' = 4 > 0$ محدبة ، نهاية صغرى نسبية

(3) $\text{AC}(3) = 2(3)^2 - 12(3) + 225 = 207$

(*b*) $\text{TC} = Q^3 - 16Q^2 + 450Q$

(1) $\text{AC} = \dfrac{Q^3 - 16Q^2 + 450Q}{Q} = Q^2 - 16Q + 450$

(2) $\text{AC}' = 2Q - 16 = 0 \qquad Q = 8$

$\text{AC}'' = 2 > 0$ محدبة ، نهاية صغرى نسبية

(3) $\text{AC} = (8)^2 - 16(8) + 450 = 386$

10.22. إذا أعطيت دوال الإيراد الكلى TR والتكلفة الكلية TC لمؤسسات مختلفة . والمطلوب تعظيم الربح π لهذه المؤسسات كما يلى : (1) كون دالة الربح $\pi = \text{TR} - \text{TC}$ و (2) أوجد القيم الحرجة عندما تكون π عند نهاية نسبية واختبر شرط الرتبة الثانية و (3) احسب الربح الأمثل .

10.22. Given the following total revenue TR and total cost TC functions for different firms, maximize profit π for the firms as follows: (1) set up the profit function $\pi = \text{TR} - \text{TC}$, (2) find the critical value(s) where π is at a relative extremum and test the second-order condition, and (3) calculate the maximum profit.

(*a*) $\text{TR} = 440Q - 3Q^2 \qquad \text{TC} = 14Q + 225$

(1) $\pi = 440Q - 3Q^2 - (14Q + 225)$

$\pi = -3Q^2 + 426Q - 225$

(2) $\pi' = -6Q + 426 = 0$

$Q = 71$ القيمة الحرجة

$\pi'' = -6 < 0$ مقعرة ، نهاية عظمى نسبية

(3) $\pi = -3(71)^2 + 426(71) - 225 = 14,898$

(*b*) $\text{TR} = 800Q - 7Q^2 \qquad \text{TC} = 2Q^3 - Q^2 + 80Q + 150$

(1) $\pi = 800Q - 7Q^2 - (2Q^3 - Q^2 + 80Q + 150)$

$= -2Q^3 - 6Q^2 + 720Q - 150$

(2) $\pi' = -6Q^2 - 12Q + 720 = 0 \qquad (10.3)$

$= -6(Q^2 + 2Q - 120) = 0$

$= -6(Q - 10)(Q + 12) = 0$

$Q = 10 \qquad Q = -12$ القيم الحرجة

خذ المشتقة الثانية من (10.3) مباشرة ، كما هو واضح فى المسألة 10.20(*c*) وأهمل كل القيم الحرجة السالبة .

$\pi'' = -12Q - 12$

$\pi''(10) = -12(10) - 12 = -132 < 0$ مقعرة ، نهاية عظمى نسبية

(3) $\pi = -2(10)^3 - 6(10)^2 + 720(10) - 150 = 4450$

(*c*) $\text{TR} = 3200Q - 9Q^2, \qquad \text{TC} = Q^3 - 1.5Q^2 + 50Q + 425$

(1) $\pi = 3200Q - 9Q^2 - (Q^3 - 1.5Q^2 + 50Q + 425)$

$= -Q^3 - 7.5Q^2 + 3150Q - 425$

(2) $\pi' = -3Q^2 - 15Q + 3150 = 0$

$= -3(Q^2 + 5Q - 1050) = 0$

$= -3(Q - 30)(Q + 35) = 0$

$Q = 30 \qquad Q = -35$ القيم الحرجة

$\pi'' = -6Q - 15$

$\pi''(30) = -6(30) - 15 = -195 < 0$ مقعرة ، نهاية عظمى نسبية

(3) $\pi = -(30)^3 - 7.5(30)^2 + 3150(30) - 425 = 60,325$

(*d*) $\text{TR} = 500Q - 11Q^2, \qquad \text{TC} = 3Q^3 - 2Q^2 + 68Q + 175$

(1) $\pi = 500Q - 11Q^2 - (3Q^3 - 2Q^2 + 68Q + 175)$

$$= -3Q^3 - 9Q^2 + 432Q - 175$$

(2) $\pi' = -9Q^2 - 18Q + 432 = 0$

$$= -9(Q^2 + 2Q - 48) = 0$$

$$= -9(Q - 6)(Q + 8) = 0$$

$Q = 6 \qquad Q = -8$ القيم الحرجة

$$\pi'' = -18Q - 18$$

$\pi''(6) = -18(6) - 18 = -126 < 0$ مقعرة ، نهاية عظمى نسبية

(3) $\pi = -3(6)^3 - 9(6)^2 + 432(6) - 175 = 1445$

10.23. أثبت أن الإيراد الحدى (MR) يجب أن يساوى التكلفة الحدية (MC) عند مستوى الناتج الذى يعظم الربح . بالتعريف $\pi = \text{TR} - \text{TC}$.

10.23. Show that marginal revenue (MR) must equal marginal cost (MC) at the profit-maximizing level of output. By definition, $\pi = \text{TR} - \text{TC}$.

نوجد المشتقة ونضعها مساوية للصفر طالما أن $d\pi/dQ$ يجب أن تساوى صفراً حتى تكون π عند نهاية عظمى .

$$\frac{d\pi}{dQ} = \frac{d\text{TR}}{dQ} - \frac{d\text{TC}}{dQ} = 0$$

وحيث نعرف أن $d\text{TR}/dQ = \text{MR}$ ، $d\text{TC}/dQ = \text{MC}$

$$\frac{d\text{TR}}{dQ} = \frac{d\text{TC}}{dQ}$$

$\text{MR} = \text{MC}$ وهو المطلوب إثباته

10.24. استخدم طريقة $\text{MR} = \text{MC}$ من أجل (*a*) تعظيم الربح π و (*b*) لفحص شروط الرتبة الثانية ، إذا أعطيت .

10.24. Use the $\text{MR} = \text{MC}$ method to (*a*) maximize profit π, and (*b*) check the second-order conditions, given

$$\text{TR} = 800Q - 7Q^2 \qquad \text{TC} = 2Q^3 - Q^2 + 80Q + 150$$

(*a*) $\text{MR} = \text{TR}' = 800 - 14Q \qquad \text{MC} = \text{TC}' = 6Q^2 - 2Q + 80$

وبوضع $\text{MR} = \text{MC}$ لتعظيم الربح .

$$800 - 14Q = 6Q^2 - 2Q + 80$$

نقوم بالحل بالنسبة إلى Q بنقل كل الحدود إلى الطرف الأيمن .

$$6Q^2 + 12Q - 720 = 0$$

$$6(Q^2 + 2Q - 120) = 0$$

$$6(Q - 10)(Q + 12) = 0$$

$Q = 10 \qquad Q = -12$ القيم الحرجة

(*b*) $\text{TR}'' = -14 \qquad \text{TC}'' = 12Q - 2$

وطالما أن $\pi = \text{TR} - \text{TC}$ والهدف هو تعظيم الربح π فيجب أن نتأكد من طرح "TC من "TR أو سنعكس

شروط الرتبة الثانية ونختار القيم الحرجة غير الصحيحة .

$$\pi'' = \text{TR}'' - \text{TC}''$$

$$= -14 - 12Q + 2 = -12Q - 12$$

$$\pi''(10) = -12(10) - 12 = -132 < 0$$ مقعرة ، نهاية عظمى نسبية

قارن هذه النتائج مع المسألة (10–22)(*b*) .

10.25. أعد حل المسألة 10.24 . إذا أعطيت :

10.25. Redo Problem 10.24, given

$$\text{TR} = 500Q - 11Q^2 \qquad \text{TC} = 3Q^3 - 2Q^2 + 68Q + 175$$

(*a*)
$$\text{MR} = \text{TR}' = 500 - 22Q \qquad \text{MC} = \text{TC}' = 9Q^2 - 4Q + 68$$

وبوضع MR = MC

$$500 - 22Q = 9Q^2 - 4Q + 68$$

وبنقل كل شيء إلى اليمين .

$$9Q^2 + 18Q - 432 = 0$$

$$9(Q^2 + 2Q - 48) = 0$$

$$9(Q - 6)(Q + 8) = 0$$

$$Q = 6 \qquad Q = -8$$ القيم الحرجة

(*b*)
$$\text{TR}'' = -22 \qquad \text{TC}'' = 18Q - 4$$

تأكد من طرح ″TC من ″TR بدون عكس شروط الدرجة الثانية ، تذكر أن

$$\pi'' = \text{TR}'' - \text{TC}''$$

$$\pi'' = -22 - 18Q + 4 = -18Q - 18$$

$$\pi''(6) = -18(6) - 18 = -126 < 0$$ مقعرة ، نهاية عظمى نسبية

قارن هذه النتائج بالمسألة (10–22)(*d*) .

Relationship Between Functions and Graphs العلاقة بين الدوال والرسوم البيانية

10.26. منحنى الإنتاج الكلى TP يمثل دالة الإنتاج التى تسمح بتغير كمية أحد عوامل الإنتاج (وليكن العمل) مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة (رأس المال والأرض) . فإذا أعطيت $\text{TP} = 562.5L^2 - 15L^3$. ارسم مخططًا بيانيًا (*a*) للربح الكلى TP . (*b*) للربح المتوسط AP . (*c*) لمنحنيات الإنتاج الحدى (MP) . (*d*) واشرح العلاقة بينهم .

10.26. A *total product curve* TP of an input is a production function which allows the amounts of one input (say, labor) to vary while holding the other inputs (capital, land) constant. Given $\text{TP} = 562.5L^2 - 15L^3$, sketch a graph of the (*a*) total profit (TP), (*b*) average profit (AP), and (*c*) marginal product (MP) curves and (*d*) explain the relationships among them.

(*a*) اختبر شروط الرتبة الأولى لإيجاد القيم الحرجة .

$$\mathrm{TP}' = 1125L - 45L^2 = 0$$

$$45L(25 - L) = 0$$

القيم الحرجة $L = 25 \qquad L = 0$

افحص شروط الرتبة الثانية .

$$\mathrm{TP}'' = 1125 - 90L$$

محدبة ، نهاية صغرى نسبية $\mathrm{TP}''(0) = 1125 > 0$

مقعرة ، نهاية عظمى نسبية $\mathrm{TP}''(25) = -1125 < 0$

نوجد نقاط التحول

$$\mathrm{TP}'' = 1125 - 90L = 0$$

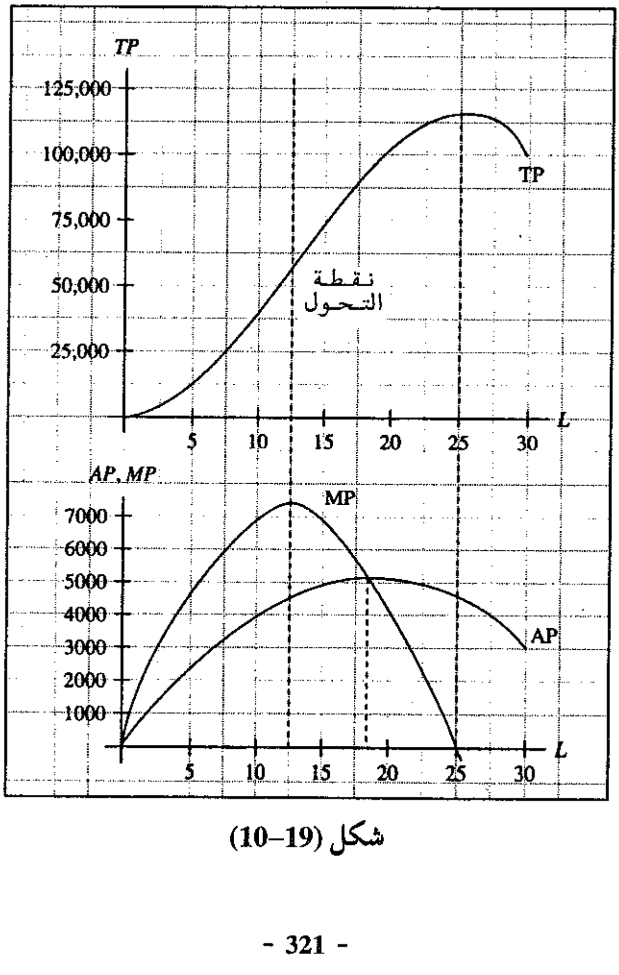
$$L = 12.5$$

إذا كانت $L < 12.5$

محدبة $\mathrm{TP}'' > 0$

إذا كانت $L > 12.5$

مقعرة $\mathrm{TP}'' < 0$



شكل (10–19)

(*b*) $$AP_L = \frac{TP}{L} = \frac{562.5L^2 - 15L^3}{L} = 562.5L - 15L^2$$

نوجد النهايات النسبية .

$$AP'_L = 562.5 - 30L = 0$$

$$L = 18.75$$

$$AP''_L = -30 < 0$$ مقعرة ، نهاية عظمى نسبية

$$AP_L(18.75) \approx 5273.43$$

(*c*) تذكر أن $MPL = TP' = 1125L - 45L^2$ وأن

$$MP'_L = 1125 - 90L = 0$$

$$L = 12.5$$

$$MP''_L = -90 < 0$$ مقعرة ، نهاية عظمى نسبية

$$MP_L(12.5) = 7031.25$$

(*d*) نلاحظ أن (1) MP_L تتزايد عندما تكون TP محدبة ومن ثم تتزايد بمعدل متزايد ، وتكون عند قيمة قصوى نسبية عندما تكون TP عند نقطة التحول ، وتتناقص عندما تكون TP مقعرة ومن ثم تتزايد بمعدل متناقص . (2) TP تتزايد فى المدى الذى تكون فيه MP_L موجبة وتكون عند قيمة قصوى عندما تكون $MP_L = 0$ وتتناقص عندما تكون MP_L سالبة . (3) AP_L تتزايد عندما $MP_L > AP_L$ وتتناقص عندما $MP_L < AP_L$ ، وتكون عند قيمة قصوى عندما $MP_L = AP_L$.

10.27. إذا أعطيت $y = ax^2 + bx + c$ أثبت أن إحداثيات قمة الرأس للقطع المكافئ هى $[-b/2a, (4ac - b^2)/4a]$ كما أكدنا فى القسم 3.6 .

أن قمة الرأس هى نقطة عظمى أو صغرى للقطع المكافئ . أوجد النقطة الحرجة x عند تعظيم الدالة المعطاة .

$$y' = 2ax + b = 0$$

$$x = -\frac{b}{2a}$$

وبالتعويض $x = -\frac{b}{2a}$ فى الدالة ونحل بالنسبة إلى y .

$$y = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$y = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} \qquad \text{Q. E. D}$$

مسائل إضافية

Increasing and Decreasing Functions الدوال المتزايدة والمتناقصة

10.28. حدد ما إذا كانت الدوال التالية دوال متزايدة أو متناقصة عند النقاط المحددة .

10.28. Indicate whether the following functions are increasing or decreasing at the indicated points:

(*a*) $f(x) = 5x^2 - 4x - 89$ عند $x = 3$ (*b*) $f(x) = 8x^3 + 6x^2 - 15x$ عند $x = -4$

(*c*) $f(x) = -4x^3 + 2x^2 - 7x + 9$ عند $x = 5$ (*d*) $f(x) = 2x^3 - 17x^2 + 5x + 127$ عند $x = 2$

Concavity and Convexity التقعر والتحدب

10.29. حدد ما إذا كانت الدوال التالية دوال مقعرة أو محدبة عند $x = 3$.

10.29. Determine whether the following functions are concave or convex at $x = 3$.

(*a*) $f(x) = 7x^2 + 19x - 24$ (*b*) $f(x) = 5x^3 - 81x^2 + 11x + 97$

(*c*) $f(x) = (4 - 9x)^3$ (*d*) $f(x) = (3x^4 - 7)^2$

Relative Extrema and Inflection Points النهايات النسبية ونقاط التحول

10.30. أوجد كل النهايات النسبية ونقاط التحول لكل من الدوال التالية ثم ارسم مخططًا بيانيًا لكل منها :

10.30. Find all relative extrema and inflection points for each of the following functions and sketch the graphs on your own.

(*a*) $f(x) = 4x^3 - 48x^2 - 240x + 29$ (*b*) $f(x) = (x + 6)^3$

(*c*) $f(x) = -2x^3 + 24x^2 + 288x - 35$ (*d*) $f(x) = (2x + 7)^4$

(*e*) $f(x) = -5x^3 + 135x^2 - 675x + 107$ (*f*) $f(x) = -3(4x - 11)^6$

(*g*) $f(x) = 3x^3 - 58.5x^2 + 360x - 49$ (*h*) $f(x) = 2(5x - 13)^5$

Optimization of Functions أمثلية الدوال

10.31. أوجد أمثلية الدوال التالية ثم اختبر شروط الرتبة الثانية عند النقاط الحرجة للتمييز بين النهايات العظمى والصغرى النسبية .

10.31. Optimize the following functions and test the second-order conditions at the critical points to distinguish between a relative maximum and a relative minimum.

(*a*) $y = 8x^2 - 208x + 73$ (*b*) $y = -12x^2 + 528x + 95$

(*c*) $y = -2x^3 + 69x^2 + 1260x - 9$ (*d*) $y = x^3 + 27x^2 + 96x - 47$

(*e*) $y = 3x^3 - 45x^2 - 675x + 13$ (*f*) $y = -4x^3 + 186x^2 - 1008x + 25$

(*g*) $y = x^4 + 36x^3 + 280x^2 - 79$ (*h*) $y = 4x^4 - 48x^3 - 288x^2 + 129$

Marginal and Average Functions الدوال الحدية والمتوسطة

10.32. أوجد الدوال الحدية والمتوسطة لكل من الدوال الكلية التالية :

10.32. Find the marginal and average functions for each of the following total functions:

(*a*) $\mathrm{TR} = -Q^2 + 96Q$ (*b*) $\mathrm{TR} = -3Q^2 + 198Q$

(*c*) $\mathrm{TC} = Q^2 + 3Q + 55$ (*d*) $\mathrm{TC} = 0.5Q^2 + 2Q + 69$

10.33. أوجد دوال الإيراد الحدى المقترنة بكل من دوال الطلب التالية :

10.33. Find the marginal revenue functions associated with each of the following demand functions:

(*a*) $P = -0.3Q + 228$ (*b*) $P = -8Q + 1465$

(*c*) $P = -2.5Q + 145$ (*d*) $P = -4Q + 875$

Optimization of Business and Economic Functions أمثلية الدوال الاقتصادية والإدارية

10.34. أوجد النقاط الحرجة التي يتم عندها تعظيم دوال الإيراد الكلى TR والربح π التالية . وتحقق من شروط الرتبة الثانية .

10.34. Find the critical points at which each of the following total revenue TR functions and profit π functions is maximized. Check the second-order conditions on your own.

(*a*) $\text{TR} = -3Q^2 + 210Q$ (*b*) $\pi = -2.5Q^2 + 315Q - 16$
(*c*) $\pi = -3Q^3 - 18Q^2 + 2880Q - 125$ (*d*) $\pi = -2Q^3 - 9Q^2 + 1080Q - 48$

10.35. أوجد النقاط الحرجة التي يتم عندها تدنية دوال التكلفة المتوسطة AC التالية وتحقق من شروط الرتبة الثانية :

10.35. Find the critical points at which each of the following average cost AC functions is minimized. Check the second-order conditions on your own.

(*a*) $\text{AC} = 3Q^2 - 18Q + 585$ (*b*) $\text{AC} = 2.25Q^2 - 27Q + 768$

10.36. أوجد النقاط الحرجة التي يتم عندها تعظيم الربح لكل من دوال الإيراد الكلى TR والتكلفة الكلية TC التالية : وتحقق من شروط الرتبة الثانية .

10.36. Find the critical points at which profit π is maximized for each of the following firms given the total revenue TR and total cost TC functions. Check the second-order conditions on your own.

(*a*) $\text{TR} = 520Q - 2Q^2$ $\text{TC} = 28Q + 176$ (*b*) $\text{TR} = 693Q - 4Q^2$ $\text{TC} = 33Q + 125$
(*c*) $\text{TR} = 985Q - 17Q^2$ $\text{TC} = 5Q^3 - 2Q^2 + 40Q + 167$
(*d*) $\text{TR} = 3875Q - 27Q^2$ $\text{TC} = 4Q^3 - 3Q^2 + 35Q + 223$
(*e*) $\text{TR} = 1526Q - 9Q^2$ $\text{TC} = Q^3 - 1.5Q^2 + 26Q + 127$
(*f*) $\text{TR} = 4527Q - 18Q^2$ $\text{TC} = 2Q^3 - 3Q^2 + 27Q + 324$

حل المسائل الإضافية

10.28. (*a*) متزايدة (*b*) متزايدة (*c*) متناقصة (*d*) متناقصة

10.29. (*a*) محدبة (*b*) مقعرة (*c*) مقعرة (*d*) محدبة

10.30. (*a*) $x = -2$ نهاية عظمى نسبية ، $x = 4$ نقطة تحول ، نهاية صغرى نسبية .
(*b*) $x = -6$ نقطة تحول ، ولا توجد نهاية صغرى أو عظمى نسبية .
(*c*) $x = -4$ نهاية صغرى نسبية ، $x = 4$ نقطة تحول ، $x = 12$ نهاية عظمى نسبية .
(*d*) $x = -3.5$ نقطة تحول ، ولا توجد نهاية صغرى أو عظمى نسبية .
(*e*) $x = 3$ نهاية صغرى نسبية ، $x = 9$ نقطة تحول ، $x = 15$ نهاية عظمى نسبية .
(*f*) $x = 2.75$ نهاية عظمى نسبية ، ولا توجد نهاية صغرى أو نقطة تحول .
(*g*) $x = 5$ نهاية عظمى نسبية ، $x = 6.5$ نقطة تحول ، $x = 8$ نهاية صغرى نسبية .
(*h*) $x = 2.6$ نقطة تحول ، ولا توجد نهاية صغرى أو عظمى نسبية .

10.31. (*a*) $x = 13$ نهاية صغرى نسبية ، (*b*) $x = 22$ نهاية عظمى نسبية .
(*c*) $x = -7$ نهاية صغرى نسبية ، $x = 30$ نهاية عظمى نسبية .
(*d*) $x = -16$ نهاية صغرى نسبية ، $x = -2$ نهاية عظمى نسبية .
(*e*) $x = -5$ نهاية صغرى نسبية ، $x = 15$ نهاية عظمى نسبية .

(*f*) $x = 3$ نهاية صغرى نسبية ، $x = 28$ نهاية عظمى نسبية .

(*g*) $x = -20$ نهاية صغرى نسبية ، $x = -7$ نهاية عظمى نسبية ، $x = 0$ نهاية صغرى نسبية .

(*h*) $x = -3$ نهاية صغرى نسبية ، $x = 0$ نهاية عظمى نسبية ، $x = 12$ نهاية صغرى نسبية .

10.32. (*a*) $\text{MR} = -2Q + 96$, $\text{AR} = -Q + 96$ (*b*) $\text{MR} = -6Q + 198$, $\text{AR} = -3Q + 198$
(*c*) $\text{MC} = 2Q + 3$, $\text{AC} = Q + 3 + 55/Q$ (*d*) $\text{MC} = Q + 2$, $\text{AC} = 0.5Q + 2 + 69/Q$

10.33. (*a*) $\text{MR} = -0.6Q + 228$ (*b*) $\text{MR} = -16Q + 1465$
(*c*) $\text{MR} = -5Q + 145$ (*d*) $\text{MR} = -8Q + 875$

10.34. (*a*) $Q = 35$ (*b*) $Q = 63$ (*c*) $Q = 16$ (*d*) $Q = 12$

10.35. (*a*) $Q = 3$ (*b*) $Q = 6$

10.36. (*a*) $Q = 123$ (*b*) $Q = 82.5$ (*c*) $Q = 7$
(*d*) $Q = 16$ (*e*) $Q = 20$ (*f*) $Q = 25$

الفصل الحادى عشر

الدوال الأسية واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Functions

11.1 الدوال الأسية Exponential Functions

تعاملت الفصول السابقة بصورة أساسية مع دوال القوى مثل $y = x^a$ حيث يرفع الأساس المتغير x إلى أس ثابت a . وفى هذا الفصل سنقدم دالة جديدة ومهمة حيث يرفع الأساس الثابت a إلى أس متغير x . وهذه تسمى الدالة الأسية وتعرف كالتالى :

$$y = a^x, \qquad a > 0, \qquad a \neq 1$$

وعمومًا نستخدم هذه الدوال للتعبير عن معدلات النمو والتآكل مثل الفائدة المركبة والإهلاك . وتتميز الدوال الأسية بالخصائص العامة التالية :

إذا أعطيت أن : $y = a^x \qquad a > 0 \qquad a \neq 1$

1. أن نطاق هذه الدالة هو فئة جميع الأعداد الحقيقية ، وأن مدى الدالة هو فئة جميع الأعداد الحقيقية الموجبة أى أن $y > 0$ لجميع قيم x بما فيها $x \leq 0$.
2. إذا كانت $a > 1$ فإن الدالة متزايدة ومحدبة وإذا كانت $0 < a < 1$ فإن الدالة متناقصة ومحدبة .
3. عند $x = 0$ فإن $y = 1$ ومستقلة عن الأساس .

انظر المثال 1 والمسائل 11.1 و 11.2 ، ولمراجعة الأسس انظر القسم 1.1 والمسألة 1.1 .

مثال 1 : إذا أعطيت (a) $y = 3^x$ و (b) $y = 3^{-x} = (\frac{1}{3})^x$ فإن الخصائص السابقة للدوال الأسية يمكن أن ترى من الجداول والرسوم البيانية للدوال فى الشكل (11-1) . أما الدوال الأسية الأكثر تعقيدًا فيمكن أن تقدر بمساعدة المفتاح $\boxed{y^x}$ للحاسبات الشخصية .

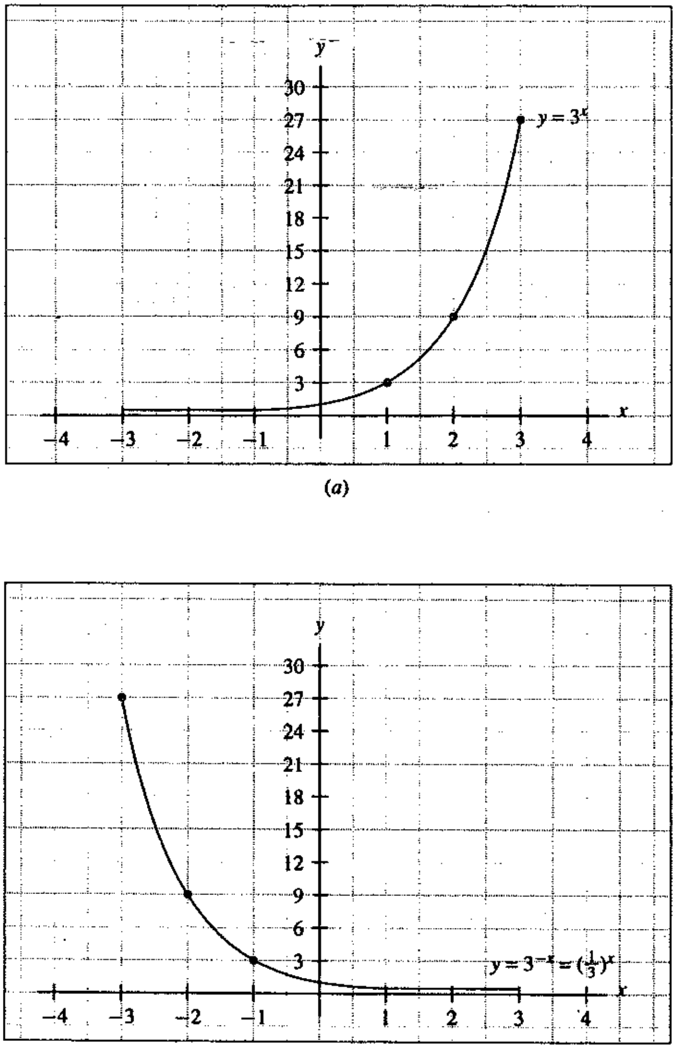
EXAMPLE 1. Given (*a*) $y = 3^x$ and (*b*) $y = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, the above properties of exponential functions can readily be seen from the tables and graphs of the functions in Fig. 11-1. More complicated exponential functions are estimated with the help of the $\boxed{y^x}$ key on pocket calculators.

(*a*) $y = 3^x$

x	y
-3	$\frac{1}{27}$
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27

(*b*) $y = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	y
-3	27
-2	9
-1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{27}$



(a)

(b)

شكل (11-1)

11.2 الدوال اللوغاريتمية Logarithmic Functions

إن إبدال متغيرات الدالة الأسية f التى تأخذ الصورة $y = a^x$ يؤدى إلى خلق دالة جديدة g تأخذ الصورة $x = a^y$ بحيث إن أى زوج مرتب للأعداد فى f سوف يوجد أيضًا فى g فى الرتبة المعكوسة . فمثلاً إذا كانت $f(2) = 9$ فإن $g(9) = 2$ ، وإذا كانت $f(3) = 27$ فإن $g(27) = 3$. وتكتب الدالة الجديدة g ، معكوس الدالة مع الأساس a على الشكل التالى :

$$y = \log_a x \qquad a > 0, \qquad a \neq 1$$

$\log_a x$ هو الأس (القوة) الذى يجب أن يرفع إليه الأساس a للحصول على القيمة x . وأن أى عدد موجب ما عدا 1 يمكن أن يخدم كأساس للوغاريتم . واللوغاريتم الاعتيادى (common logarithm) للقيمة x الذى يكتب $\log_{10} x$ أو ببساطة $\log x$ هو الأس (القوة) الذى يجب أن يرفع إليه الأساس 10 للحصول على القيمة x . وتتميز

اللوغاريتمات بالخصائص التالية إذا أعطيت :

$$y = \log_a x \qquad a > 0, \qquad a \neq 1$$

1. أن نطاق هذه الدالة هو فئة جميع الأعداد الحقيقية الموجبة ، وأن مدى الدالة هو فئة جميع الأعداد الحقيقية ، فهى معكوس الدالة الأسية .
2. إذا كانت $a > 1$ فإن الدالة $g (x)$ متزايدة ومقعرة . وإذا كانت $0 < a < 1$ فإن الدالة $g (x)$ متناقصة ومحدبة .
3. عند $x = 1$ فإن $y = 0$ ومستقلة عن الأساس .

انظر الأمثلة من 2 إلى 4 والمسائل 11.5 و 11.6 .

مثال 2 : الرسم البيانى للدالتين f و g حيث تم إبدال المتغيرات x ، y مثل $y=(\frac{1}{2})^x$ و $x=(\frac{1}{2})^y$ فى الشكل (11.2) الذى يبين أن إحدى الدوال هى صورة عاكسة للدالة الأخرى مع الخط 45° حيث $y=x$ مثل إذا كانت $f(x)=y$ فإن $g (y)=x$. وتذكر أن $x=(\frac{1}{2})^y$ يكافئ ويعبر عنه بصفة عامة مثل $y=\log_{1/2} x$.

EXAMPLE 2. A graph of two functions f and g in which x and y are interchanged, such as $y = (\frac{1}{2})^x$ and $x = (\frac{1}{2})^y$ in Fig. 11-2, shows that one function is a *mirror image* of the other along the 45° line $y = x$, such that if $f(x) = y$, then $g(y) = x$. Recall that $x = (\frac{1}{2})^y$ is equivalent to and generally expressed as $y = \log_{1/2} x$.

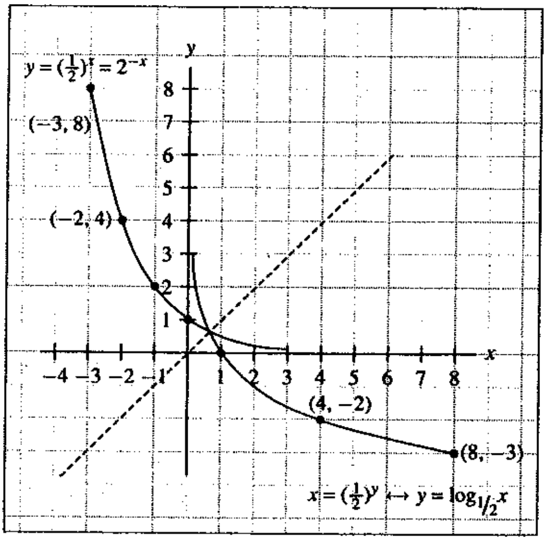
$$(a)\ y = (\tfrac{1}{2})^x \qquad (b)\ y = \log_{1/2} x \longleftrightarrow x = (\tfrac{1}{2})^y$$

(*a*)

x	y
−3	8
−2	4
−1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

(*b*)

x	y
8	−3
4	−2
2	−1
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	3



شكل (11-2)

مثال 3 : بمعلومية أن اللوغاريتم الاعتيادى لـ x هو القوة التى يجب أن يرفع إليها الأساس 10 للحصول على القيمة x فإن هذا يتيح ما يلى :

EXAMPLE 3. Knowing that the common logarithm of x is the power to which 10 must be raised to get x, it follows that

$\log 10 = 1$ لأن $10^{(1)} = 10$ $\qquad$ $\log 1 = 0$ لأن $10^0 = 1$

$\log 100 = 2$ لأن $10^2 = 100$ $\qquad$ $\log .1 = -1$ لأن $10^{-1} = .1$

$\log 1000 = 3$ لأن $10^3 = 1000$ $\qquad$ $\log .01 = -2$ لأن $10^{-2} = .01$

مثال 4 : للأعداد التى هى قوى تامة للأساس فإن اللوغاريتمات يمكن أن تحسب بسهولة دون الاستعانة بالآلة الحاسبة .

EXAMPLE 4. For numbers that are exact powers of the base, logs are easily calculated without the aid of calculators.

$\log_8 64 = 2$ لأن $8^2 = 64$ $\qquad$ $\log_3 81 = 4$ لأن $3^4 = 81$

$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$ لأن $25^{1/2} = 5$ $\qquad$ $\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$ لأن $27^{1/3} = 3$

$\log_2 \frac{1}{16} = -4$ لأن $2^{-4} = \frac{1}{16}$ $\qquad$ $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ لأن $3^{-2} = \frac{1}{9}$

للأعداد التى لا تكون قوى تامة للأساس فإن اللوغاريتمات يمكن أن تحسب بالاستعانة بالآلة الحاسبة . انظر القسم 1.7.9 .

11.3 خصائص الأسس واللوغاريتمات

Properties of Exponents and Logarithms

بافتراض أن a ، $b > 0$ وأن a ، $b \neq 1$ وأن x و y أى أعداد حقيقية .

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $1/a^x = a^{-x}$
3. $a^x/a^y = a^{x-y}$
4. $(a^x)^y = a^{xy}$
5. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
6. $a^x/b^x = (a/b)^x$

بافتراض أن a ، x ، y أعداد حقيقية موجبة ، وأن n عدد حقيقى و $a \neq 1$.

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a x^n = n \log_a x$
4. $\log_a(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}(\log_a x)$

لقد تناولنا خصائص الأسس فى القسم 1.1 والمسألة 1.1 . أما خصائص اللوغاريتمات فقد عولجت فى المثال 5 والمسائل من 11.12 إلى 11.16 .

جدول (11-1)

x	$\log x$	x	$\log x$	x	$\log x$	x	$\log x$
1	0.0000	6	0.7782	11	1.0414	16	1.2041
2	0.3010	7	0.8451	12	1.0792	27	1.4314
3	0.4771	8	0.9031	13	1.1139	36	1.5563
4	0.6021	9	0.9542	14	1.1461	49	1.6902
5	0.6990	10	1.0000	15	1.1761	64	1.8062

مثال 5 : المسائل المبينة أدناه هى مسائل بسيطة وتم حلها بطرق اللوغاريتمات وهى معروضة فى الجدول 11.1 بالترتيب لبيان خصائص اللوغاريتمات .

EXAMPLE 5. The problems below are kept simple and solved by means of the logarithms given in Table 11.1 in order to illustrate the properties of logarithms.

(*a*) $x = 3 \cdot 12$

$\log x = \log 3 + \log 12$

(*b*) $x = 64 \div 4$

$\log x = \log 64 - \log 4$

$$\log x = 0.4771 + 1.0792$$
$$\log x = 1.5563$$
$$x = 36$$

$$\log x = 1.8062 - 0.6021$$
$$\log x = 1.2041$$
$$x = 16$$

(*c*) $x = 7^2$

$$\log x = 2\log 7$$
$$\log x = 2(0.8451)$$
$$\log x = 1.6902$$
$$x = 49$$

(*d*) $x = \sqrt[3]{27}$

$$\log x = \tfrac{1}{3}\log 27$$
$$\log x = \tfrac{1}{3}(1.4314)$$
$$\log x = 0.4771$$
$$x = 3$$

11.4 الدوال الأسية واللوغاريتمية الطبيعية
Natural Exponents and Logarithms Functions

إن الأساس الذى يستخدم غالبًا للدوال الأسية واللوغاريتمية هو العدد غير النسبى e . ويعبر عنه رياضيًا على النحو التالى :

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828 \qquad (11.1)$$

الدوال الأسية التى أساسها e تسمى الدوال الأسية الطبيعية وتكتب $y = e^x$ ، والدوال اللوغاريتمية التى أساسها e تسمى الدوال اللوغاريتمية الطبيعية وتكتب $y = \log_e x$ أو $\text{Ln}\, x$. وأن $\ln x$ هى ببساطة الأس أو القوة التى يجب أن يرفع إليها الأساس e للحصول على قيمة x .

وكما هو الحال مع الدوال الأسية واللوغاريتمية الأخرى ذات الأساس الاعتيادى حيث تكون إحدى الدوال معكوس للدالة الأخرى بحيث أن الأزواج المرتبة (a, b) سوف تنتمى إلى فئة e^x إذا كانت فقط (b, a) تنتمى إلى فئة $\ln x$ ، فإن الدوال الأسية واللوغاريتمية تتبع نفس القواعد مثل الدوال الأسية واللوغاريتمية الأخرى والتى قدرت بمساعدة الجداول أو المفاتيح $\boxed{e^x}$ و $\boxed{\ln x}$ فى الآلة الحاسبة .

انظر الأقسام 1.7.10 و 1.7.12 والمسائل 11.3 و 11.4 و 11.6 .

11.5 حل الدوال الأسية واللوغاريتمية الطبيعية
Solving Natural Exponential and Logarithms Functions

طالما أن الدوال الأسية الطبيعية والدوال اللوغاريتمية الطبيعية هى معكوس لبعضها الآخر فإن إحداهما بصفة عامة تساعد فى حل الأخرى . وحيث إن $\ln x$ تعبر عن القوة التى يجب أن يرفع إليها الأساس e للحصول على قيمة x فهذا يستتبع أن :

1. e المرفوعة للوغاريتم الطبيعى للثابت $(a > 0)$ أو للمتغير $(x > 0)$ أو لدالة المتغير $(f(x) > 0)$ يجب أن تساوى ذلك الثابت أو المتغير أو دالة المتغير :

$$e^{\ln a} = a \qquad e^{\ln x} = x \qquad e^{\ln f(x)} = f(x) \qquad (11.2)$$

2. وبالعكس فإن أخذ اللوغاريتم الطبيعى لـ e المرفوع لقوى ثابتة أو متغيرة أو دالة المتغير يجب أيضًا أن تساوى ذلك الثابت أو المتغير أو دالة المتغير .

$$\ln e^{a} = a \qquad \ln e^{x} = x \qquad \ln e^{f(x)} = f(x) \tag{11.3}$$

انظر المثال 6 والمسائل 11.18 و 11.19 .

مثال 6 : الأسس التى حددت فى (11.2) و (11.3) استخدمت أدناه لحل المعادلات المعطاة بالنسبة إلى x .

EXAMPLE 6. The principles set forth in (*11.2*) and (*11.3*) are used below to solve the given equations for x.

(*a*) $7.5e^{x-3} = 150$

نحل المقدار جبريًا بالنسبة إلى e^{x-3} .

$$7.5e^{x-3} = 150$$

$$e^{x-3} = 20$$

نأخذ اللوغاريتم الطبيعى لكلا الطرفين من أجل حذف e .

$$\ln e^{x-3} = \ln 20$$

$$x - 3 = \ln 20$$

$$x = \ln 20 + 3$$

أدخل العدد 20 فى الآلة الحاسبة ثم اضغط المفتاح $\boxed{\ln x}$ لإيجاد $\ln 20 = 2.99573$ ومن ثم نعوض بالقيمة ونوجد الحل .

$$x = 2.99573 + 3 = 5.99573$$

(*b*) $4 \ln x + 9 = 30.6$

نحل المقدار جبريًا بالنسبة إلى $\ln x$.

$$4 \ln x = 21.6$$

$$\ln x = 5.4$$

نضع كلا الطرفين للمعادلة كأسس إلى e من أجل حذف اللوغاريتم الطبيعى $\ln x$.

$$e^{\ln x} = e^{5.4}$$

ومن (*11.2*)

$$x = e^{5.4}$$

ندخل العدد 5.4 فى الآلة الحاسبة ثم نضغط المفتاح $\boxed{e^{x}}$ لإيجاد $e^{5.4} = 221.40642$ ومن ثم نعوض .

$$x = 221.40642$$

ملاحظة : فى كثير من الآلات الحاسبة المفتاح $\boxed{e^{x}}$ هو العكس (نقل أو عملية ثانية) للمفتاح $\boxed{\ln x}$ ولكى يعمل المفتاح $\boxed{e^{x}}$ لابد وأن نضغط أولاً المفتاح $\boxed{\text{INV}}$ ($\boxed{\text{Shift}}$ أو $\boxed{\text{2dF}}$) ثم نتبع بالمفتاح $\boxed{\ln x}$.

11.6 التحويل اللوغاريتمى للدوال غير الخطية

Logarithmic Transformation of nonlinear Functions

يعتمد الجبر الخطى وتحليل الانحدار على استخدام نظرية المربعات الصغرى العادية أو نظرية المربعات

الصغرى ذات المرحلتين ، والأدوات الاعتيادية فى التحليل الاقتصادى تفترض دوالاً أو معادلات خطية . وبعض الدوال غير الخطية الهامة مثل دوال إنتاج كوب - دوجلاس من السهل تحويلها إلى دوال خطية عن طريق التحويل اللوغاريتمى . فإذا أعطيت دالة إنتاج كوب - دوجلاس العامة :

$$q = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

ومن خصائص اللوغاريتمات نجد أن :

$$\ln q = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L \qquad (11.4)$$

وهى دالة خطية لوغاريتمية . فالتحويل الخطى لدالة إنتاج كوب - دوجلاس مثل التى فى *(11.4)* له خاصية إضافية جيدة حيث إن تقديرات α ، β توفر مقاييس مباشرة لمرونة K و L على التوالى .

11.7 مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية الطبيعية

Derivatives of Natural Exponential and Logarithmic Functions

قواعد التفاضل للدوال الأسية واللوغاريتمية الطبيعية معروضة أدناه ومبينة فى الأمثلة 7 و 8 وتم التعامل معها فى المسائل 11.20 إلى 11.23 .

1. إذا أعطيت أن : $f(x) = e^{g(x)}$ حيث $g(x)$ دالة قابلة للتفاضل ومتشقاتها هى :

$$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) \qquad (11.5)$$

وباختصار فإن مشتقة الدالة الأسية الطبيعية تساوى الدالة الأسية الطبيعية الأصلية مضروبة فى مشتقة الأس .

2. إذا أعطيت أن : $f(x) = \ln[g(x)]$ حيث $g(x)$ موجبة وقابلة للتفاضل ومشتقاتها هى :

$$f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \qquad (11.6)$$

مثال 7 : تم إيجاد مشتقات كل من الدوال الأسية الطبيعية التالية كما يلى :

EXAMPLE 7. The derivatives of each of the natural exponential functions below are found as follows:

1) $f(x) = e^{x}$ بوضع $g(x) = x$ فإن $g'(x) = 1$ وبالتعويض فى *(11.5)* .

$$f'(x) = e^{x} \cdot 1 = e^{x}$$

مشتقة e^{x} هى الدالة الأصلية ذاتها e^{x} .

2) $f(x) = e^{7x-4}$ بوضع $g(x) = 7x - 4$ فإن $g'(x) = 7$ وبالتعويض فى *(11.5)* .

$$f'(x) = e^{7x-4} \cdot 7 = 7e^{7x-4}$$

3) $f(x) = e^{5x^3}$ بوضع $g(x) = 5x^3$ فإن $g'(x) = 15x^2$ ومن *(11.5)* .

$$f'(x) = e^{5x^3} \cdot 15x^2 = 15x^2 e^{5x^3}$$

انظر أيضًا المسائل 11.20 و 11.21 .

مثال 8 : أوجد مشتقة الدالة اللوغاريتمية الطبيعية مبينة أدناه :

EXAMPLE 8. Finding the derivative of a natural logarithmic function is demonstrated below:

1) $f(x)=\ln x$ بوضع $g(x)=x$ فإن $g'(x)=1$ وبالتعويض فى (11.6) .

$$f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{1}{x}$$

إذاً مشتقة $\ln x$ هى $\frac{1}{x}$.

2) $y=\ln 9x^4$ بوضع $g(x)=9x^4$ فإن $g'(x)=36x^3$ ومن (11.6) .

$$y'=\frac{1}{9x^4}\cdot 36x^3=\frac{4}{x}$$

3) $f(x)=\ln(8x^2-13)$ بوضع $g(x)=8x^2-13$ فإن $g'(x)=16x$ ومن (11.6) .

$$f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{16x}{8x^2-13}$$

انظر أيضًا المسائل 11.22 و 11.23 .

11.8 الفائدة المركبة Interest Compounding

يعبر عن الفائدة المركبة بشكل عام بدلالة الدوال الأسية . فالفرد يفرض أصل الفرض P عند معدل فائدة مركبة r سنويًا ، فمثلاً فإن القيمة A التى سوف نحصل عليها فى نهاية السنة الأولى تساوى .

$$A_1=P+rP=P(1+r)$$

وفى نهاية السنة الثانية فإن هذا الفرد سيحصل على A_1 بالإضافة إلى مبلغ الفائدة على A_1 .

$$A_2=A_1+rA_1$$
$$A_2=P(1+r)+r[P(1+r)]$$

وبتحليل العامل $P(1+r)$

$$A_2=[P(1+r)][1+r]=P(1+r)^2$$

وعند نهاية t من السنوات نتبع نفس الإجراء .

$$A_t=P(1+r)^t \qquad (11.7)$$

إذا كانت الفائدة المركبة تحسب عدة مرات m فى السنة فإن الفرد يستلم فائدة (r/m) عدة مرات m أثناء السنة ومن ثم ففى نهاية عدد من السنوات t فإن .

$$A_t=P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} \qquad (11.8)$$

وإذا كانت الفائدة المركبة تحسب بصفة مستمرة فإن $m\to\infty$.

$$A_t=\lim_{m\to\infty}P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}$$

وبنقل P وضرب الأس فى r/r .

$$A_t = P \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{(m/r)rt}$$

وبوضع $m/r = n$.

$$A_t = P \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nrt}$$

ومن القسم 11.4 .

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\tfrac{1}{n}\right]^n = e$$

وبالتعويض .

$$A_t = Pe^{rt} \qquad (11.9)$$

مثال 9 : القيمة A لأصل قرض P قدره 1000 دولار عند معدل فائدة $r = 6\%$ لمدة خمس سنوات $t = 5$ عندما تحسب الفائدة (a) سنويًا . (b) ربع سنوى . (c) شهريًا . (d) على نحو مستمر مبينة أدناه .

EXAMPLE 9. The value A of a principal $P = \$1000$ set out at an interest rate $r = 6$ percent for time $t = 5$ years when compounded (a) annually, (b) quarterly, (c) monthly, and (d) continuously is found below.

(a) نعوض بالقيم المناسبة فى (11.7) ونستخدم المفتاح $\boxed{y^x}$ للآلة الحاسبة لتقدير الدوال الأسية .

$$A = 1000(1+.06)^5$$

$$A = 1000(1.33823) = \$1338.23$$

(b) نعوض فى (11.8) عندما $m = 4$ (فائدة ربع سنوية)

$$A = 1000\left(1+\frac{.06}{4}\right)^{4(5)}$$

$$A = 1000(1+.015)^{20}$$

$$A = 1000(1.34686) = \$1346.86$$

(c) بالتعويض $m = 12$ فى (11.8) (فائدة شهرية) .

$$A = 1000\left(1+\frac{.06}{12}\right)^{12(5)}$$

$$A = 1000(1+.005)^{60}$$

$$A = 1000(1.34885) = \$1348.85$$

(d) وأخيرًا نستخدم (11.9) للفائدة المتصلة .

$$A = 1000e^{(.06)5} = 1000e^{0.3}$$

$$A = 1000(1.34986) = \$1349.86$$

انظر أيضًا المسائل 11.24 إلى 11.31 وانظر أيضًا مسائل الخصم من 11.32 إلى 11.34 .

11.9 تقدير معدلات النمو من نقاط البيانات

Estimating Growth rates from Date Points

إذا أعطيت فئتين من البيانات لدالة الأرباح أو المبيعات أو الأصول حيث تنمو بشكل ثابت خلال الزمن فإنه يمكن قياس معدلات النمو وتقدير الدالة الأسية الطبيعية من خلال نظام المعادلات الآتية . فمثلا إذا كانت أصول المصرف تساوى 48 مليون دولار عام 1983 و 98.6 مليون دولار فى عام 1993 ، وبوضع $t=0$ لسنة الأساس 1983 و $t=10$ لسنة 1993 . وإذا عبرنا عن كل من الفئتين من نقاط البيانات بدلالة الدالة الأسية الطبيعية $S = Pe^{rt}$ علمًا بأن $e^{(0)}=1$.

$$48.0 = Pe^{r(0)} = P \tag{11.10}$$

$$98.6 = Pe^{r(10)} \tag{11.11}$$

وبالتعويض عن $P=48.0$ من (11.10) فى (11.11) واختصار المقدار جبريًا .

$$98.6 = 48.0e^{10r}$$

$$2.05417 = e^{10r}$$

وباستخدام (11.3) وبأخذ اللوغاريتم الطبيعى لطرفى المعادلة .

$$\ln 2.05417 = \ln e^{10r} = 10r$$

$$0.71987 = 10r$$

$$r = 0.07199 \approx 7.2\%$$

وبالتعويض

$$S = 48.0e^{0.072t}$$

ومع $r=0.072$ فإن معدل النمو السنوى المستمر هو 7.2% . انظر المثال 10 والمسائل 11.35 إلى 11.39 .

مثال 10 : إذا أعطيت المعلومات الأصلية فى المثال السابقة فإن الدالة الأسية الاعتيادية للنمو بدلالة $S=P(1+r)^t$ يمكن أن تقدر مباشرة من البيانات .

EXAMPLE 10. Given the original information above, an ordinary exponential function for growth in terms of $S = P(1+r)^t$ can also be estimated directly from the data.

بوضع البيانات فى الصيغة الأسية الاعتيادية .

$$48.0 = P(1+r)^0 = P \tag{11.12}$$

$$98.6 = P(1+r)^{10} \tag{11.13}$$

بالتعويض $P=48.0$ من (11.12) فى (11.13) واختصار المقدار .

$$98.6 = 48.0(1+r)^{10}$$

$$2.05417 = (1+r)^{10}$$

بأخذ اللوغاريتم الاعتيادى لطرفى المعادلة .

$$\log 2.05417 = 10\log(1+r)$$

$$\tfrac{1}{10}(0.31264) = \log(1+r)$$

$$\log(1+r) = 0.03126$$

ويوضع طرفى المعادلة كأسس 10 وبشكل مشابه إلى (*11.12*) .

$$1+r = 10^{0.03126} = 1.07463$$

$$r = 1.07463 - 1 = 0.07463 \approx 7.46\%$$

وبالتعويض

$$S = 48.0(1+0.0746)^t$$

وهذا يعنى أن الأصول تنمو بمعدل سنوى قدره 7.46% .

مسائل محلولة

التصوير البيانى Graphs

11.1. المطلوب إعداد جدول لكل من الدوال الأسية التالية مع $a > 1$ ومن ثم مثل الرسم البيانى لهذه الدوال على نفس الشكل لإقناع نفسك (1) بأن الدوال لا تساوى صفرًا و (2) وهى جميعًا تمر بالنقطة (0, 1) و (3) وهى أن ميلها موجب ومحدبة .

11.1. Make a schedule for each of the following exponential functions with base $a > 1$ and then graph them on the same grid to convince yourself that (1) the functions never equal zero, (2) they all pass through (0, 1), and (3) they are all positively sloped and convex:

(*a*) $y = 2^x$ (*b*) $y = 3^x$ (*c*) $y = 4^x$

(*a*)

x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

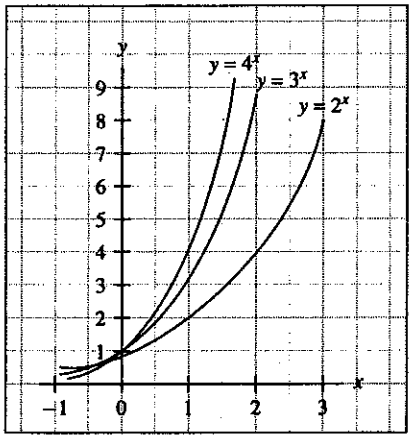
(*b*)

x	y
-3	$\frac{1}{27}$
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27

(*c*)

x	y
-3	$\frac{1}{64}$
-2	$\frac{1}{16}$
-1	$\frac{1}{4}$
0	1
1	4
2	16
3	64

انظر الشكل (3–11)



شكل (3–11)

11.2. المطلوب إعداد جدول لكل من الدوال الأسية التالية مع $0 < a < 1$ ومن ثم مثل الرسم البيانى لهذه الدوال على نفس الشكل لإقناع نفسك (1) بأن الدوال لا تساوى صفرًا و (2) وهى جميعًا تمر بالنقطة (0, 1) و (3) وهى جميعًا سالبة الميل ومحدبة .

11.2. Make a schedule for each of the following exponential functions with $0 < a < 1$ and then sketch them on the same graph to convince yourself that (1) the functions never equal zero, (2) they all pass through (0, 1), and (3) they are all negatively sloped and convex:

(a) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$ (b) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x=3^{-x}$ (c) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x=4^{-x}$

(a)

x	y
−3	8
−2	4
−1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

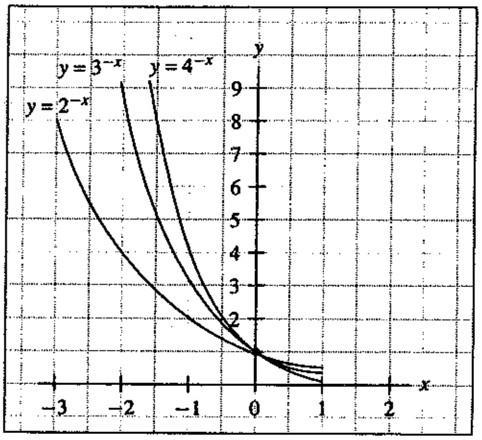
(b)

x	y
−3	27
−2	9
−1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{27}$

(c)

x	y
−3	64
−2	16
−1	4
0	1
1	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{16}$
3	$\frac{1}{64}$

انظر الشكل (4–11)



شكل (4–11)

11.3. باستخدام الآلة الحاسبة أو الجداول عين جدولاً لكل من الدوال الأسية الطبيعية التالية $y=e^{kx}$ حيث $k<0$ ولاحظ أن (1) الدوال لا تساوى صفراً . (2) وهى جميعًا تمر بالنقطة (0, 1) و (3) وهى جميعًا موجبة الميل ومحدبة .

11.3. Using a calculator or tables, set up a schedule for each of the following natural exponential functions $y=e^{kx}$ where $k>0$, noting (1) the functions never equal zero, (2) they all pass through (0, 1), and (3) they are all positively sloped and convex:

(a) $y=e^{0.5x}$, (b) $y=e^x$, (c) $y=e^{2x}$

(a)

x	y
−2	0.37
−1	0.61
0	1.00
1	1.65
2	2.72

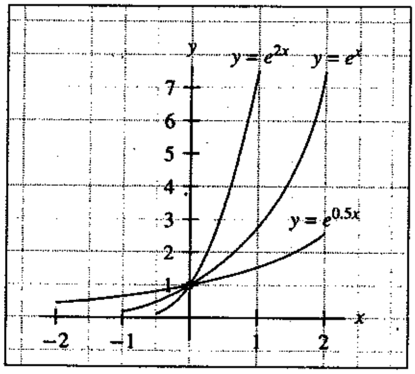
(b)

x	y
−2	0.14
−1	0.37
0	1.00
1	2.72
2	7.39

(c)

x	y
−2	0.02
−1	0.14
0	1.00
1	7.39
2	54.60

انظر الشكل (5–11)



شكل (5–11)

11.4. حدد جدولاً لكل من الدوال الأسية الطبيعية التالية $y=e^{kx}$ حيث $k<0$ ولاحظ أن (1) الدوال لا تساوى صفرًا (2) وهى جميعًا تمر بالنقطة (0, 1) و(3) وهى جميعًا سالبة الميل ومحدبة .

11.4. Set up a schedule, rounding to two decimal places, for the following natural exponential functions $y=e^{kx}$ where $k<0$, noting (1) the functions never equal zero, (2) they all pass through (0, 1), and (3) they are all negatively sloped and convex:

(a) $y=e^{-0.5x}$ (b) $y=e^{-x}$ (c) $y=e^{-2x}$

(a)

x	y
-2	2.72
-1	1.65
0	1.00
1	0.61
2	0.37

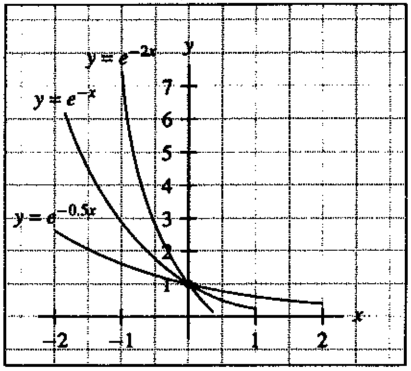
(b)

x	y
-2	7.39
-1	2.72
0	1.00
1	0.37
2	0.14

(c)

x	y
-2	54.60
-1	7.39
0	1.00
1	0.14
2	0.02

انظر الشكل (6–11)



شكل (6–11)

11.5. كون جدولاً وارسم شكلاً بيانيًا للدوال التالية تبين أن إحدى الدوال هى معكوس للدالة الأخرى ولاحظ أن (1) نطاق (*a*) هو مدى (*b*) وأن مدى (*b*) هو نطاق (*a*) ، (2) لوغاريتم الدالة مع $a > 1$ هو دالة متزايدة ومقعرة .

11.5. Construct a schedule and draw a graph for the following functions to show that one is the mirror image and hence the inverse of the other, noting that (1) the domain of (*a*) is the range of (*b*) and the range of (*a*) is the domain of (*b*), and (2) a logarithmic function with $a > 1$ is increasing and concave:

$$(a)\quad y = 2^x \qquad (b)\quad y = \log_2 x \longleftrightarrow x = 2^y$$

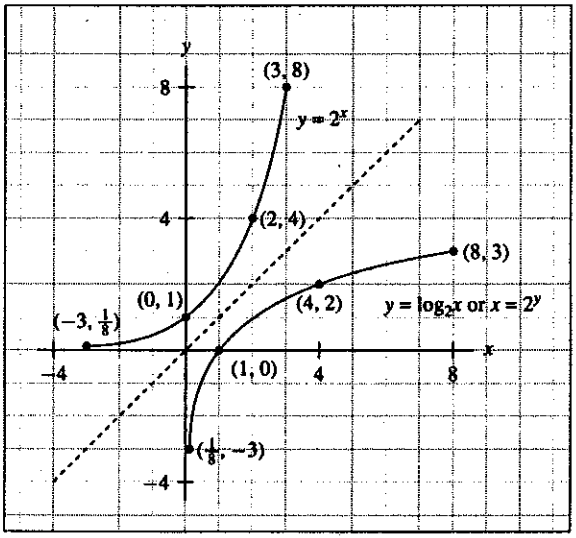
(a)

x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

(b)

x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

انظر الشكل (7–11)



شكل (7–11)

11.6. إذا أعطيت أن : (*a*) $y = e^x$ ، (*b*) $y = \ln x$ استخدم الآلة الحاسبة أو الجداول لتكوين الجدول ثم ارسم شكلاً بيانيًا لكل دالة لتوضح أن إحدى الدوال هى معكوس للدالة الأخرى . ولاحظ (1) أن نطاق الدالة (*a*) هو مدى للدالة (*b*) وأن مدى الدالة (*a*) هو نطاق للدالة (*b*) ، (2) أن $\ln x$ سالبة بالنسبة $0 < x < 1$ وموجبة بالنسبة $x > 1$ (3) أن $\ln x$ دالة متزايدة ومحدبة لأسفل .

11.6. Given (*a*) $y = e^x$ and (*b*) $y = \ln x$, and using a calculator or tables, construct a schedule and draw a graph for each of the functions to show that one function is the mirror image or inverse of the other, noting that (1) the domain of (*a*) is the range of (*b*) while the range of (*a*) is the domain of (*b*), (2) the $\ln x$ is negative for $0 < x < 1$ and positive for $x > 1$, and (3) the $\ln x$ is an increasing function and concave downward.

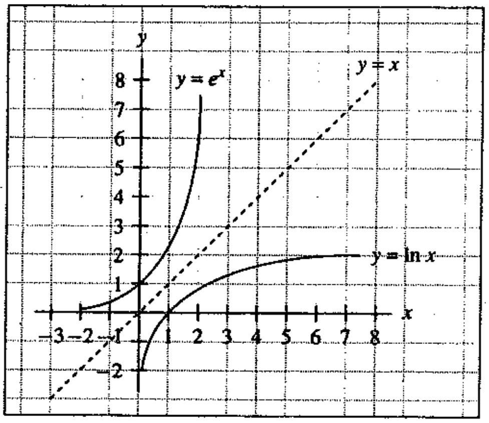
(*a*) $y = e^x$

x	y
−2	0.13534
−1	0.36788
0	1.00000
1	2.71828
2	7.38906

(*b*) $y = \ln x$

x	y
0.13534	−2
0.36788	−1
1.00000	0
2.71828	1
7.38906	2

انظر الشكل (8-11)



شكل (8-11)

Exponential-Logarithmic Conversion التحويل الأسى اللوغاريتمى

11.7. حول اللوغاريتمات التالية إلى صيغها الأسية المكافئة :

11.7. Change the following logarithms to their equivalent exponential forms:

(*a*) $\log_7 49 = 2$

$$49 = 7^2$$

(*b*) $\log_4 64 = 3$

$$64 = 4^3$$

(*c*) $\log_9 \left(\frac{1}{9}\right) = -1$

$$\tfrac{1}{9} = 9^{-1}$$

(*d*) $\log_2 \left(\frac{1}{32}\right) = -5$

$$\tfrac{1}{32} = 2^{-5}$$

(*e*) $\log_{64} 8 = \frac{1}{2}$

$$8 = 64^{1/2}$$

(*f*) $\log_{81} 3 = \frac{1}{4}$

$$3 = 81^{1/4}$$

(*g*) $\log_a y = 5x$

$$y = a^{5x}$$

(*h*) $\log_2 y = 4x$

$$y = 2^{4x}$$

11.8. حول اللوغاريتمات الطبيعية التالية إلى دوال أسية طبيعية :

11.8. Convert the following natural logarithms into natural exponential functions:

(*a*) $\ln 24 = 3.17805$

$$24 = e^{3.17805}$$

(*b*) $\ln 0.6 = -0.51083$

$$0.6 = e^{-0.51083}$$

(*c*) $\ln 44 = 3.78419$

$$44 = e^{3.78419}$$

(*d*) $\ln 4.2 = 1.43508$

$$4.2 = e^{1.43508}$$

(*e*) $\ln y = -8x$

$$y = e^{-8x}$$

(*f*) $\ln y = 5t - 3$

$$y = e^{5t-3}$$

11.9. حول الصيغ الأسية التالية إلى صيغ لوغاريتمية :

11.9. Change the following exponential forms to logarithmic forms.

(*a*) $36 = 6^2$

$\log_6 36 = 2$

(*b*) $125 = 5^3$

$\log_5 125 = 3$

(*c*) $\frac{1}{4} = 2^{-2}$

$\log_2(\frac{1}{4}) = -2$

(*d*) $\frac{1}{27} = 3^{-3}$

$\log_3(\frac{1}{27}) = -3$

(*e*) $3 = 81^{1/4}$

$\log_{81} 3 = \frac{1}{4}$

(*f*) $12 = 144^{1/2}$

$\log_{144} 12 = \frac{1}{2}$

(*g*) $64 = 16^{3/2}$

$\log_{16} 64 = \frac{3}{2}$

(*h*) $27 = 81^{3/4}$

$\log_{81} 27 = \frac{3}{4}$

11.10. حول الصيغ الأسية الطبيعية التالية إلى صيغ لوغاريتمية طبيعية مكافئة :

11.10. Convert the following natural exponential expressions into equivalent natural logarithmic forms:

(*a*) $3.5 = e^{1.25276}$

$\ln 3.5 = 1.25276$

(*b*) $26 = e^{3.25810}$

$\ln 26 = 3.25810$

(*c*) $0.3 = e^{-1.20397}$

$\ln 0.3 = -1.20397$

(*d*) $145 = e^{4.97673}$

$\ln 145 = 4.97673$

(*e*) $y = e^{(1/4)t}$

$\ln y = \frac{1}{4}t$

(*f*) $y = e^{9-t}$

$\ln y = 9 - t$

11.11. حل التالى بالنسبة لـ x أو y أو a من خلال إيجاد الصيغة المكافئة :

11.11. Solve the following for x, y, or a by finding the equivalent expression:

(*a*) $y = \log_{20} 400$

$400 = 20^y$

$y = 2$

(*b*) $y = \log_3(\frac{1}{27})$

$\frac{1}{27} = 3^y$

$y = -3$

(*c*) $\log_2 x = 4$

$x = 2^4$

$x = 16$

(*d*) $\log_{256} x = \frac{3}{4}$

$x = 256^{3/4}$

$x = 64$

(*e*) $\log_a 49 = 2$

$49 = a^2$

$a = 49^{1/2}$

$a = 7$

(*f*) $\log_a 125 = 3$

$125 = a^3$

$a = 125^{1/3}$

$a = 5$

(*g*) $\log_a 9 = \frac{2}{3}$

$9 = a^{2/3}$

$a = 9^{3/2}$

$a = 27$

(*h*) $\log_a 32 = \frac{5}{3}$

$32 = a^{5/3}$

$a = 32^{3/5}$

$a = 8$

Properties of Logarithms and Exponents خصائص اللوغاريتمات والأسس

11.12 . استخدم خصائص اللوغاريتمات من أجل كتابة الصيغ التالية كمجموع أو كطرح أو كحاصل ضرب .

11.12. Use the properties of logarithms to write the following expressions as sums, differences, or products:

(*a*) $\log_a(23x)$

$$\log_a(23x) = \log_a 23 + \log_a x$$

(*b*) $\log_a(69x^3)$

$$\log_a(69x^3) = \log_a 69 + 3\log_a x$$

(*c*) $\log_a x^4y^5$

$$\log_a x^4y^5 = 4\log_a x + 5\log_a y$$

(*d*) $\log_a u^2v^{-3}$

$$\log_a u^2v^{-3} = 2\log_a u - 3\log_a v$$

(*e*) $\log_a(3x/8y)$

$$\begin{aligned}\log_a(3x/8y) &= \log_a 3x - \log_a 8y\\ &= \log_a 3 + \log_a x - (\log_a 8 + \log_a y)\\ &= \log_a 3 + \log_a x - \log_a 8 - \log_a y\end{aligned}$$

(*f*) $\log_a(x^9/y^4)$

$$\log_a(x^9/y^4) = 9\log_a x - 4\log_a y$$

(*g*) $\log_a \sqrt[5]{x}$

$$\log_a \sqrt[5]{x} = \tfrac{1}{5}\log_a x$$

11.13 . استخدم خصائص اللوغاريتمات من أجل كتابة الصيغ اللوغاريتمية الطبيعية التالية كمجموع أو كطرح أو كحاصل ضرب .

11.13. Use the properties of logarithms to write the following natural logarithmic forms as sums, differences, or products:

(*a*) $\ln 49x^6$

$$\ln 49x^6 = \ln 49 + 6\ln x$$

(*b*) $\ln x^3y^7$

$$\ln x^3y^7 = 3\ln x + 7\ln y$$

(*c*) $\ln(x^9/y^2)$

$$\ln(x^9/y^2) = 9\ln x - 2\ln y$$

(*d*) $\ln(5x/8y)$

$$\begin{aligned}\ln(5x/8y) &= \ln 5x - \ln 8y\\ &= \ln 5 + \ln x - (\ln 8 + \ln y)\\ &= \ln 5 + \ln x - \ln 8 - \ln y\end{aligned}$$

(*e*) $\ln \sqrt[3]{x}$

$$\ln \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3}\ln x$$

(*f*) $\ln(x^4 \cdot \sqrt{y})$

$$\ln(x^4 \cdot \sqrt{y}) = 4\ln x + \tfrac{1}{2}\ln y$$

(*g*) $\dfrac{8\sqrt[4]{x}}{\sqrt{y}}$

$$\ln \frac{8\sqrt[4]{x}}{\sqrt{y}} = \ln 8 + \frac{1}{4}\ln x - \frac{1}{2}\ln y$$

(*h*) $\ln\sqrt{\dfrac{x^5}{y^3}}$

$$\ln\sqrt{\frac{x^5}{y^3}} = \tfrac{1}{2}(5\ln x - 3\ln y)$$

11.14 . استخدم خصائص الأسس من أجل اختصار الصيغة الأسية التالية مفترضًا أن $b > 0$ ، a و $a \neq b$.

11.14. Use the properties of exponents to simplify the following exponential expressions, assuming $a, b > 0$ and $a \neq b$:

(*a*) $a^x \cdot a^y$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

(*b*) $a^{7x} \cdot a^{9y}$

$$a^{7x} \cdot a^{9y} = a^{7x+9y}$$

(*c*) $\dfrac{a^{5x}}{a^{2y}}$

$$\frac{a^{5x}}{a^{2y}} = a^{5x-2y}$$

(*d*) $\dfrac{a^x}{b^x}$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

(*e*) $\sqrt{a^{9x}}$

$$\sqrt{a^{9x}} = (a^{9x})^{1/2} = a^{(9/2)x}$$

(*f*) $(a^x)^{5y}$

$$(a^x)^{5y} = a^{5xy}$$

11.15. اختصر الصيغ الأسية الطبيعية التالية :

11.15. **Simplify the following natural exponential expressions.**

(*a*) $e^{3x} \cdot e^{8y}$

$$e^{3x} \cdot e^{8y} = e^{3x+8y}$$

(*b*) $(e^{4x})^3$

$$(e^{4x})^3 = e^{12x}$$

(*c*) $\dfrac{e^{7x}}{e^{4x}}$

$$\frac{e^{7x}}{e^{4x}} = e^{7x-4x} = e^{3x}$$

(*d*) $\dfrac{e^{2x}}{e^{8x}}$

$$\frac{e^{2x}}{e^{8x}} = e^{2x-8x} = e^{-6x} = \frac{1}{e^{6x}}$$

11.16. اختصر الصيغ اللوغاريتمية الطبيعية التالية :

11.16. **Simplify the following natural logarithmic expressions:**

(*a*) $\ln 6 + \ln x$

$$\ln 6 + \ln x = \ln 6x$$

(*b*) $\ln x^7 - \ln x^2$

$$\ln x^7 - \ln x^2 = \ln\left(\frac{x^7}{x^2}\right) = \ln x^5 = 5\ln x$$

(*c*) $\ln 12 + \ln 3 - \ln 4$

$$\ln 12 + \ln 3 - \ln 4 = \ln\left(\frac{12 \cdot 3}{4}\right) = \ln 9$$

(*d*) $\ln 5 - \ln 2x + \ln 8$

$$\ln 5 - \ln 2x + \ln 8 = \ln\left(\frac{5 \cdot 8}{2x}\right) = \ln\left(\frac{20}{x}\right)$$

(*e*) $\frac{1}{2}\ln 36$

$$\tfrac{1}{2}\ln 36 = \ln 36^{1/2} = \ln 6$$

(*f*) $4\ln\left(\frac{1}{3}\right)$

$$4\ln\tfrac{1}{3} = \ln\left(\tfrac{1}{3}\right)^4 = \ln\tfrac{1}{81}$$

(*g*) $\frac{1}{2}\ln 49 + 3\ln 4$

$$\tfrac{1}{2}\ln 49 + 3\ln 4 = \ln 49^{1/2} + \ln 4^3 = \ln(7 \cdot 64) = \ln 448$$

(*h*) $2\ln 9 - \frac{1}{4}\ln 81$

$$2\ln 9 - \tfrac{1}{4}\ln 81 = \ln 9^2 - \ln 81^{1/4} = \ln\left(\tfrac{81}{3}\right) = \ln 27$$

11.17. اختصر كل من الصيغ الأسية التالية :

11.17. Simplify each of the following exponential expressions:

(*a*) $e^{2\ln x}$

$$e^{2\ln x} = e^{\ln x^2}$$

From (*11.2*), $e^{\ln x^2} = x^2$

(*b*) $e^{3\ln x+4\ln y}$

$$e^{3\ln x+4\ln y} = e^{\ln x^3} \cdot e^{\ln y^4} = x^3y^4$$

(*c*) $e^{1/2\ln 9x}$

$$e^{1/2\ln 9x} = e^{\ln(9x)^{1/2}} = (9x)^{1/2} = \sqrt{9x} = 3\sqrt{x}$$

(*d*) $e^{5\ln x-8\ln y}$

$$e^{5\ln x-8\ln y} = \frac{e^{\ln x^5}}{e^{\ln y^8}} = \frac{x^5}{y^8}$$

11.18. استخدم طرق القسم 11.5 لحل الدوال الأسية الطبيعية التالية بالنسبة إلى x :

11.18. Use the techniques from Section 11.5 to solve the following natural exponential functions for x:

(*a*) $7e^{3x} = 630$

بحل المقدار جبريًا لـ e^{3x}

$$e^{3x} = 90$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعى لطرفى المعادلة لحذف e .

$$\ln e^{3x} = \ln 90$$

$3x = \ln 90$ من (*11.3*)

أدخل العدد 90 فى الآلة الحاسبة ثم اضغط المفتاح $\boxed{\ln x}$ كما شرحنا فى القسم 1.7.10 ، $\ln 90 = 4.49981 \approx 4.5$

$$3x = 4.5$$

$$x = 1.5$$

(*b*) $3e^{2x+1.2} = 4018.29$

$e^{2x+1.2} = 1339.43$

$\ln e^{2x+1.2} = \ln 1339.43$ وبالحل بالنسبة لـ $e^{2x} + 1.2$

$2x + 1.2 = 7.19999 \approx 7.2$ وبأخذ اللوغاريتم الطبيعى

$2x + 1.2 = 7.2 \qquad x = 3$ من (*11.3*)

(*c*) $\frac{1}{4}e^{x^2} = 2.37194$

$e^{x^2} = 9.48776$ وبالحل بالنسبة لـ e^{2x}

$x^2 = 2.25$ وبأخذ اللوغاريتم الطبيعى

$x = \pm 1.5$

11.19. استخدم طرق القسم 11.5 لحل الدوال اللوغاريتمية الطبيعية التالية بالنسبة إلى x .

11.19. Using the techniques of Section 11.5, solve the following natural logarithmic functions for x:

(*a*) $7\ln x - 2.6 = 10$

ويحل المقدار جبريًا بالنسبة لـ $\ln x$.

$$7\ln x = 12.6, \qquad \ln x = 1.8$$

وبوضع طرفى المعادلة كأسس إلى e لحذف اللوغاريتم الطبيعى .

$$e^{\ln x} = e^{1.8}$$

$$x = e^{1.8}$$ من (*11.2*)

وباستخدام الآلة الحاسبة كما شرحنا فى القسم 1.7.12 .

$$x = 6.04965 \approx 6.05$$

(*b*) $\ln(x - 1.51)^3 = 1.2$

اختصر باستخدام قوانين اللوغاريتمات ومن ثم حل بالنسبة إلى $\ln x$.

$$3\ln(x - 1.51) = 1.2$$

$$\ln(x - 1.51) = 0.4$$

وبوضع طرفى المعادلة كأسس لـ e .

$$e^{\ln(x-1.51)} = e^{0.4}$$

$$x - 1.51 \approx 1.49$$ من (*11.2*)

$$x = 3$$

(*c*) $\ln\sqrt{x + 2.24} = 2.14$

وبالاختصار والحل

$$\tfrac{1}{2}\ln(x + 2.24) = 2.14$$

$$\ln(x + 2.24) = 4.28$$

وبوضع طرفى المعادلة كأسس لـ e

$$e^{\ln(x+2.24)} = e^{4.28}$$

$$x + 2.24 \approx 72.24$$ ومن (*11.2*)

$$x = 70$$

مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية الطبيعية

Derivatives of Natural Exponential and Logarithmic Functions

11.20. فاضل الدوال الأسية الطبيعية التالية باستخدام القاعدة الموجودة فى (*11.5*) :

11.20. Differentiate the following natural exponential functions, using the rule found in (*11.5*):
$d/dx[e^{g(x)}] = e^{g(x)} \cdot g'(x)$.

(*a*) $f(x) = e^{6x}$ بوضع $g(x) = 6x$ ، $g'(x) = 6$ ومن (*11.5*) $f'(x) = e^{6x} . 6 = 6\,e^{6x}$.

(*b*) $y = e^{-8x}$ بوضع $g(x) = -8x$ ، $g'(x) = -8$ ومن (*11.5*) $y' = e^{-8x} \cdot -8 = -8\,e^{-8x}$.

(*c*) $f(x) = e^{3x^2}$

$$f'(x) = e^{3x^2} \cdot 6x$$
$$= 6xe^{3x^2}$$

(*d*) $y = e^{4x-9}$

$$y' = e^{4x-9} \cdot 4$$
$$= 4e^{4x-9}$$

(*e*) $y = 5e^{7-x^3}$

$$y' = 5e^{7-x^3} \cdot -3x^2$$
$$= -15x^2e^{7-x^3}$$

(*f*) $y = \frac{1}{3}e^{(1/2)x^4}$

$$y' = \tfrac{1}{3}e^{(1/2)x^4} \cdot \tfrac{1}{2}(4x^3)$$
$$= \tfrac{2}{3}x^3e^{(1/2)x^4}$$

11.21. فاضل الدوال التالية باستخدام مجموعة من القواعد :

11.21. Combine rules to differentiate the following functions.

(*a*) $f(x) = 7xe^{2x}$

باستخدام قاعدة الضرب

$$f'(x) = 7x(2e^{2x}) + e^{2x}(7)$$
$$= 14xe^{2x} + 7e^{2x}$$
$$= 7e^{2x}(2x+1)$$

(*b*) $y = 2x^4e^{5x}$

$$y' = 2x^4(5e^{5x}) + e^{5x}(8x^3)$$
$$= 10x^4e^{5x} + 8x^3e^{5x}$$
$$= 2x^3e^{5x}(5x+4)$$

(*c*) $y = (e^{-4x})^3$

باستخدام قاعدة دالة القوى العامة .

$$y' = 3 \cdot (e^{-4x})^2 \cdot (-4e^{-4x})$$
$$= -12(e^{-4x})^3 = -12e^{-12x}$$

ملاحظة : ومن خصائص الأسس $(e^{-4x})^3 = e^{-12x}$ ثم تفاضل e^{-12x} يكون بالطبع $-12e^{-12x}$.

(*d*) $f(x) = (e^{4x} + e^{-3x})^5$

باستخدام قاعدة خارج القسمة .

$$f'(x) = 5 \cdot (e^{4x} + e^{-3x})^4 \cdot (4e^{4x} - 3e^{-3x})$$
$$= (20e^{4x} - 15e^{-3x})(e^{4x} + e^{-3x})^4$$

(*e*) $f(x) = \dfrac{e^{-9x}}{1-9x}$

باستخدام قاعدة خارج القسمة .

$$f'(x) = \frac{(1-9x)(-9e^{-9x}) - (e^{-9x})(-9)}{(1-9x)^2} = \frac{81xe^{-9x}}{(1-9x)^2}$$

(*f*) $y = \dfrac{e^{7x}-1}{e^{7x}+1}$

$$y' = \frac{(e^{7x}+1)(7e^{7x}) - (e^{7x}-1)(7e^{7x})}{(e^{7x}+1)^2} = \frac{14e^{7x}}{(e^{7x}+1)^2}$$

11.22. فاضل الدوال اللوغاريتمية الطبيعية التالية باستخدام القاعدة الموجودة فى *(11.6)* :

11.22. Differentiate the following natural logarithmic functions, using the rule found in (*11.6*): $d/dx[\ln g(x)] = \dfrac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$.

(*a*) $y = \ln 7x^3$ بوضع $g(x) = 7x^3$ ، $g'(x) = 21x^2$ ومن *(11.6)* $y' = \dfrac{1}{7x^3}(21x^2) = 3x^{-1} = \dfrac{3}{x}$.

(*b*) $y = \ln(4x+9)$ بوضع $g(x) = 4x+9$ ، $g'(x) = 4$ ومن *(11.5)* $y' = \dfrac{1}{4x+9}(4) = \dfrac{4}{4x+9}$.

(*c*) $y = \ln(8x^2+3)$

$$y' = \frac{1}{8x^2+3}(16x) = \frac{16x}{8x^2+3}$$

(*d*) $y = \ln(x^2+7x+15)$

$$y' = \frac{1}{x^2+7x+15}(2x+7) = \frac{2x+7}{x^2+7x+15}$$

(*e*) $y = \ln 18x$

$$y' = \frac{1}{18x}(18) = \frac{1}{x}$$

(*f*) $y = 18 \ln x$

$$y' = 18 \cdot \frac{1}{x}(1) = \frac{18}{x}$$

ملاحظة : لاحظ كيف أن ضرب مقدار ثابت داخل اللوغاريتم يختصر بعد عملية التفاضل كما فى (*e*) وضربه خارج اللوغاريتم لا يؤدى التفاضل إلى حذفه كما فى (*f*) .

11.23. فاضل الدوال التالية باستخدام مجموعة من القواعد :

11.23. Combine rules to differentiate the following functions.

(*a*) $y = \ln^2 x = (\ln x)^2$

باستخدام قاعدة القوى العامة .

$$y' = 2(\ln x)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2\ln x}{x}$$

(*b*) $y = \ln^2 4x^3 = (\ln 4x^3)^2$

باستخدام قاعدة القوى العامة .

$$y' = 2(\ln 4x^3)\left(\frac{1}{4x^3}\right)(12x^2) = \frac{6\ln 4x^3}{x}$$

(*c*) $y = \ln^2(21x+8) = [\ln(21x+8)]^2$

$$y' = 2[\ln(21x+8)]\left(\frac{1}{21x+8}\right)(21) = \frac{42\ln(21x+8)}{21x+8}$$

(*d*) $y = \ln(9x+4)^2 \neq [\ln(9x+4)]^2$

بوضع $g(x) = (9x+4)^2$ ، $g'(x) = 2(9x+4)(9) = 18(9x+4)$ وبالتعويض فى (11.6) .

$$y' = \frac{1}{(9x+4)^2}[18(9x+4)] = \frac{18}{9x+4}$$

(*e*) $y = x^5 \ln x^3$

وباستخدام قاعدة الضرب .

$$y' = x^5\left(\frac{1}{x^3}\right)(3x^2) + \ln x^3(5x^4)$$

$$y' = 3x^4 + 5x^4\ln x^3 = 3x^4 + 15x^4\ln x = 3x^4(1 + 5\ln x)$$

(*f*) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

وباستخدام قاعدة خارج القسمة .

$$y' = \frac{\ln x(1) - x\,(1/x)}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

(*g*) $y = e^{2x}\ln 3x$

وباستخدام قاعدة خارج القسمة .

$$y' = e^{2x}\left(\frac{1}{3x}\cdot 3\right) + (\ln 3x)(e^{2x}\cdot 2)$$

$$y' = e^{2x}\left(\frac{1}{x}\right) + 2e^{2x}\ln 3x = e^{2x}\left(\frac{1}{x} + 2\ln 3x\right)$$

Interest Compounding الفائدة المركبة

11.24. أوجد القيمة A لمبلغ P قدره 100 دولار اقرض بمعدل فائدة $r = 12\%$ لمدة سنة $(r = 1)$ عندما تحسب الفائدة (*a*) سنويًا . (*b*) نصف سنوى . (*c*) ربع سنوى . (*d*) على نحو مستمر . (*e*) ميز بين معدل الفائدة الأسمى ومعدل الفائدة الفعلى . استخدام الآلة الحاسبة لحساب الصيغ الأسية كما شرحنا فى القسم 1.7.11 والمسائل 1.23 إلى 1.26.

11.24. Find the value A of a principal $P = \$100$ set out at an interest rate $r = 12$ percent for time $t = 1$ year when compounded (*a*) annually, (*b*) semiannually, (*c*) quarterly, and (*d*) continuously; (*e*) distinguish between the nominal and the effective rate of interest. Use a calculator for exponential expressions, as explained in Section 1.7.11 and Problems 1.23 to 1.26.

(*a*) من (*11.7*) $A = 100(1 + .12)^1 = \$112.00$

(*b*) من (*11.8*) ، مع $m = 2$ $A = 100\left(1 + \dfrac{.12}{2}\right)^{2(1)}$

$$A = 100(1 + .06)^2$$

$$A = 100(1.1236) = \$112.36$$

(*c*) من (*11.8*) ، مع $m = 4$ $A = 100\left(1 + \dfrac{.12}{4}\right)^{4(1)}$

$$A = 100(1 + .03)^4$$

$$A = 100(1.1255) = \$112.55$$

(*d*) من (*11.9*) $A = 100e^{(0.12)(1)} = 100e^{.12}$

$$A = 100(1.1275) = \$112.75$$

(*e*) فى الحالات الأربع السابقة فإن معدل الفائد الأسمى هو نفس المعدل ويساوى 12% . أما الفائدة الفعلية المكتسبة فهى تتغير طبقًا لكيفية حساب الفائدة . فمعدل الفائدة الفعلى هو 12.36% عندما تحسب

الفائدة نصف سنوى و 12.55% عندما تحسب الفائدة ربع سنوى و 12.75% عندما تحسب الفائدة على نحو مستمر .

11.25. أوجد قيمة A لأصل P قدره 3000 دولار أقرض عند معدل فائدة $r = 8\%$ لمدة ستة سنوات $(t = 6)$ عندما تحسب الفائدة (a) سنويًا . (b) نصف سنوى . (c) ربع سنوى . (d) على نحو مستمر .

11.25. Find the value A of a principal $P = \$3000$ set out at an interest rate $r = 8$ percent for time $t = 6$ years when compounded (*a*) annually, (*b*) semiannually, (*c*) quarterly, and (*d*) continuously.

(*a*) من (*11.7*) $A = 3000(1 + .08)^6$

$A = 3000(1.5868743) = \$4760.62$

(*b*) $m = 2$ مع ، (*11.8*) من $A = 3000\left(1 + \frac{.08}{2}\right)^{2(6)}$

$A = 3000(1 + .04)^{12}$

$A = 3000(1.6010322) = \$4803.10$

(*c*) $m = 4$ مع ، (*11.8*) من $A = 3000\left(1 + \frac{.08}{4}\right)^{4(6)}$

$A = 3000(1 + .02)^{24}$

$A = 3000(1.6084373) = \$4825.31$

(*d*) من (*11.9*) $A = 3000e^{(0.08)6} = 3000e^{0.48}$

$A = 3000(1.6160744) = \$4848.22$

11.26. إذا أعطيت أن : $P = 10000$ ، $r = 9\%$ ، $t = 3$ ، أوجد قيمة A وفقًا لما ورد فى المسألة 11.25 .

11.26. Redo Problem 11.25, given $P = \$10,000$, $r = 9$ percent, and $t = 3$.

(*a*) $A = 10,000(1 + .09)^3$

$A = 10,000(1.295029) = \$12,950.29$

(*b*) $A = 10,000\left(1 + \frac{.09}{2}\right)^{2(3)}$

$A = 10,000(1 + .045)^6$

$A = 10,000(1.3022601) = \$13,022.60$

(*c*) $A = 10,000\left(1 + \frac{.09}{4}\right)^{4(3)}$

$A = 10,000(1 + .0225)^{12}$

$A = 10,000(1.30605) = \$13,060.50$

(*d*) $A = 10,000e^{(0.09)3} = 10,000e^{.27}$

$A = 10,000(1.3099645) = \$13,099.65$

11.27. أوجد صيغة حساب معدل الفائدة الفعلى r_e للطرق المتعددة للفائدة عندما $r > 1$.

11.27. Find the formula for finding the effective rate of interest r_e for multiple compoundings when $t > 1$.

من تفسير معدل الفائدة الفعلى فى المسألة (11.24)(*e*) يمكننا كتابة :

$$P(1+r_e)^t = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}$$

بقسمة الطرفين على P وبأخذ الجذر t لكل طرف .

$$1+r_e = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}$$

$$r_e = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{m} - 1 \qquad (11.14)$$

وللطريقة المستمرة للفائدة .

$$P(1+r_e)^t = Pe^{rt}$$

$$(1+r_e) = e^{r}$$

$$r_e = e^{r} - 1 \qquad (11.15)$$

.11.28 إذا أعطيت أن معدل الفائدة الأسمى $r=8\%$ كما فى المسألة 11.25 ، أوجد معدل الفائدة الفعلى حينما تحسب الفائدة (*a*) نصف سنوى . (*b*) ربع سنوى . (*c*) على نحو مستمر . ولاحظ ، الزمن t والأصل P فى (*11.14*) و (*11.15*) لا يهم .

11.28. Given a nominal rate of interest $r = 8$ percent, as in Problem 11.25, find the effective rate of interest under (*a*) semiannual, (*b*) quarterly, and (*c*) continuous compounding. Note that in (*11.14*) and (*11.15*) time t and principal P do not matter.

(*a*) من (*11.14*)

$$r_e = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{m} - 1$$

وبالتعويض

$$r_e = \left(1+\frac{.08}{2}\right)^{2} - 1 = (1+.04)^2 - 1$$

$$r_e = 1.08160 - 1 = 0.08160 = 8.16\%$$

(*b*)

$$r_e = \left(1+\frac{.08}{4}\right)^{4} - 1 = (1+.02)^4 - 1$$

$$r_e = 1.08243 - 1 = 0.08243 \approx 8.24\%$$

(*c*) من (*11.15*)

$$r_e = e^{r} - 1$$

وبالتعويض

$$r_e = e^{0.08} - 1 = 1.08329 - 1 = 0.08329 \approx 8.33\%$$

.11.29 أوجد معدل الفائدة الفعلى عندما تحسب الفائدة : (*a*) نصف سنوى . (*b*) ربع سنوى . (*c*) على نحو مستمر للمسألة 11.26 حيث $r=9\%$.

11.29. Find the effective rate of interest under (*a*) semiannual, (*b*) quarterly, and (*c*) continuous compounding for Problem 11.26 where r was 9 percent.

(*a*) من (*11.14*)

$$r_e = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{m} - 1$$

وبالتعويض

$$r_e = \left(1+\frac{.09}{2}\right)^{2} - 1 = (1+.045)^2 - 1$$

$$r_e = 1.09203 - 1 = 0.09203 = 9.20\%$$

(*b*)
$$r_e = \left(1 + \frac{.09}{4}\right)^4 - 1 = (1 + .0225)^4 - 1$$
$$r_e = 1.09308 - 1 = 0.09308 \approx 9.31\%$$

(*c*) من (*11.15*)
$$r_e = e^r - 1$$
وبالتعويض
$$r_e = e^{0.09} - 1$$
$$r_e = 1.09417 - 1 = 0.09417 \approx 9.42\%$$

11.30. كم عدد السنوات (t) التى يستغرقها مبلغ من النقود P لكى يتضاعف عن معدل فائدة سنوى قدره 6% ؟

11.30. How many years t will it take a sum of money P to double at 6 percent interest compounded annually?

$$A = P(1 + .06)^t$$

ولكى تتضاعف النقود فإن $A = 2P$. وبالتعويض عن A

$$2P = P(1 + .06)^t$$

بقسمة الطرفين على P
$$2 = (1 + .06)^t$$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعى
$$\ln 2 = t \ln 1.06$$
$$0.69315 = 0.05827t$$

وبالقسمة على 0.05827
$$t \approx 11.9 \text{ سنة}$$

11.31. كم عدد السنوات (t) التى يتطلبها مبلغ من النقود لكى يبلغ ثلاثة أضعاف عند معدل فائدة 12% يحسب ربع سنوى ؟

11.31. How long will it take money to treble at 12 percent interest compounded quarterly?

من (*11.8*)
$$A = P\left(1 + \frac{.12}{4}\right)^{4(t)} = P(1 + .03)^{4t}$$

إذا بلغ المبلغ ثلاثة أضعاف
$$3 = (1 + .03)^{4t}$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعى
$$\ln 3 = 4t \ln 1.03$$
$$1.09861 = 4(0.02956)t = 0.11824t$$
$$t \approx 9.3 \text{ سنة}$$

Discounting الخصم

11.32. الخصم هو عملية تحديد القيمة الحالية P لمبلغ من النقود A يستلم فى المستقبل . أوجد معادلة الخصم حينما تحسب الفائدة (*a*) سنويًا ، (*b*) متعددة ، (*c*) على نحو مستمر .

11.32. *Discounting* is the process of determining the present value P of a sum of money A to be received in the future. Find the formula for discounting under (*a*) annual compounding, (*b*) multiple compounding, and (*c*) continuous compounding.

(*a*) فى حالة الحساب السنوى

$$A = P(1 + r)^t$$

وبالحل بالنسبة إلى P

$$P = \frac{A}{(1+r)^t} = A(1+r)^{-t} \qquad (11.16)$$

(*b*) فى حالة تعدد مرات الحساب

$$A = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}$$

وبالحل بالنسبة إلى P

$$P = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mt} \qquad (11.17)$$

(*c*) فى حالة الحساب المستمر

$$A = Pe^{rt}$$

$$P = Ae^{-rt} \qquad (11.18)$$

11.33. أوجد القيمة الحالية لمبلغ 1000 دولار يدفع بعد 4 سنوات من الآن عندما يكون معدل الفائدة 6% إذا تم حساب الفائدة (*a*) سنويًا . (*b*) ربع سنوى . (*c*) على نحو مستمر .

11.33. Find the present value of \$1000 to be paid 4 years from now when the current interest rate is 6 percent if interest is compounded (*a*) annually, (*b*) quarterly, and (*c*) continuously.

(*a*) من (*11.16*)

$$P = A(1+r)^{-t}$$

بالتعويض

$$P = 1000(1+.06)^{-4}$$

ندخل الرقم 1.06 فى الآلة الحاسبة ثم نضغط المفتاح $\boxed{y^x}$ ومـن ثم ندخل الرقم 4 ثم نضغط المفتاح $\boxed{\pm}$ لجعل الرقم سالب وأخيرًا نضغط المفتاح $\boxed{=}$ كما شرحنا فى القسم 1.7.11 .

$$P = 1000(0.79209) = \$792.09$$

(*b*) من (*11.17*)

$$P = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mt}$$

وبالتعويض

$$P = 1000\left(1+\frac{.06}{4}\right)^{-4(4)} = 1000(1+.015)^{-16}$$

$$P = 1000(0.78803) = \$788.03$$

(*c*) من (*11.17*)

$$P = Ae^{-rt}$$

وبالتعويض

$$P = 1000e^{-(0.06)(4)} = 1000e^{-0.24}$$

$$P = 1000(0.78663) = \$786.63$$

11.34. أوجد القيمة الحالية لمبلغ 1500 دولار يدفع بعد 8 سنوات عندما يكون معدل الفائدة 5% فى الحالات الواردة فى السؤال 11.33 .

11.34. Redo Problem 11.33 for a present value of \$1500 to be paid in 8 years when the current interest rate is 5 percent.

(*a*)

$$P = 1500(1+.05)^{-8}$$

$$P = 1500(0.67684) = \$1015.26$$

(*b*)

$$P = 1500\left(1+\frac{.05}{4}\right)^{-4(8)} = 1500(1+.0125)^{-32}$$

$$P = 1500(0.67198) = \$1007.97$$

(c)

$$P = 1500e^{-(0.05)(8)} = 1500e^{-0.4}$$

$$P = 1500(0.67032) = \$1005.48$$

Estimating Growth Rates from Data Points تقدير معدلات النمو من نقاط البيانات

11.35. إذا أعطيت فئتين من نقاط البيانات التى تنمو بشكل منتظم خلال الزمن مثل الاشتراكات فى مجلة التى تبلغ 6.25 مليون فى 1988 و 11.1 مليون فى عام 1933 . (*a*) عبر عـن الاشتراكـات كدالـة أسـية طبيعيـة $S = S_0 e^{rt}$. (*b*) أوجد معدل النمو السنوى G للاشتراكات .

11.35. Given two sets of points from data growing consistently over time, such as subscriptions to a magazine numbering 6.25 million in 1988 and 11.1 million in 1993, (*a*) express subscriptions as a natural exponential function of time $S = S_0e^{rt}$ and (*b*) find the annual rate of growth G in subscriptions.

(*a*) بوضع $t = 0$ لسنة الأساس 1988 و $t = 5$ لسنة 1993 . ثم نصيغ فئتى البيانـات بدلالـة $S = S_0 e^{rt}$ مـع العلم أن $e^0 = 1$.

$$6.25 = S_0e^{r(0)} = S_0 \tag{11.19}$$

$$11.1 = S_0e^{r(5)} \tag{11.20}$$

وبالتعويض عن S_0 من (*11.19*) فى (*11.20*) واختصار المقدار جبريًا

$$11.1 = 6.25e^{5r}$$

$$1.776 = e^{5r}$$

ويأخذ اللوغاريتم الطبيعى لطرفى المعادلة واستخدام (*11.3*)

$$\ln 1.776 = \ln e^{5r} = 5r$$

$$0.57436 = 5r \qquad r = 0.11487 \approx 11.5\%$$

وبوضع قيم S_0 و r فى الصيغة المناسبة $S_0 e^{rt}$.

$$S = 6.25e^{0.115t}$$

(*b*) معدل نمو G للدالة معطى من خلال مشتقة اللوغاريتم الطبيعى للدالة : $\frac{d}{dx}[\ln f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

ويأخذ اللوغاريتم الطبيعى بالنسبة S ومن ثم استخدام (*11.3*) مرة ثانية

$$\ln S = \ln 6.25 + \ln e^{0.115t}$$

$$\ln S = \ln 6.25 + 0.115t$$

ويأخذ المشتقة علمًا بأن ln 6.25 مقدارًا ثابتًا

$$G = \frac{d}{dt}(\ln S) = 0.115 = 11.5\%$$

إن معدل نمو الدالة الأسية الطبيعية سيكون دائمًا هو معامل المتغير فى الأس .

11.36. أرباح لمؤسسة π نمت بشكل منتظم خلال الزمن من 3.40 مليون دولار فى عـام 1985 إلـى 6.71 مليـون فى عام 1993 . (*a*) عبر عن الأرباح كدالة أسية طبيعية $\pi = \pi_0 e^{rt}$ و (*b*) أوجد معدل النمو السنوى .

11.36. A firm's profits π have been growing consistently over time from \$3.40 million in 1985 to \$6.71 million in 1993. (*a*) Express profits as a natural exponential function of time $\pi = \pi_0 e^{rt}$ and (*b*) find the annual rate of growth.

(*a*) بوضع $t = 0$ لسنة الأساس 1985 و $t = 8$ لسنة 1993 .

$$3.40 = \pi_0 e^{r(0)} = \pi_0$$

$$6.71 = \pi_0 e^{r(8)} \qquad (1121)$$

وبالتعويض عن $\pi_0 = 3.40$ فى (11.21) واختصار المقدار جبريًا

$$6.71 = 3.40e^{8r}$$

$$1.97353 = e^{8r}$$

$$0.67982 = 8r$$

وبأخذ اللوغاريتم

$$r = 0.08498 \approx 0.085$$

$$\pi = 3.40e^{0.085t}$$

(*b*) معدل النمو هو 8.5% .

11.37. ينمو سكان الدولة P من 54 مليون نسمة عام 1987 إلى 63.9 فى عام 1993 . ما هو معدل نمو السكان r ؟

11.37. A country's population P goes from 54 million in 1987 to 63.9 million in 1993. At what rate r is the population growing?

بوضع $t = 0$ لسنة الأساس 1987 و $t = 6$ لسنة 1993 . ولاحظ من المسائل السابقة أن قيمة الدالة عند $t = 0$ هو أساس الدالة فى السنوات التالية .

$$63.9 = 54e^{r(6)}$$

$$1.18333 = e^{6r}$$

اختصر المقدار جبريًا

$$0.16833 = 6r$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعى

$$r = 0.02806 \approx 0.028$$

$$P = 54e^{0.028t}$$

ومن ثم فإن معدل نمو السكان هو 2.8% .

11.38. غابة فى دولة ما T تقطع بمعدل 3.2% فى السنة . ما مقدار ما يتبقى من الغابة بعد 8 سنوات ؟

11.38. A country's timberland T is being cut back at a rate of 3.2 percent a year. How much will be left in 8 years?

$$T = T_0 e^{-0.032(8)} = T_0 e^{-0.256}$$

وباستخدام الآلة الحاسبة .

$$T = 0.77414T_0 \approx 77\%$$

11.39. أرض زراعية L فى قرية ما تتآكل بمعدل 1.8% فى السنة . فإذا استمرت هذه الأوضاع ما مقدار ما تبقى من الأرض الزراعية بعد 15 سنة ؟

11.39. A village's arable land L is eroding at a rate of 1.8 percent a year. If conditions continue, how much will be left in 15 years?

$$L = L_0 e^{-0.018(15)} = L_0 e^{-0.27}$$

$$L = 0.76338L_0 \approx 76\%$$

مسائل إضافية

Exponential-Logarithmic Conversions التحويلات الأسية واللوغاريتمية

11.40. حول اللوغاريتمات التالية إلى صيغها الأسية المكافئة :

11.40. Convert the following logarithms into their equivalent exponential forms:

(*a*) $\log_{13} 169 = 2$ (*b*) $\log_5 125 = 3$ (*c*) $\log_6(\frac{1}{36}) = -2$

(*d*) $\log_{81} 9 = \frac{1}{2}$ (*e*) $\log_4(\frac{1}{64}) = -3$ (*f*) $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$

11.41. حول اللوغاريتمات الطبيعية التالية إلى صيغها الأسية الطبيعية المكافئة :

11.41. Change the following natural logarithms to their equivalent natural exponential forms:

(*a*) $\ln 13 = 2.56495$ (*b*) $\ln 5.8 = 1.75786$ (*c*) $\ln 0.4 = -0.91629$

(*d*) $\ln 62 = 4.12713$ (*e*) $\ln y = 2.35t$ (*f*) $\ln y = 7 - 9t$

11.42. حول الصيغ الأسية التالية إلى صيغها اللوغاريتمية المكافئة :

11.42. Convert the following exponential expressions to their equivalent logarithmic forms:

(*a*) $64 = 8^2$ (*b*) $81 = 3^4$ (*c*) $\frac{1}{8} = 2^{-3}$

(*d*) $7 = 49^{1/2}$ (*e*) $4 = 8^{2/3}$ (*f*) $216 = 36^{3/2}$

11.43. حول الصيغ الأسية الطبيعية التالية إلى صيغها اللوغاريتمية الطبيعية المكافئة :

11.43. Change the following natural exponential expressions to their equivalent natural logarithmic forms:

(*a*) $6.7 = e^{1.90211}$ (*b*) $0.25 = e^{-1.38629}$ (*c*) $122 = e^{4.80402}$

(*d*) $43 = e^{3.76120}$ (*e*) $y = e^{0.06t}$ (*f*) $y = e^{5t+8}$

11.44. حل كل من التالى للمتغير أو المعامل المجهول :

11.44. Solve each of the following for the unknown variable or parameter:

(*a*) $y = \log_{11} 121$ (*b*) $y = \log_3 \left(\frac{1}{81}\right)$ (*c*) $\log_3 x = 5$

(*d*) $\log_{64} x = \frac{4}{3}$ (*e*) $\log_a 9 = \frac{2}{3}$ (*f*) $\log_a \left(\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{2}$

Properties of Logarithms and Exponents خصائص اللوغاريتمات والأسس

11.45. حول الصيغ اللوغاريتمية التالية إلى مجموع أو طرح أو حاصل ضرب :

11.45. Convert the following logarithmic expressions to sums, differences, or products:

(*a*) $y = \log_a 38x^2$ (*b*) $y = \log_a x^2y^4$ (*c*) $y = \log_a(7x/9y)$ (*d*) $y = \log_a(x^5/y^3)$

11.46. حول الصيغ اللوغاريتمية الطبيعية التالية إلى مجموع أو طرح أو حاصل ضرب :

11.46. Convert the following natural logarithmic expressions to sums, differences, or products:

(*a*) $y = \ln\left(\frac{x^4y^2}{z^5}\right)$ (*b*) $y = \ln \sqrt[4]{x}$

(*c*) $y = \ln \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y}}$ (*d*) $y = \ln\sqrt{\frac{x^7}{y^5}}$

11.47. Simplify the following exponential expressions: 11.47. اختصر الصيغ الأسية التالية :

(*a*) $y = a^{5x} \cdot a^{8y}$ (*b*) $y = \frac{a^{2x}}{a^{7y}}$ (*c*) $y = (a^{3x})^{2y}$ (*d*) $y = \sqrt[3]{a^{7x}}$

11.48. Simplify the following natural exponential expressions: 11.48. اختصر الصيغ الأسية الطبيعية التالية :

(*a*) $y = (e^{6x})^{-1/2}$ (*b*) $y = \frac{e^{4x}}{e^{5y}}$ (*c*) $y = \sqrt{e^{5x}}$ (*d*) $y = \frac{e^{7x}}{e^{-4y}}$

Derivatives المشتقات

11.49. فاضل كل من الدوال الأسية الطبيعية التالية :

11.49. Differentiate each of the following natural exponential functions:

(*a*) $f(x) = e^{-9x}$
(*b*) $y = e^{5x^3}$
(*c*) $f(x) = 7e^{8-3x^2}$
(*d*) $y = 6e^{4x^3-17}$
(*e*) $f(x) = -\frac{1}{2}e^{(1/3)x^6}$
(*f*) $y = -\frac{1}{4}e^{5-x^2}$

11.50. فاضل كل من الدوال اللوغاريتمية الطبيعية التالية :

11.50. Differentiate each of the following natural logarithmic functions:

(*a*) $y = \ln (2x^2 - 5)$
(*b*) $f(x) = \ln\ 17x$
(*c*) $y = \ln\ 9x^5$
(*d*) $f(x) = \ln (x^3 + 4x^2 - 9x + 16)$
(*e*) $y = 3 \ln\ 6x^4$
(*f*) $f(x) = 2 \ln (5x^3 - 4)$

11.51. فاضل الدوال التالية باستخدام مجموعة من القواعد :

11.51. Combine rules to differentiate the following functions:

(*a*) $f(x) = (e^{-5x})^3$
(*b*) $y = 7xe^{4x}$
(*c*) $f(x) = (e^{3x} + e^{2x})^3$
(*d*) $y = \dfrac{e^{6x}}{2x+1}$
(*e*) $f(x) = \ln (3x - 7)^2$
(*f*) $y = 8x^2 \ln\ x^3$
(*g*) $f(x) = \ln^2 5x^4$
(*h*) $y = \dfrac{e^x}{\ln x}$

Interest Compounding الفائدة المركبة

حدد لكل من الأسئلة التالية القيمة المستقبلية لمبالغ الأصول المحددة عندما تحسب الفائدة (*a*) سنويًا ، (*b*) نصف سنوى ، (*c*) ربع سنوى ، (*d*) على نحو مستمر .

11.52. $1000 at 8 percent for 5 years. **11.52.** مبلغ قدره 1000 دولار أُقرض بمعدل فائدة 8% لمدة 5 سنوات .

11.53. $2500 at 6 percent for 4 years. **11.53.** مبلغ قدره 2500 دولار أُقرض بمعدل فائدة 6% لمدة 4 سنوات .

11.54. $500 at 12 percent for 6 years. **11.54.** مبلغ قدره 500 دولار أُقرض بمعدل فائدة 12% لمدة 6 سنوات .

11.55. $10,000 at 9 percent for 8 years. **11.55.** مبلغ قدره 10,000 دولار أُقرض بمعدل فائدة 9% لمدة 8 سنوات .

11.56. كم عدد السنوات (*t*) التى يتطلبها مبلغ من النقود لكى يتضاعف عند معدل فائدة 8% يحسب نصف سنوى ؟

11.56. How long will it take money to double at 8 percent interest when compounded semiannually?

11.57. كم عدد السنوات (*t*) التى يتطلبها مبلغ من النقود لكى يبلغ ثلاثة أضعاف عند معدل فائدة 9% يحسب سنويًا ؟

11.57. How long will it take money to treble at 9 percent interest when compounded annually?

Discounting الخصم

11.58. حدد القيم الحالية بمبلغ 5000 دولار سيدفع بعد 8 سنوات إذا كانت الفائدة الجارية 10% وتحسب (*a*) سنويًا . (*b*) نصف سنوى . (*c*) ربع سنوى . (*d*) على نحو مستمر .

11.58. Determine the present value of $5000 to be paid in 8 years time if current interest of 10 percent is compounded (*a*) annually, (*b*) semiannually, (*c*) quarterly, and (*d*) continuously.

11.59. أعد حل المسألة 11.58. لمبلغ 8000 دولار يدفع بعد 4 سنوات عندما تكون الفائدة الجارية 5% .

11.59. Repeat Problem 11.58 for $8000 to be paid in 4 years when the current interest rate is 5 percent.

11.60. إذا أعطيت أن معدل الفائدة الجارى 6% ويحسب نصف سنوى ، أوجد القيمة الحالية لمبلغ 10,000 دولار يدفع بعد (*a*) سنة . (*b*) 3 سنوات . (*c*) 5 سنوات . (*d*) 10 سنوات .

11.60. Given the current interest rate of 6 percent compounded annually, find the present value of $10,000 to be paid in (*a*) 1 year, (*b*) 3 years, (*c*) 5 years, and (*d*) 10 years.

11.61. إذا أعطيت أن معدل الفائدة الجارى 7% ويحسب نصف سنوى ، أوجد القيمة الحالية لمبلغ 10,000 دولار يدفع بعد (*a*) سنة . (*b*) 3 سنوات . (*c*) 5 سنوات . (*d*) 10 سنوات .

11.61. Given the current interest rate of 7 percent compounded semiannually, find the present value of $10,000 to be paid in (*a*) 1 year, (*b*) 3 years, (*c*) 5 years, and (*d*) 10 years.

معدلات النمو Growth Rates

11.62. زادت مبيعات الشركة من 23.2 مليون دولار عام 1987 إلى 32.27 مليون دولار عام 1993 . (*a*) عبر عن المبيعات *S* كدالة أسية طبيعية للزمن . (*b*) حدد معدل النمو السنوى للمبيعات *G* .

11.62. A company's sales have been growing consistently over time from $23.2 million in 1987 to $32.27 million in 1993. (*a*) Express sales *S* as a natural exponential function of time *t*. (*b*) Indicate the annual rate of growth *G* of sales.

11.63. زاد الإيراد الكلى للشركة TR من 345 مليون دولار عام 1985 إلى 616.18 مليون دولار عام 1993 . (*a*) أوجد الدالة الأسية . (*b*) وحدد معدل نمو الإيراد .

11.63. A firm's total revenue TR, growing consistently over time, has increased from $345 million in 1985 to $616.18 million in 1993. (*a*) Find the exponential function and (*b*) indicate the growth rate of revenue.

11.64. شركة مبيعاتها عام 1993 حوالى 8.9 مليون دولار وقد قدرت المبيعات عام 1997 بمبلغ 13.82 مليون دولار . (*a*) حدد الدالة الأسية المستخدمة فى التقدير و (*b*) حدد معدل النمو المخطط .

11.64. A company with 1993 sales of $8.9 million estimates sales of $13.82 million in 1997. (*a*) Determine the exponential function used for the estimate and (*b*) indicate the projected growth rate.

11.65. يبلغ سكان دولة ما 44.35 مليون نسمة وينمو بمعدل 2.65% فى السنة . أوجد حجم السكان المتوقع بعد 5 سنوات .

11.65. A country's population of 44.35 million is growing at a rate of 2.65 percent a year. Find the expected population in 5 years.

11.66. ما هو مستوى الإيراد المخطط بعد 3 سنوات لشركة إيرادتها الجارية 48.25 مليون دولار إذا قدر النمو بمعدل 8.6% ويحسب بشكل مستمر ؟

11.66. What is the projected level of revenue in 3 years for a company with current revenues of $48.25 million if estimated growth under continuous compounding is 8.6 percent?

11.67. باستخدام الدالة الأسية رأى أحد الاستشاريين أن تداول الصحيفة سيزيد من 1.25 مليون فى الوقت الراهن إلى 1.73 مليون خلال 5 سنوات . ما هو معدل النمو الذى افترضه الاستشارى ؟

11.67. Using an exponential function a consultant suggests that a newspaper's circulation will increase from 1.25 million at present to 1.73 million in 5 years. What growth rate is the consultant assuming?

11.68. آلة قيمتها اليوم 3.8 مليون دولار ما هى قيمتها بعد 3 سنوات إذا كانت تستهلك بمعدل مستمر عند 15% فى السنة ؟

11.68. What will a machine worth $3.8 million today be worth in 3 years if it depreciates at a continuous rate of 15 percent a year?

حل المسائل الإضافية

11.40. (*a*) $169 = 13^2$ (*b*) $125 = 5^3$ (*c*) $\frac{1}{36} = 6^{-2}$
(*d*) $9 = 81^{1/2}$ (*e*) $\frac{1}{64} = 4^{-3}$ (*f*) $2 = 16^{1/4}$

11.41. (*a*) $13 = e^{2.56495}$ (*b*) $5.8 = e^{1.75786}$ (*c*) $0.4 = e^{-0.91629}$
(*d*) $62 = e^{4.12713}$ (*e*) $y = e^{2.35t}$ (*f*) $y = e^{7-9t}$

11.42. (*a*) $\log_8 64 = 2$ (*b*) $\log_3 81 = 4$ (*c*) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$
(*d*) $\log_{49} 7 = \frac{1}{2}$ (*e*) $\log_8 4 = \frac{2}{3}$ (*f*) $\log_{36} 216 = \frac{3}{2}$

11.43. (*a*) $\ln 6.7 = 1.90211$ (*b*) $\ln 0.25 = -1.38629$ (*c*) $\ln 122 = 4.80402$
(*d*) $\ln 43 = 3.76120$ (*e*) $\ln y = 0.06t$ (*f*) $\ln y = 5t + 8$

11.44. (*a*) $y = 2$ (*b*) $y = -4$ (*c*) $x = 243$
(*d*) $x = 256$ (*e*) $a = 27$ (*f*) $a = 64$

11.45. (*a*) $y = \log_a 38 + 2\log_a x$ (*b*) $y = 2\log_a x + 4\log_a y$
(*c*) $y = \log_a 7 + \log_a x - \log_a 9 - \log_a y$ (*d*) $y = 5\log_a x - 3\log_a y$

11.46. (*a*) $y = 4\ln x + 2\ln y - 5\ln z$ (*b*) $y = \frac{1}{4}\ln x$
(*c*) $y = \frac{1}{3}\ln x - \frac{1}{2}\ln y$ (*d*) $y = \frac{1}{2}(7\ln x - 5\ln y)$

11.47. (*a*) $y = a^{5x+8y}$ (*b*) $y = a^{2x-7y}$ (*c*) $y = a^{6xy}$ (*d*) $y = a^{(7/3)x}$

11.48. (*a*) $y = e^{-3x} = \dfrac{1}{e^{3x}}$ (*b*) $y = e^{4x-5y}$
(*c*) $y = e^{2.5x}$ (*d*) $y = e^{7x+4y}$

11.49. (*a*) $f' = -9e^{-9x}$ (*b*) $y' = 15x^2e^{5x^3}$ (*c*) $f'(x) = -42xe^{8-3x^2}$
(*d*) $y' = 72x^2e^{4x^3-17}$ (*e*) $f' = -x^5e^{(1/3)x^6}$ (*f*) $y' = \frac{1}{2}xe^{5-x^2}$

11.50. (*a*) $y' = \dfrac{4x}{2x^2-5}$ (*b*) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ (*c*) $y' = \dfrac{5}{x}$
(*d*) $f' = \dfrac{3x^2+8x-9}{x^3+4x^2-9x+16}$ (*e*) $y' = \dfrac{12}{x}$ (*f*) $f'(x) = \dfrac{30x^2}{5x^3-4}$

11.51. (*a*) $f'(x) = -15e^{-15x}$ (*b*) $y' = 28xe^{4x} + 7e^{4x}$
(*c*) $f' = (9e^{3x} + 6e^{2x})(e^{3x} + e^{2x})^2$ (*d*) $y' = \dfrac{12xe^{6x} + 4e^{6x}}{(2x+1)^2}$
(*e*) $f'(x) = \dfrac{6}{3x-7}$ (*f*) $y' = 8x(3 + 2\ln x^3)$
(*g*) $f' = \dfrac{8\ln 5x^4}{x}$ (*h*) $y' = \dfrac{e^x[\ln x - (1/x)}{\ln^2 x}]$

11.52. (*a*) \$1469.33 (*b*) \$1480.24 (*c*) \$1485.95 (*d*) \$1491.82

11.53. (*a*) \$3156.19 (*b*) \$3166.93 (*c*) \$3172.46 (*d*) \$3178.12

11.54. (*a*) \$986.91 (*b*) \$1006.10 (*c*) \$1016.40 (*d*) \$1027.22

11.55. (*a*) \$19,925.63 (*b*) \$20,223.70 (*c*) \$20,381.03 (*d*) \$20,544.33

11.56. 8.836

11.57. 12.748

11.58. (*a*) $2332.54 (*b*) $2290.56 (*c*) $2268.85 (*d*) $2246.64

11.59. (*a*) $6581.62 (*b*) $6565.97 (*c*) $6557.97 (*d*) $6549.85

11.60. (*a*) $9433.96 (*b*) $8396.19 (*c*) $7472.58 (*d*) $5583.95

11.61. (*a*) $9335.11 (*b*) $8135.01 (*c*) $7089.19 (*d*) $5025.66

11.62. (*a*) $S = 23.2e^{0.055t}$ (*b*) $G = 0.055$ or $5.5\ \%$

11.63. (*a*) $\text{TR} = 345e^{0.0725t}$ (*b*) $G = 7.25\ \%$

11.64. (*a*) $S = 8.9e^{0.11t}$ (*b*) $G = 11\,\%$

11.65. 50.63 مليون

11.66. $62.45 مليون

11.67. $G = 6.5\ \%$

11.68. $2.42 مليون

الفصل الثانى عشر

حساب التكامل Integral Calculus

12.1 التكامل Integration

لقد خصص الفصل التاسع والعاشر لحساب التفاضل والذى يقيس معدل تغير الدوال . ولقد درسنا أن التفاضل هو عملية إيجاد المشتقة $F'(x)$ للدالة $F(x)$. وفى الإدارة والاقتصاد عادة ما نعرف معدل تغير الدالة $F'(x)$ ونحتاج إلى إيجاد الدالة الأصلية $F(x)$. إن القيام بعكس عملية التفاضل وإيجاد الدالة الأصلية من المشتقة يسمى معكوس التفاضل أو التكامل وتسمى الدالة الأصلية $F(x)$ بمعكوس المشتقة أو تكامل $F'(x)$.

مثال 1 : بوضع $f(x) = F'(x)$ فإن معكوس المشتقة $F(x)$ يعبر عنه رياضيًا كما يلى :

EXAMPLE 1. Letting $f(x) = F'(x)$ for simplicity, the antiderivative of $f(x)$ is expressed mathematically as

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

ويقرأ الجانب الأيسر من المعادلة أنه تكامل $f(x)$ غير المحدد بالنسبة للمتغير x . وتسمى $\int$ علامة التكامل و $f(x)$ تسمى المكامل (integrand) و c تسمى ثابت التكامل . والذى سوف يفسر فى المثال 3 .

12.2 قواعد التكامل غير المحدد Rules For Indefinite Integral

لقد تم الحصول على قواعد التكامل غير المحدد من خلال القيام بعكس القواعد المناظرة للتفاضل . ومن السهل التحقق من دقة هذه القواعد طالما أن مشتقة التكامل يجب أن تساوى المكامل . وقواعد التكامل غير المحدد موضحة فى المثال 2 والمسائل من 12.1 إلى 12.3 .

القاعدة (1) : تكامل الثابت k هو

$$\int k\,dx = kx + c$$

القاعدة (2) : تكامل الواحد ، يكتب ببساطة dx وليس $(1\,dx)$ ، هو

$$\int dx = x + c$$

القاعدة (3) : تكامل دالة القوى x^n (حيث $n \neq -1$) تبينه قاعدة القوى

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \qquad (n \neq -1)$$

القاعدة (4) : تكامل x^{-1} أو $\left(\frac{1}{x}\right)$ هو

$$\int x^{-1}\,dx = \ln x + c \qquad (x > 0)$$

إن الشرط $x > 0$ يعتبر ضروريًا لأن الأعداد الموجبة فقط لها لوغاريتم . وبالنسبة للأعداد السالبة .

$$\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + c \qquad (x \neq 0)$$

القاعدة (5) : تكامل الدالة الأسية الطبيعية هو

$$\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx} + c$$

القاعدة (6) : تكامل الثابت المضروب فى دالة يساوى الثابت مضروبًا فى تكامل الدالة

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

القاعدة (7) : تكامل جمع أو طرح دالتين أو أكثر يساوى جمع أو طرح تكاملا تها

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

القاعدة (8) : تكامل سالب الدالة يساوى سالب تكامل الدالة

$$\int -f(x)\,dx = -\int f(x)\,dx$$

مثال 2 : قواعد التكامل غير المحدد مبينة أدناه . تحقق من كل حل بنفسك من خلال التأكد من أن مشتقة معكوس المشتقة يساوى المكامل .

EXAMPLE 2. The rules for indefinite integrals are illustrated below. Check each answer on your own by making sure that the derivative of the antiderivative equals the integrand.

(*a*) $$\int 9\,dx = 9x + c$$ (قاعدة 1)

(*b*) $$\int x^4\,dx = \frac{1}{4+1}x^{4+1} + c = \frac{1}{5}x^5 + c$$ (قاعدة 3)

(*c*) $$\int 4x^3\,dx = 4\int x^3\,dx$$ (قاعدة 6)

$$= 4\left(\frac{1}{4}x^4 + c_1\right)$$ (قاعدة 3)

$$= x^4 + c$$

حيث إن c_1 و c ثوابت اختيارية وأن $4\,c_1 = c$ وطالما أن c ثابت اختيارى فإنه يمكن تجاهله فى الحسابات الأولية وإدخاله فقط فى الحل النهائى

(*d*) $$\int (2x^2 - x + 1)\,dx = 2\int x^2\,dx - \int x\,dx + \int dx$$ (قاعدة 6 ، 7 ، 8)

$$= 2\left(\frac{1}{3}x^3\right) - \frac{1}{2}x^2 + x + c$$ (قاعدة 2 ، 3)

$$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + c$$

(e) $\int 12x^{-1}\,dx = 12\int x^{-1}\,dx$ (قاعدة 6)

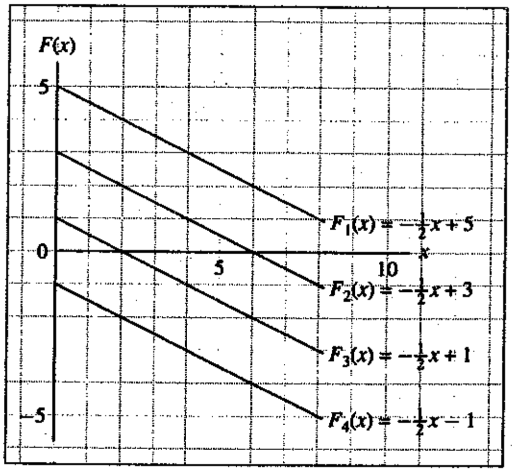
$= 12\ln|x| + c$ (قاعدة 4)

(f) $\int x^{-4} = \frac{1}{-4+1}x^{-4+1} = -\frac{1}{3}x^{-3} + c$ (قاعدة 3)

(g) $\int 20e^{-4x}\,dx = 20\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot e^{-4x}\right) = -5e^{-4x} + c$ (قاعدة 5)

مثال 3 : بالنسبة لقواعد التفاضل فإننا نعلم أن الدوال التى تختلف فقط من خلال الثابت k فإن لها نفس المشتقة . فعلى سبيل المثال فإن الدالة $F(x) = -\frac{1}{2}x + k$ لها نفس المشتقة $F'(x) = f(x) = -\frac{1}{2}$ لأى عدد لا نهائى من القيم الممكنة لـ k . وإذا عكسنا العملية فإنه من الواضح أن $\int -\left(\frac{1}{2}\right)dx$ يجب أن يكون معكوس المشتقة لأى عدد لا نهائى من الدوال تختلف عن بعضها البعض فقط بمقدار الثابت . ولهذا فإن ثابت التكامل c يمثل قيمة أى ثابت يعتبر جزءاً من الدالة الأصلية ولكنه استبعد من المشتقة من خلال قواعد التفاضل . وأن التمثيل البيانى للتكامل غير المحدد $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ ـ حيث إن c غير محددة ـ هو عبارة عن عائلة من المنحنيات المتوازية من ناحية بأن ميل المماس لأى منهما عند x هو $f(x)$. وبالتحديد فإن c تحدد المنحنى ، وأن تغير c ينقل المنحنى . وهذا مبين فى الشكل (1–12) للتكامل غير المحدد $\int -\frac{1}{2}dx = -\frac{1}{2}x + c$ حيث $c = 5, 3, 1, -1$ على التوالى :

EXAMPLE 3. Fromthe rules of differentiation, we know that functions which differ only by a constant k have the same derivative. The function $F(x) = -\frac{1}{2}x + k$, for instance, has the same derivative, $F'(x) = f(x) = -\frac{1}{2}$, for any infinite number of possible values for k. If the process is reversed, it is clear that $\int -(\frac{1}{2})\,dx$ must be the antiderivative for an infinite number of functions differing from each other only by a constant. The constant of integration c, then, serves to represent the value of any constant that was part of the original function but precluded from the derivative by the rules of differentiation. The graph of an indefinite integral $\int f(x)\,dx = F(x)+c$, where c is unspecified, is a family of curves parallel in the sense that the slope of the tangent to any of them at x is $f(x)$. Specifying c specifies the curve; changing c shifts the curve. This is illustrated in Fig. 12-1 for the indefinite integral $\int -\frac{1}{2}\,dx = -\frac{1}{2}x + c$ where $c = 5, 3, 1$, and -1, respectively.

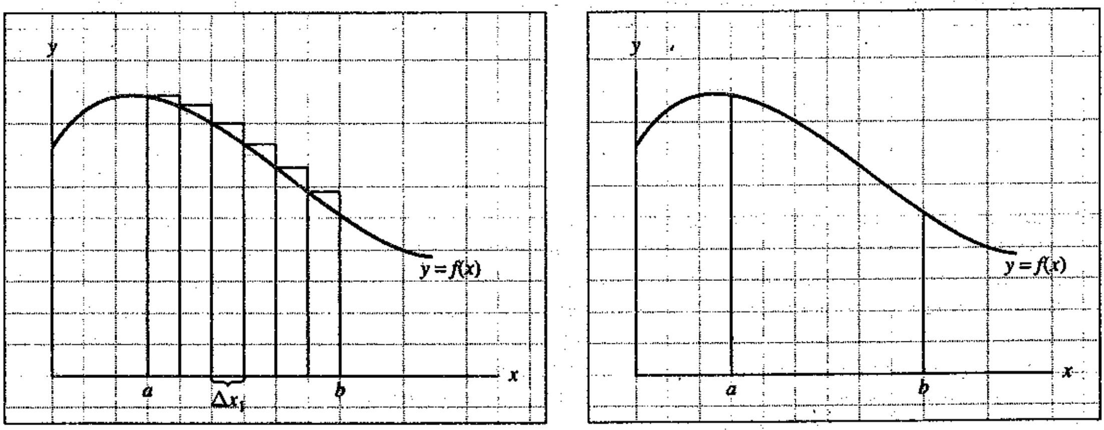


شكل (1–12)

12.3 المساحة تحت المنحنى Area Under a Curve

لا توجد صيغة هندسية للمساحة تحت المنحنى غير العادى مثل $y=f(x)$ بين $x=a$ و $x=b$ فى الشكل (12–2)(*a*) . ويمكن الحصول على المساحة بصورة تقريبية من خلال تقسيم المجال $[a, b]$ إلى أقسام فرعية متساوية وخلق مستطيلات بحيث يكون ارتفاع كل مستطيل مثلاً مساويًا للقيمة الأكبر لدالة على النحو المبين فى الشكل (12–2)(*b*) . ومن ثم فإن مجموع مساحات المستطيلات $\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)\Delta x_i]$ والذى يسمى مجموع ريمان (Riemann Sum) سوف يقدر ـ ولكنه تقديرًا مبالغًا فيه ـ المساحة تحت المنحنى . وإنه كلما صغرت التقسيمات الفرعية (Δx_i) تزايد عدد المستطيلات ومن ثم يقترب مجموع مساحات المستطيلات $\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)\Delta x_i]$ من المساحة الفعلية تحت المنحنى . فإذا تزايد عدد التقسيمات الفرعية بحيث تقترب $n \to \infty$ ، يصبح كل تقسيم فرعى صغير جداً $(\Delta x_i = dx_i = dx)$ وأن المساحة تحت المنحنى A يمكن التعبير عنها رياضيًا كما يلى :

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$



(*b*) (*a*)

شكل (12–2)

12.4 التكامل المحدد The Definite Integral

المساحة تحت الرسم البيانى لدالة مستمرة مثل التى فى الشكل (12–2) يمكن التعبير عنها بشكل محكم لتكامل محدد للدالة $f(x)$ خلال الفترة من a إلى b وبالتعبير الرياضى .

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

ويقرأ الجانب الأيسر "التكامل من a إلى b للدالة $f(x)$". وتسمى a الحد الأدنى للتكامل و b الحد الأعلى للتكامل . وبخلاف التكامل غير المحدد الذى هو عبارة عن مجموعة من الدوال تحتوى على جميع معكوسات المشتقات للدالة $f(x)$ كما بينا فى المثال 3 ، فإن التكامل المحدد هو عدد حقيقى يمكن تقديره باستخدام النظرية الأساسية والتى هى موضوع القسم القادم .

12.5 النظرية الأساسية للتكامل The Fundamental Theorem of Calculus

ترى النظرية الأساسية ببساطة أن القيمة العددية للتكامل المحدد للدالة المستمرة $F(x)$ فى الفترة من a إلى b تساوى معكوس المشتقة $F(x)+c$ مقدراً عند الحد الأعلى للتكامل B ناقصًا نفس معكـوس المشتقـة $F(x) + c$ مقدراً عند الحد الأدنى للتكامل a . ومع ثابت مشترك c لكلا الجـانبين فـإن ثـابت التكـامل يحـذف بـالطرح . وتأخذ النظرية الصيغة الرياضية التالية :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

حيث يحدد الرمز $\Big|_a^b$ أو $\Big]_a^b$ أو $[\ldots]_a^b$ أن a و b يتم التعويض بها على التوالى بالنسبة إلى x . انظر الأمثلة 4 و 5 والمسائل 12.4 و 12.5 .

EXAMPLE 4. The definite integrals given below

مثال 4 : لقد تم تقدير التكاملات المحددة أدناه كما يلى :

$$(a)\ \int_2^6 8x\,dx \qquad (b)\ \int_1^3 (6x^2+5)\,dx$$

يمكن تقديرها بالتالى

$$(a)\qquad \int_2^6 8x\,dx = 4x^2\Big|_2^6 = 4(6)^2 - 4(2)^2 = 128$$

$$(b)\qquad \int_1^3 (6x^2+5)\,dx = \left[2x^3+5x\right]_1^3 = \left[2(3)^3+5(3)\right] - \left[2(1)^3+5(1)\right] = 69 - 7 = 62$$

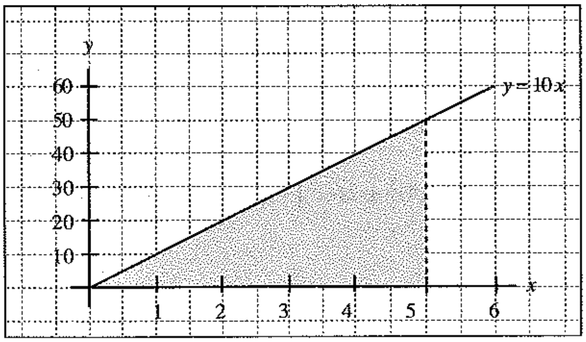
مثال 5 : استخدم التكامل المحدد أدناه لتحديد المساحة تحت المنحنى فى الشكـل (12-3) فـى الفـترة مـن 0 إلى 5 كما يلى :

EXAMPLE 5. The definite integral is used below to determine the area under the curve in Fig. 12-3 over the interval 0 to 5 as follows:

$$A = \int_0^5 10x\,dx = 5x^2\Big|_0^5 = 5(5)^2 - 5(0)^2 = 125 - 0 = 125$$

يمكن بسهولة التحقق من الحل باستخدام الصيغة الهندسية $A=\frac{1}{2}hw$ حيث h الارتفاع و w العرض

$$A = \tfrac{1}{2}hw = \tfrac{1}{2}yx = \tfrac{1}{2}(50)(5) = 125$$



شكل (12-3)

12.6 خصائص التكامل المحدد Properties of Definite Integral

1. إن تبادل حدى التكامل يغير من إشارة التكامل .

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \qquad (12.1)$$

2. إذا كان الحد الأعلى للتكامل يساوى الحد الأدنى للتكامل فإن القيمة العددية للتكامل المحدد تساوى صفراً .

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0 \qquad (12.2)$$

3. يمكن التعبير عن التكامل المحدد كمجموع لعدد من التكاملات الفرعية المحددة .

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \qquad a \le b \le c \qquad (12.3)$$

4. إن جمع أو طرح تكاملين محددين بحدود تكامل متماثلة يساوى التكامل المحدد لجمع أو طرح الدالتين .

$$\int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx \qquad (12.4)$$

5. التكامل المحدد الثابت مضروبًا فى دالة يساوى الثابت مضروبًا فى التكامل المحدد للدالة .

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \qquad (12.5)$$

انظر المثال 6 والمسائل 12.6 و 12.7 .

مثال 6 : لقد تم تقدير التكاملات المحددة التالية لتوضيح عينة من خصائص التكاملات السابقة .

EXAMPLE 6. The following definite integrals are evaluated to illustrate a sampling of the properties of integrals presented above.

1. $\int_1^2 3x^4\,dx = -\int_2^1 3x^4\,dx$ (قاعدة 1)

$$\int_1^2 3x^4\,dx = \tfrac{3}{5}x^5\Big|_1^2 = \tfrac{3}{5}(2)^5 - \tfrac{3}{5}(1)^5 = 18.6$$

$$-\int_2^1 3x^4\,dx = -\tfrac{3}{5}x^5\Big|_2^1 = -\left[\tfrac{3}{5}(1)^5 - \tfrac{3}{5}(2)^5\right] = -(-18.6) = 18.6$$

2. $\int_4^4 (3x^2 + 4x)\,dx = 0$ (قاعدة 2)

$$\int_4^4 (3x^2 + 4x)\,dx = (x^3 + 2x^2)\Big|_4^4$$

$$= \left[(4)^3 + 2(4)^2\right] - \left[(4)^3 + 2(4)^2\right] = 0$$

3. $\int_0^5 8x\,dx = \int_0^2 8x\,dx + \int_2^5 8x\,dx$ (قاعدة 3)

$$\int_0^5 8x\,dx = 4x^2\Big|_0^5 = 4(5)^2 - 4(0)^2 = 100$$

$$\int_0^2 8x\,dx = 4x^2\Big|_0^2 = 4(2)^2 - 4(0)^2 = 16$$

$$\int_2^5 8x\,dx = 4x^2\Big|_2^5 = 4(5)^2 - 4(2)^2 = 84$$

ومن ثم $16 + 84 = 100$

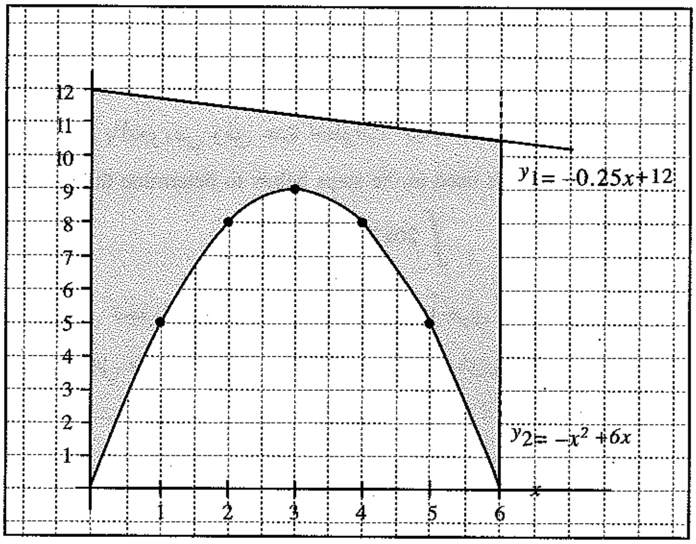
12.7 المساحة بين المنحنيات Area Between Curves

مساحة المنطقة بين منحنيين أو أكثر يمكن تقديرها بتطبيق القاعدة (4) من خصائص التكامل المحدد السابقة . وهذه الطريقة بينة فى المثال 7 ومعالجة فى المسائل من 12.8 إلى 12.15 .

مثال 7 : باستخدام خصائص التكامل فإن مساحة المنطقة A بين الدالتين مثل $y_1 = -0.25x + 12$ و $y_2 = -x^2 + 6x$ ، من $x = 0$ إلى $x = 6$ وجدت كما يلى :

EXAMPLE 7. Using the properties of integrals, the area A of the region between two functions such as $y_1 = -0.25x + 12$ and $y_2 = -x^2 + 6x$ from $x = 0$ to $x = 6$, is found as follows.

(*a*) نرسم مخططًا بيانيًا للدوال ونظلل المساحة الفرعية المرغوبة كما فى الشكل (4–12) .



شكل (4–12)

(*b*) لاحظ العلاقة بين المنحنيات . وطالما أن y_1 تقع فوق y_2 من خلال المنطقة المحددة فإن المنطقة المرغوبة هى ببساطة المساحة أسفل y_1 ناقصًا المساحة أسفل y_2 بين $x = 0$ و $x = 6$.

$$A = \int_0^6 (-0.25x + 12)\,dx - \int_0^6 (-x^2 + 6x)\,dx$$

وباستخدام (12.4)

$$A = \int_0^6 \left[(-0.25x + 12) - (-x^2 + 6x)\right] dx$$

$$A = \int_0^6 (x^2 - 6.25x + 12)\,dx$$

$$A = \left(\frac{1}{3}x^3 - 3.125x^2 + 12x\right)\Big|_0^6 = 31.5 - 0 = 31.5$$

انظر أيضًا المسائل 12.8 إلى 12.15 .

12.8 التكامل بالتعويض Integration By Substitution

من غير الممكن إجراء تكامل حاصل ضرب أو خارج قسمة دالتين قابلتين للتفاضل بالنسبة إلى x مثل

$$\int 20x^4(x^5+7)\,dx$$

وفقًا للقواعد البسيطة التى عرضت فى بداية الفصل . فإذا أمكن التعبير عن المكامل كمضروب ثابت لدالة أخرى u ومشتقة هذه الدالة du/dx فإنه يمكن تطبيق التكامل بالتعويض . وبالتعبير عن مكامل $f(x)$ كدالة فى u ومشتقة هذه الدالة هى du/dx وبالتكامل بالنسبة إلى x فإننا نحصل على

$$\int f(x)\,dx = \int \left(u\frac{du}{dx}\right) dx$$

$$\int f(x)\,dx = \int u\,du = F(u)+c$$

إن التكامل بالتعويض يقابل قاعدة السلسلة وقاعدة دالة القوى العامة فى حساب التفاضل . انظر الأمثلة 8 و 9 والمسائل 12.16 إلى 12.23 .

مثال 8 : لقد استخدم التكامل بالتعويض وفق عدة خطوات أدناه لتحديد التكامل غير المحدد .

EXAMPLE 8. Integration by substitution is used in the steps below to determine the indefinite integral

$$\int 20x^4(x^5+7)\,dx$$

1. تحقق من أن المكامل يمكن تحويله إلى حاصل ضرب دالة أخرى u ومشتقتها du/dx فى مضروب ثابت . (a) نضع u تساوى الدالة التى متغيرها المستقل مرفوعًا لأعلى قوى بدلالة القيمة المطلقة وهما $u = x^5 + 7$. (b) تفاضل u : $du/dx = 5x^4$. (c) نحل جبريًا بالنسبة إلى dx : $dx = du/5x^4$. (d) نعوض بقيمة u بالنسبة إلى x^5+7 و $du/5x^4$ بالنسبة إلى dx فى المكامل الأصلى :

$$\int 20x^4(x^5+7)\,dx = \int 20x^4 \cdot u \cdot \frac{du}{5x^4} = \int 4u\,du = 4\int u\,du$$

حيث 4 مضروب ثابت فى u .

2. نكامل النسبة إلى u .

$$4\int u\,du = 4\left(\frac{1}{2}u^2\right) = 2u^2 + c$$

3. نحول مرة ثانية إلى الحدود للمسألة الأصلية بالتعويض x^5+7 بالنسبة إلى u .

$$\int 20x^4(x^5+7)\,dx = 2u^2 + c = 2(x^5+7)^2 + c$$

4. تحقق من الحل بإجراء التفاضل باستخدام قاعدة دالة القوى العامة .

$$\frac{d}{dx}\left[2(x^5+7)^2 + c\right] = 4(x^5+7)(5x^4) = 20x^4(x^5+7)$$

مثال 9 : حدد تكامل $\int 3x(x+6)^2\,dx$. نضع $u = x+6$ ومن ثم $du/dx = 1$ أو $dx = du$. وبالتعويض u بالنسبة إلى $x+6$ و du بالنسبة إلى dx فى المكامل الأصلى .

EXAMPLE 9. Determine the integral $\int 3x(x+6)^2\,dx$. Let $u = x+6$. Then $du/dx = 1$ and $dx = du/1 = du$. Substitute u for $x+6$ and du for dx in the original integrand.

$$\int 3x(x+6)^2\,dx = \int 3xu^2\,du = 3\int xu^2\,du$$

وطالما أن x مضروب متغير لا يمكن تحليله فإن المكامل الأصلى لا يمكن تحويله إلى مضروب ثابت لـ $u\,du/dx$. ومن ثم لا يمكن إجراء التكامل بالتعويض بل يمكن استخدام التكامل بالتجزئة .

12.9 التكامل بالتجزئة Integration by Parts

إذا كان المكامل هو حاصل ضرب أو خارج قسمة دوال قابلة للتفاضل بالنسبة إلى x وإنه من غير الممكن التعبير عنه كمضروب ثابت لـ $u\,du/dx$ فإن التكامل بالتجزئة يمكن تطبيقه . والتكامل بالتجزئة يقابل عملية تفاضل حاصل الضرب فى حساب التفاضل . فمن قاعدة الضرب فى القسم 9.7.5 .

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x)$$

وبأخذ تكامل المشتقة نحصل على :

$$f(x)\cdot g(x) = \int [f(x)\cdot g'(x)]\,dx + \int [g(x)\cdot f'(x)]\,dx$$

ومن ثم نحل جبريًا التكامل الأول على الطرف الأيمن :

$$\int [f(x)\cdot g'(x)]\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int [g(x)\cdot f'(x)]\,dx \qquad (12.6)$$

انظر الأمثلة 10 و 11 والمسائل من 12.24 إلى 12.27 .

مثال 10 : لقد استخدم التكامل بالتجزئة أدناه لتحديد .

EXAMPLE 10. Integration by parts is used below to determine

$$\int 3x(x+6)^2\,dx$$

1. نفصل المكامل إلى جزئين حسب الصيغة فى (12.6) . وكقاعدة عامة يراعى أن تكون الدالة الأبسط هى $f(x)$ والدالة المعقدة هى $g'(x)$. وبوضع $f(x) = 3x$ و $g'(x) = (x+6)^2$ فإن $f'(x) = 3$ و $g(x) = \int (x+6)^2$ والتى يمكن أن تكامل باستخدام قاعدة القوى البسيطة (القاعدة 3) من القسم 12.2 .

$$g(x) = \frac{1}{3}(x+6)^3 + c_1$$

2. بالتعويض بالقيم بالنسبة إلى $f(x)$ و $f'(x)$ و $g(x)$ فى (12.6) مع ملاحظة أن $g'(x)$ لا تستخدم فى المعادلة

$$\int 3x(x+6)^2\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int [g(x)\cdot f'(x)]\,dx$$

$$= 3x\left[\frac{1}{3}(x+6)^3 + c_1\right] - \int\left[\frac{1}{3}(x+6)^3 + c_1\right](3)\,dx$$

$$= x(x+6)^3 + 3c_1x - \int\left[(x+6)^3 + 3c_1\right]dx$$

3. استخدم القاعدة (3) لحساب التكامل النهائى ثم قم بالتعويض .

$$\int 3x(x+6)^2\,dx = x(x+6)^3 + 3c_1x - \frac{1}{4}(x+6)^4 - 3c_1x + c$$

$$= x(x+6)^3 - \frac{1}{4}(x+6)^4 + c$$

لاحظ أن الحد c_1 لا يظهر فى الحل النهائى . وطالما أن هذا حالة عامة للتكامل بالتجزئة فإن c_1 يفترض أن تساوى صفرًا ولن تدخل فى حل المسألة فى المستقبل .

4. تحقق من الحل بوضع $y(x) = x(x+6)^3 - \frac{1}{4}(x+6)^4 + c$ واستخدم قاعدة الضرب وقاعدة دالة القوى العامة . تفاضل الحل .

$$y'(x) = \left[x \cdot 3(x+6)^2 + (x+6)^3 \cdot 1\right] - (x+6)^3$$
$$y'(x) = 3x(x+6)^2$$

مثال 11 : يتحدد تكامل $\int 5xe^{x-9}\,dx$ كما يلى : نضع $f(x) = 5x$ و $g'(x) = e^{x-9}$ ومن ثم فإن $f'(x) = 5$ وباستخدام القاعدة (5) ، $g(x) = \int e^{x-9}\,dx = e^{x-9}$ وبالتعويض فى (12.6) .

EXAMPLE 11. The integral $\int 5xe^{x-9}\,dx$ is determined as follows: Let $f(x) = 5x$ and $g'(x) = e^{x-9}$; then $f'(x) = 5$ and, by Rule 5, $g(x) = \int e^{x-9}\,dx = e^{x-9}$. Substituting in *(12.6)*,

$$\int 5xe^{x-9}\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int [g(x) \cdot f'(x)]\,dx$$

$$= 5x \cdot e^{x-9} - \int e^{x-9} \cdot 5\,dx = 5xe^{x-9} - 5\int e^{x-9}\,dx$$

وبتطبيق القاعدة (5) مرة ثانية مع تذكر ثابت التكامل .

$$\int 5xe^{x-9}\,dx = 5xe^{x-9} - 5e^{x-9} + c$$

ومن ثم نضع $y(x) = 5xe^{x-9} - 5e^{x-9} + c$ والتحقق من الحل .

$$y'(x) = 5x \cdot e^{x-9} + e^{x-9} \cdot 5 - 5e^{x-9} = 5xe^{x-9}$$

12.10 القيمة الحالية لتدفق نقدى Present Value of A Cash Flow

رأينا فى المعادلة (11.18) أن القيمة الحالية P لمجموع النقود A التى يحصل عليها فى المستقبل عندما يتم حساب الفائدة بشكل مستمر هى $P = Ae^{-rt}$. فالقيمة الحالية لتيار الدخل المستقبلى (النقود التى يحصل عليها كل سنة لعدد n من السنوات) هى تكامل .

$$P_n = \int_0^n Ae^{-rt}\,dt = A\int_0^n e^{-rt}\,dt = A\left[-\frac{1}{r}e^{-rt}\right]_0^n = -\frac{A}{r}\left(e^{-rt}\right)\Big|_0^n$$

$$P_n = -\frac{A}{r}\left(e^{-rn} - e^{-r(0)}\right) = -\frac{A}{r}\left(e^{-rn} - 1\right)$$

$$P_n = \frac{A}{r}\left(1 - e^{-rn}\right) \qquad (12.7)$$

مثال 12 : (a) القيمة الحالية لمبلغ 10,000 دولار تدفع كل سنة لمدة خمس سنوات عندما يكون معدل الفائدة 8% . ويحسب بشكل مستمر محسوبة أدناه باستخدام (12.7) . (b) واحسب القيمة الحالية لمبلغ 3000 دولار عند فائدة 6% لمدة 4 سنوات .

EXAMPLE 12. (*a*) The present value of \$10,000 to be paid each year for 5 years when the interest rate is 8 percent compounded continuously is calculated below, using (*12.7*), as is (*b*) the present value of \$3000 at 6 percent interest for 4 years.

(*a*)

$$P_n = \frac{10{,}000}{0.08}\left(1 - e^{-0.08(5)}\right) = 125{,}000(1 - e^{-0.4})$$

$$P_n = 125{,}000(1 - 0.6703201) = \$41,209.99$$

(*b*)

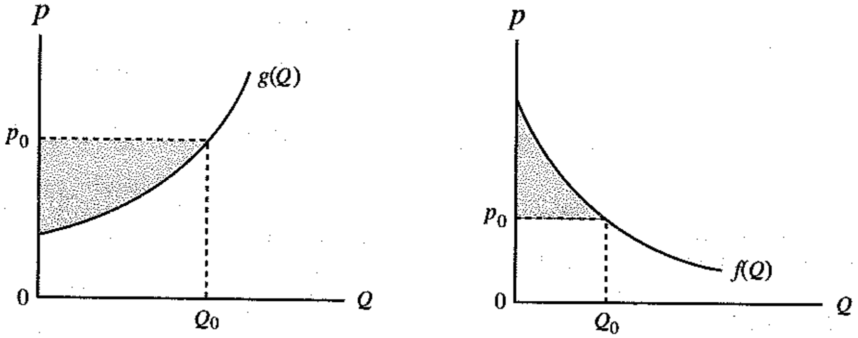
$$P_n = \frac{3000}{0.06}\left(1 - e^{-0.06(4)}\right) = 50{,}000(1 - e^{-0.24})$$

$$P_n = 50{,}000(1 - 0.7866279) = \$10,668.61$$

12.11 فائض المستهلك وفائض المنتج Consumer's and Producer's Surplus

دالة الطلب $P = f(Q)$ كما فى الشكل (12–5)(a) تمثل الأسعار المختلفة التى يرغب المستهلكون فى دفعها مقابل كميات مختلفة من السلعة . فإذا تحقق التوازن فى السوق عند (Q_0, P_0) مع قيام جميع المستهلكين بدفع نفس السعر فإن المستهلكين الذين كانوا ينوون شراء السلعة عند سعر أعلى سيستفيدون . ويطلق على إجمالى المنافع للمستهلكين فائض المستهلك والذى تم تمثيله بالمساحة المظللة . ورياضيًا فإن :

$$\text{فائض المستهلك} = \int_0^{Q_0} f(Q)\,dQ - Q_0P_0 \qquad (12.8)$$



(b) (a)

شكل (12–5)

ودالة العرض $P = g\,(Q)$ كما فى الشكل (12–5)(b) تمثل الأسعار التى عندها سيعرض المنتجون كميات مختلفة من السلعة . فإذا تحقق توازن السوق عند (Q_0, P_0) فإن المنتجين الراغبين فى العرض عند أسعار أقل من P_0

سيستفيدون . ويطلق على إجمالى المكاسب للمنتجين فائض المنتج ومحدد بالمساحة المظللة . ورياضيًا فإن :

$$\text{فائض المنتج} = Q_0P_0 - \int_0^{Q_0} g(Q)\,dQ \qquad (12.9)$$

انظر الأمثلة 13 و 14 والمسائل 12.40 و 12.41 .

مثال 13 : إذا أعطيت دالة الطلب $P = 110 - Q^2$ ومفترضًا أنه عند توزان السوق $Q_0 = 9$ و $P_0 = 29$ فـإن فـائض المستهلك يقدر باستخدام (12.8) كما يلى :

EXAMPLE 13. Given the demand function $P = 110 - Q^2$ and assuming that at market equilibrium $Q_0 = 9$ and $P_0 = 29$, the consumers' surplus is estimated as follows, using *(12.8)*:

$$\text{فائض المستهلك} = \int_0^9 (110 - Q^2)\,dQ - (9)(29)$$
$$= \left[110Q - \tfrac{1}{3}Q^3\right]_0^9 - 261$$
$$= (990 - 243) - (0) - 261 = 486$$

مثال 14 : إذا أعطيت دالة العرض $P = (Q+6)^2$ مفترضًا أنه عند توازن السوق $Q_0 = 3$ و $P_0 = 81$ فـإن فـائض المنتج يقدر باستخدام *(12.9)* كما يلى :

EXAMPLE 14. Given the supply function $P = (Q+6)^2$ and assuming that at market equilibrium $Q_0 = 3$ and $P_0 = 81$, the producers' surplus is estimated as follows, using *(12.9)*:

$$\text{فائض المنتج} = (3)(81) - \int_0^3 (Q+6)^2\,dQ$$
$$= 243 - \left[\tfrac{1}{3}(Q+6)^3\right]_0^3$$
$$= 243 - \tfrac{1}{3}\left[(9)^3 - (6)^3\right] = 72$$

ومن أجل تطبيقات مختلفة ومتنوعة انظر المسائل 12.28 إلى 12.41 .

مسائل محلولة

التكامل غير المحدد Indefinite Integral

12.1. أوجد التكاملات غير المحددة التالية وتحقق من الحلول بمفردك من خلا ل التأكد من أن مشتقة معكـوس المشتقة يساوى المكامل .

12.1. Find the following indefinite integrals. Check the answers on your own by making sure that the derivative of the antiderivative equals the integrand.

(*a*) $\int 8\,dx$ (قاعدة 1)

$$\int 8\,dx = 8x + c$$

(*b*) $\int -16\,dx$ (قاعدة 1 و 8)

$$\int -16\,dx = -\int 16\,dx = -16x + c$$

(*c*) $\int x^5\,dx$ (قاعدة 3)

$$\int x^5\,dx = \frac{1}{5+1}x^{5+1} + c = \frac{1}{6}x^6 + c$$

(*d*) $\int \frac{1}{x^4}\,dx$ (قاعدة 3)

$$\int \frac{1}{x^4}\,dx = \int x^{-4}\,dx = \left(\frac{1}{-4+1}\right)x^{-4+1} + c = -\frac{1}{3}x^{-3} + c$$

(*e*) $\int 21x^6\,dx$ (قاعدة 3 و 6)

$$\int 21x^6\,dx = 21\int x^6\,dx = 21\cdot\frac{1}{7}\cdot x^7 + c = 3x^7 + c$$

(*f*) $\int (35x^4 - 8x^3)\,dx$ (قاعدة 3 و 6 و 7)

$$\int (35x^4 - 8x^3)\,dx = \frac{35}{5}x^5 - \frac{8}{4}x^4 + c = 7x^5 - 2x^4 + c$$

(*g*) $\int -\sqrt{x}\,dx$ (قاعدة 3 و 8)

$$\int -\sqrt{x}\,dx = -\int x^{1/2}\,dx = \frac{-1}{(3/2)}x^{3/2} + c = -\frac{2}{3}x^{3/2} + c$$

(*h*) $\int 6e^{-1.5t}dt$ (قاعدة 5 و 6)

$$\int 6e^{-1.5t}\,dt = 6\left(\frac{1}{-1.5}\right)e^{-1.5t} + c = -4e^{-1.5t} + c$$

(*i*) $\int 20e^{1.25t}\,dt$ (قاعدة 5 و 6)

$$\int 20e^{1.25t}\,dt = 20\left(\frac{1}{1.25}\right)e^{1.25t} + c = 16e^{1.25t} + c$$

(*j*) $\int \frac{2}{x}\,dx$ (قاعدة 4 و 6)

$$\int \frac{2}{x}\,dx = \int 2x^{-1}\,dx = 2\ln|x| + c = \ln x^2 + c$$

12.2. Determine the following indefinite integrals.

12.2. حدد التكاملات غير المحددة التالية :

(*a*) $\int 15e^{t/4}\,dt$

$$\int 15e^{t/4}\,dt = \int 15e^{(1/4)t}\,dt = 15\left[\frac{1}{(1/4)}\right]e^{(1/4)t} + c = 60e^{t/4} + c$$

(*b*) $\int x^{2/3}\,dx$

$$\int x^{2/3}\,dx = \frac{1}{(5/3)}x^{5/3} + c = \frac{3}{5}x^{5/3} + c$$

(c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-(1/2)}\,dx = \frac{1}{(1/2)}x^{1/2} + c = 2x^{1/2} + c = 2\sqrt{x} + c$$

(d) $\int \frac{9}{t^4}\,dt$

$$\int \frac{9}{t^4}\,dt = \int 9t^{-4}\,dt = 9\left(\frac{1}{-3}\right)t^{-3} + c = -3t^{-3} + c$$

(e) $\int \sqrt{x+7}\,dx$

$$\int \sqrt{x+7}\,dx = \int (x+7)^{1/2}\,dx = \frac{1}{(3/2)}(x+7)^{3/2} + c$$
$$= \frac{2}{3}(x+7)^{3/2} + c$$

(f) $\int \frac{1}{x+8}\,dx$

$$\int \frac{1}{x+8}\,dx = \int (x+8)^{-1}\,dx = \ln|x+8| + c$$

(g) $\int 4(x-18)^{-2}\,dx$

$$\int 4(x-18)^{-2}\,dx = 4\left(\frac{1}{-1}\right)(x-18)^{-1} + c = \frac{-4}{x-18} + c$$

(h) $\int (e^3 + 5t^4 + 3e^{-4t})\,dt$

حيث إن e^3 ثابت

$$\int (e^3 + 5t^4 + 3e^{-4t})\,dt = e^3 t + t^5 - \frac{3}{4}e^{-4t} + c$$

12.3. أوجد معكوس المشتقة لكل من التالى إذا أعطيت الشرط المبدئى $F(0) = k$ (k ثابت) أو الشرط الحدودى $F(a) = k$ (حيث $a \neq 0$) .

12.3. **Find the antiderivative for each of the following, given an *initial condition* $F(0) = k$ (a constant), or a *boundary condition* $F(a) = k$ $(a \neq 0)$.**

(a) $\int (25x^{1/4} + 16x^{1/3})\,dx$

إذا أعطيت الشرط المبدئى $F(0) = 19$.

$$\int (25x^{1/4} + 16x^{1/3})\,dx = 25\left(\frac{4}{5}\right)x^{5/4} + 16\left(\frac{3}{4}\right)x^{4/3} + c$$
$$= 20x^{5/4} + 12x^{4/3} + c$$

وعند $F(0) = 19$

$$19 = 20(0)^{5/4} + 12(0)^{4/3} + c$$

ومن ثم

$$F(x) = 20x^{5/4} + 12x^{4/3} + 19$$

(b) $\int (16e^{2t} + 15e^{-3t})\,dt$

إذا أعطيت الشرط المبدئى $F(0) = 9$.

$$\int (16e^{2t} + 15e^{-3t})\,dt = 8e^{2t} - 5e^{-3t} + c$$

وعند $F(0) = 9$ $\qquad 9 = 8e^{2(0)} - 5e^{-3(0)} + c$

وحيث إن $e^0 = 1$ $\qquad 9 = 8 - 5 + c \qquad c = 6$

ومن ثم $\qquad F(t) = 8e^{2t} - 5e^{-3t} + 6$

(c) $\displaystyle\int (4x^{-1} + 5x^{-2})\,dx$

إذا أعطيت الشرط الحدودى $F(1) = 3$.

$$\int (4x^{-1} + 5x^{-2})\,dx = 4\ln|x| - 5x^{-1} + c = 4\ln x - \frac{5}{x} + c$$

وعند $F(1) = 3$ $\qquad 3 = 4\ln 1 - \dfrac{5}{1} + c$

وحيث إن $\ln 1 = 0$ $\qquad 3 = -5 + c \qquad c = 8$

ومن ثم $\qquad F(x) = 4\ln x - \dfrac{5}{x} + 8$

Definite Integral التكامل المحدد

12.4. Evaluate the following definite integrals.

12.4. قدر التكاملات المحددة التالية :

(a) $\displaystyle\int_2^5 3x^2\,dx$

$$\int_2^5 3x^2\,dx = x^3\Big|_2^5 = (5)^3 - (2)^3 = 125 - 8 = 117$$

(b) $\displaystyle\int_1^3 -36x^{-3}\,dx$

$$\int_1^3 -36x^{-3}\,dx = 18x^{-2}\Big|_1^3 = \frac{18}{(3)^2} - \frac{18}{(1)^2} = 2 - 18 = -16$$

(c) $\displaystyle\int_9^{49} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$$\int_9^{49} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_9^{49} x^{-1/2}\,dx = 2x^{1/2}\Big|_9^{49} = 2\sqrt{49} - 2\sqrt{9} = 8$$

(d) $\displaystyle\int_1^8 3x^{-1}\,dx$

$$\int_1^8 3x^{-1}\,dx = 3\ln x\Big|_1^8 = 3\ln 8 - 3\ln 1 = 3\ln 8 - 3(0) = 3\ln 8$$

(e) $\displaystyle\int_4^9 12\sqrt{x}\,dx$

$$\int_4^9 12\sqrt{x}\,dx = \int_4^9 12x^{1/2}\,dx = 8x^{3/2}\Big|_4^9$$

$$= 8(9)^{3/2} - 8(4)^{3/2} = 8(27) - 8(8) = 152$$

12.5. Evaluate the definite integrals given below.

12.5. قدر التكاملات المحددة المبينة أدناه :

(a) $\int_1^2 (9x^2+4x)\,dx$

$$\begin{aligned}\int_1^2 (9x^2+4x)\,dx &= \left[3x^3+2x^2\right]_1^2\\ &= \left(3(2)^3+2(2)^2\right)-\left(3(1)^3+2(1)^2\right)\\ &= 32-5=27\end{aligned}$$

(b) $\int_1^8 (8x^{1/3}+4x^{-1/3})\,dx$

$$\begin{aligned}\int_1^8 (8x^{1/3}+4x^{-1/3})\,dx &= \left[6x^{4/3}+6x^{2/3}\right]_1^8\\ &= 6\left[(8)^{4/3}+(8)^{2/3}\right]-6\left[(1)^{4/3}+(1)^{2/3}\right]\\ &= 120-12=108\end{aligned}$$

(c) $\int_0^1 e^{t/3}\,dt$

$$\int_0^1 e^{t/3}\,dt = 3e^{t/3}\Big|_0^1 = 3e^{1/3}-3e^0 = 3(e^{1/3}-1)$$

(d) $\int_0^1 20e^{-5t}\,dt$

$$\int_0^1 20e^{-5t}\,dt = -4e^{-5t}\Big|_0^1 = -4e^{-5}-(-4e^0) = 4(1-e^{-5})$$

(e) $\int_0^2 (5+x)^2\,dx$

$$\int_0^2 (5+x)^2\,dx = \tfrac{1}{3}(5+x)^3\Big|_0^2 = \tfrac{1}{3}\left[(7)^3-(5)^3\right] = \tfrac{1}{3}(218) \approx 72.67$$

Properties of Definite Integral خصائص التكامل المحدد

12.6. Show $\int_{-3}^3 (6x^2+18x)\,dx = \int_{-3}^0 (6x^2+18x)\,dx + \int_0^3 (6x^2+18x)\,dx.$

12.6. أثبت أن :

$$\int_{-3}^3 (6x^2+18x)\,dx = (2x^3+9x^2)\Big|_{-3}^3 = 135-27=108$$

$$\int_{-3}^0 (6x^2+18x)\,dx = (2x^3+9x^2)\Big|_{-3}^0 = 0-27=-27$$

$$\int_0^3 (6x^2+18x)\,dx = (2x^3+9x^2)\Big|_0^3 = 135-0=135$$

وبالتحقق من هذا الحل

$$-27+135=108$$

12.7. أثبت أن :

12.7.
$$\int_0^{25} (5x + x^{-1/2})\,dx = \int_0^{9} (5x + x^{-1/2})\,dx + \int_9^{16} (5x + x^{-1/2})\,dx + \int_{16}^{25} (5x + x^{-1/2})\,dx.$$

$$\int_0^{25} (5x + x^{-1/2})\,dx = (2.5x^2 + 2x^{1/2})\Big|_0^{25} = 1562.5 + 10 = 1572.5$$

$$\int_0^{9} (5x + x^{-1/2})\,dx = (2.5x^2 + 2x^{1/2})\Big|_0^{9} = 202.5 + 6 = 208.5$$

$$\int_9^{16} (5x + x^{-1/2})\,dx = (2.5x^2 + 2x^{1/2})\Big|_9^{16} = 648 - 208.5 = 439.5$$

$$\int_{16}^{25} (5x + x^{-1/2})\,dx = (2.5x^2 + 2x^{1/2})\Big|_{16}^{25} = 1572.5 - 648 = 924.5$$

وبالتحقق من هذا الحل

$$208.5 + 439.5 + 924.5 = 1572.5$$

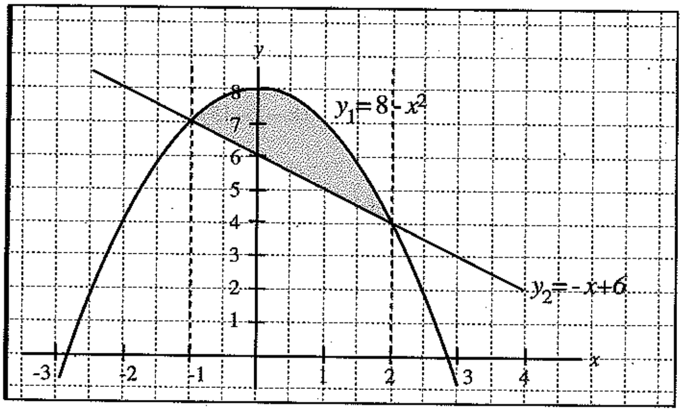
Area Between Curves المساحة بين المنحنيات

12.8. (*a*) ارسم الشكل البيانى للدوال التالية . (*b*) قدر المساحة بين المنحنيات فى الفترة المحددة :

12.8. (*a*) Draw graphs for the following functions, and (*b*) evaluate the area between the curves over the stated interval:

$y_1 = 8 - x^2$ و $y_2 = -x + 6$ من $x = -1$ إلى $x = 2$

(*a*) انظر الشكل (12–6) .



شكل (12–6)

(*b*) من الشكل (12–7) فالمساحة المرغوبة هى المساحة تحت المنحنى المحددة من خلال $y_1 = 8 - x^2$ من $x = -1$ إلى $x = 2$. ناقصًا المساحة تحت المنحنى المحددة من خلال $y_2 = -x + 6$ من $x = -1$ إلى $x = 2$. باستخدام خصائص التكامل المحدد .

$$A = \int_{-1}^{2} (8 - x^2)\,dx - \int_{-1}^{2} (-x + 6)\,dx$$

من (*12.4*)
$$A = \int_{-1}^{2} \left[(8 - x^2) - (-x + 6)\right] dx$$

$$A = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\,dx = \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{2}$$

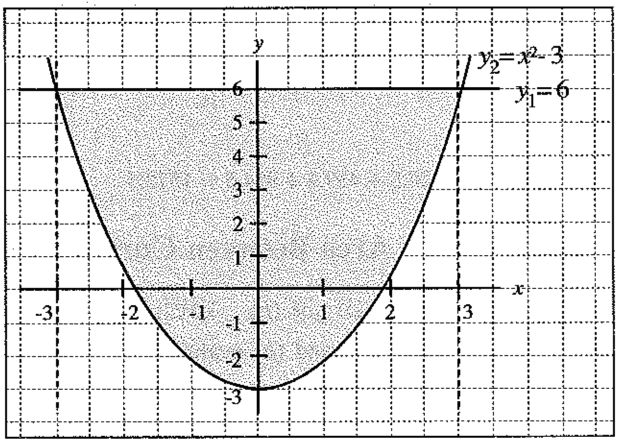
$$A = 3\tfrac{1}{3} - \left(-1\tfrac{1}{6}\right) = 4\tfrac{1}{2}$$

12.9. Redo Problem 12.8, given

12.9. بالرجوع إلى المطلوب فى المسألة (12.8) إذا أعطيت :

$y_1 = 6$ و $y_2 = x^2 - 3$ من $x = -3$ إلى $x = 3$

(*a*) انظر الشكل (12–7) .



شكل (12–7)

(*b*)

$$A = \int_{-3}^{3} 6\,dx - \int_{-3}^{3} (x^2 - 3)\,dx = \int_{-3}^{3} (-x^2 + 9)\,dx$$

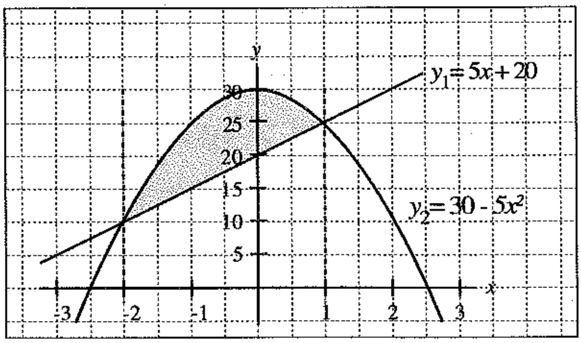
$$A = \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + 9x\right]_{-3}^{3} = 18 - (-18) = 36$$

12.10. Redo Problem 12.8, given

12.10. بالرجوع إلى المطلوب فى المسألة (12.8) إذا أعطيت :

$y_1 = 5x + 20$ و $y_2 = 30 - 5x^2$ من $x = -2$ إلى $x = 1$

(*a*) انظر الشكل (12–8) .



شكل (12–8)

(*b*)

$$A = \int_{-2}^{1} (30 - 5x^2)\,dx - \int_{-2}^{1} (5x + 20)\,dx$$

$$A = \int_{-2}^{1} (-5x^2 - 5x + 10)\,dx$$

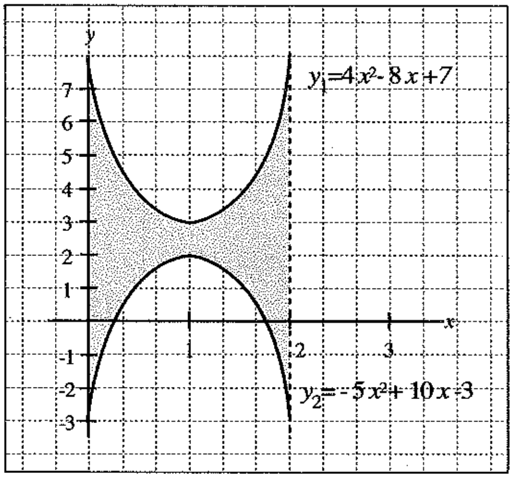
$$A = \left(-\tfrac{5}{3}x^3 - \tfrac{5}{2}x^2 + 10x\right)\Big|_{-2}^{1} = \tfrac{35}{6} - \left(-\tfrac{50}{3}\right) = \tfrac{135}{6} = 22.5$$

12.11. بالرجوع إلى المطلوب فى المسألة (12.8) إذا أعطيت :

12.11. Redo Problem 12.8, given

$y_1 = 4x^2 - 8x + 7$ و $y_2 = -5x^2 + 10x - 3$ من $x = 0$ إلى $x = 2$

(*a*) انظر الشكل (12–9) .



شكل (12–9)

(*b*)

$$A = \int_{0}^{2} (4x^2 - 8x + 7)\,dx - \int_{0}^{2} (-5x^2 + 10x - 3)\,dx$$

$$A = \int_{0}^{2} (9x^2 - 18x + 10)\,dx$$

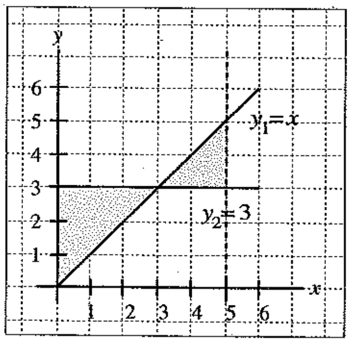
$$A = (3x^3 - 9x^2 + 10x)\Big|_{0}^{2} = 8 - 0 = 8$$

12.12. (*a*) ارسم الشكل البيانى للدوال التالية و (*b*) قدر المساحة بين المنحنيات فى الفترة المحددة .

12.12. (*a*) Draw graphs for the following functions and (*b*) evaluate the area between the curves over the stated interval:

$y_1 = x \qquad y_2 = 3$ من $x = 0$ إلى $x = 5$

(*a*) انظر الشكل (12–10) .



شكل (12–10)

(*b*)

$$A = \int_0^3 (3 - x)\,dx + \int_3^5 (x - 3)\,dx$$

$$A = \left(3x - \tfrac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^3 + \left(\tfrac{1}{2}x^2 - 3x\right)\Big|_3^5$$

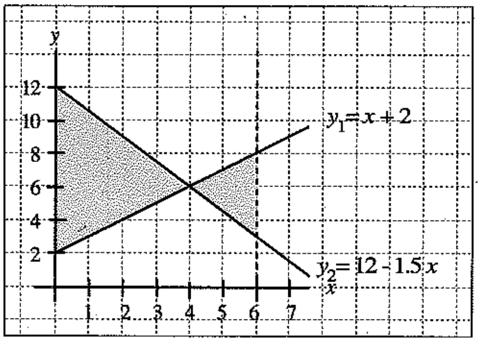
$$A = 4\tfrac{1}{2} + 2 = 6\tfrac{1}{2}$$

12.13. Redo Problem 12.12, given

12.13. بالرجوع إلى المطلوب فى المسألة (12.12) إذا أعطيت :

$y_1 = x + 2 \qquad y_2 = 12 - 1.5x$ من $x = 0$ إلى $x = 6$

(*a*) انظر الشكل (12–11) .



شكل (12–11)

(*b*)

$$A = \int_0^4 [(12 - 1.5x) - (x + 2)]\,dx + \int_4^6 [(x + 2) - (12 - 1.5x)]\,dx$$

$$A = \int_0^4 (-2.5x + 10)\,dx + \int_4^6 (2.5x - 10)\,dx$$

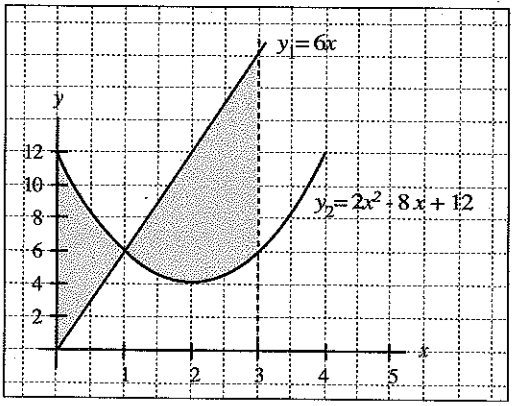
$$A = (-1.25x^2 + 10x)\Big|_0^4 + (1.25x^2 - 10x)\Big|_4^6 = 20 + 5 = 25$$

12.14. Redo Problem 12.12, given

12.14. بالرجوع إلى المطلوب فى المسألة (12.12) إذا أعطيت :

$y_1 = 6x \qquad y_2 = 2x^2 - 8x + 12$ من $x = 0$ إلى $x = 3$

(*a*) انظر الشكل (12–12) .



شكل (12–12)

(*b*)

$$A = \int_0^1 \left[(2x^2 - 8x + 12) - (6x)\right] dx + \int_1^3 \left[(6x) - (2x^2 - 8x + 12)\right] dx$$

$$A = \int_0^1 (2x^2 - 14x + 12)\, dx + \int_1^3 (-2x^2 + 14x - 12)\, dx$$

$$A = \left(\tfrac{2}{3}x^3 - 7x^2 + 12x\right)\Big|_0^1 + \left(-\tfrac{2}{3}x^3 + 7x^2 - 12x\right)\Big|_1^3 = 5\tfrac{2}{3} + 14\tfrac{2}{3} = 20\tfrac{1}{3}$$

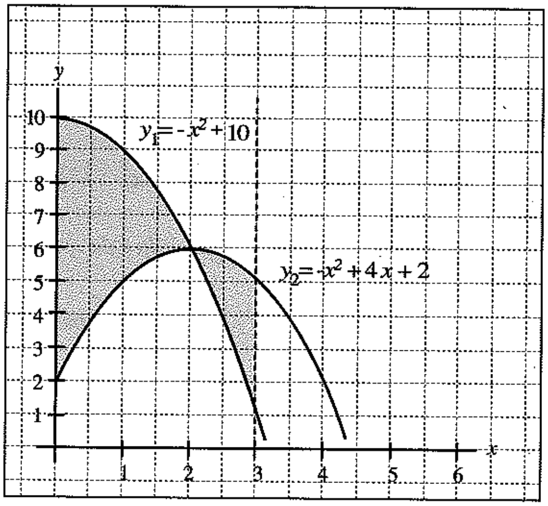
12.15. Redo Problem 12.12, given

12.15. بالرجوع إلى المطلوب فى المسألة (12.12) إذا أعطيت :

$$y_1 = -x^2 + 10 \qquad y_2 = -x^2 + 4x + 2$$

من $x = 0$ إلى $x = 3$

(*a*) انظر الشكل (13–12) .



شكل (12–13)

(*b*)

$$A = \int_0^2 \left[(-x^2 + 10) - (-x^2 + 4x + 2)\right] dx + \int_2^3 \left[(-x^2 + 4x + 2) - (-x^2 + 10)\right] dx$$

$$A = \int_0^2 (-4x + 8)\, dx + \int_2^3 (4x - 8)\, dx$$

$$A = (-2x^2 + 8x)\Big|_0^2 + (2x^2 - 8x)\Big|_2^3$$

$$A = 8 + 2 = 10$$

Integration by Substitution التكامل بالتعويض

12.16. استخدم التكامل بالتعويض لتحديد التكامل غير المحدد للدالة التالية التى تنطوى على حاصل ضرب ، وتحقق من الحل بمفردك .

12.16. Use integration by substitution to determine the indefinite integral for the following function involving a product. Check the answer on your own.

$$\int 60x^2(x^3 + 5)^4\, dx$$

نختار u للدالة التى متغيرها المستقل مرفوع لأعلى قوى بدلالة القيمة المطلقة . وهنا $u = x^3 + 5$ ومن ثم $du / dx = 3x^2$ ونحل جبريًا بالنسبة إلى dx حيث $dx = du / 3x^2$. وبالتعويض بهذه القيم فى المكامل الأصلى لاختزاله إلى دالة إلى $u \, du / dx$.

$$\int 60x^2(x^3+5)^4\,dx = \int 60x^2 \cdot u^4 \cdot \frac{du}{3x^2} = \int 20u^4\,du$$

وبعدئذ نكامل بالنسبة إلى u باستخدام دالة القوى البسيطة

$$\int 20u^4\,du = 20 \cdot \frac{1}{5}u^5 + c = 4u^5 + c$$

وبالتعويض بالمقدار $x^3 + 5$ بالنسبة u ،

$$\int 60x^2(x^3+5)^4\,dx = 4u^5 + c = 4(x^3+5)^5 + c$$

12.17. بالرجوع إلى المطلوب فى المسألة (12.16) إذا أعطيت :

12.17. Redo Problem 12.16, given

$$\int 84x(7x^2-4)^3\,dx$$

بوضع $u = 7x^2 - 4$ إذًا $du / dx = 14x$ ومن ثم $dx = du / 14x$. وبالتعويض بالمكامل الأصلى .

$$\int 84x(7x^2-4)^3\,dx = \int 84x \cdot u^3 \cdot \frac{du}{14x} = \int 6u^3\,du$$

وبإجراء التكامل

$$\int 6u^3\,du = 6 \cdot \frac{1}{4}u^4 + c = 1.5u^4 + c$$

وبالتعويض

$$\int 84x(7x^2-4)^3 dx = 1.5u^4 + c = 1.5(7x^2-4)^4 + c$$

12.18. استخدم التكامل بالتعويض لتحديد التكامل غير المحدد للدالة التالية التى تنطوى على خارج القسمة .

12.18. **Use integration by substitution to determine the indefinite integral for the following function involving a quotient.**

$$\int \frac{72x}{(9x^2+2)^5}\,dx$$

بوضع $u = 9x^2 + 2$ إذًا $du / dx = 18x$ ومن ثم $dx = du / 18x$. وبالتعويض

$$\int \frac{72x}{(9x^2+2)^5}\,dx = \int 72x \cdot \frac{1}{u^5} \cdot \frac{du}{18x} = \int \frac{4}{u^5}\,du = \int 4u^{-5}\,du$$

وبإجراء التكامل

$$\int 4u^{-5}\,du = 4\left(-\frac{1}{4}\right)u^{-4} + c = -u^{-4} + c$$

وبالتعويض

$$\int \frac{72x}{(9x^2+2)^5}\,dx = -u^{-4} + c = -(9x^2+2)^{-4} + c$$

$$= \frac{-1}{(9x^2+2)^4} + c$$

12.19. بالرجوع إلى المطلوب فى المسألة (12.16) إذا أعطيت :

12.19. Redo Problem 12.18, given

$$\int \frac{10x^2}{5x^3-8}\,dx$$

بوضع $u = 5x^3 - 8$ إذاً $du/dx = 15x^2$ ومن ثم $dx = du/15x^2$. وبالتعويض ،

$$\int \frac{10x^2}{5x^3-8}\,dx = \int 10x^2 \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{15x^2} = \int \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{u}du = \frac{2}{3}\int u^{-1}\,du$$

وبإجراء التكامل

$$\frac{2}{3}\int u^{-1}\,du = \frac{2}{3}\ln|u| + c$$

وبالتعويض

$$\int \frac{10x^2}{5x^3-8}\,dx = \frac{2}{3}\ln|u| + c = \frac{2}{3}\ln\left|5x^3-8\right| + c$$

12.20. استخدم التكامل بالتعويض لتحديد التكامل غير المحدد للدالة التالية التى تنطوى على جذر .

12.20. Use integration by substitution to determine the indefinite integral for the following function involving a radical.

$$\int 72x^2\sqrt{8x^3+5}\,dx$$

بوضع $u = 8x^3 + 5$ إذاً $du/dx = 24x^2$ ومن ثم $dx = du/24x^2$. وبالتعويض فى المكامل الأصلى .

$$\int 72x^2\sqrt{8x^3+5}\,dx = \int 72x^2 \cdot \sqrt{u} \cdot \frac{du}{24x^2} = 3\int u^{1/2}\,du$$

وبإجراء التكامل

$$3\int u^{1/2}\,du = 3 \cdot \frac{2}{3}u^{3/2} + c = 2u^{3/2} + c$$

وبالتعويض

$$\int 72x^2\sqrt{8x^3+5}\,dx = 2u^{3/2} + c = 2(8x^3+5)^{3/2} + c$$

$$= 2\left(\sqrt{8x^3+5}\right)^3 + c$$

12.21. بالرجوع إلى المطلوب فى المسألة (12.20) إذا أعطيت :

12.21. Redo Problem 12.20, given

$$\int \frac{15x^4}{\sqrt{6x^5-34}}\,dx$$

بوضع $u = 6x^5 - 34$ إذاً $du/dx = 30x^4$ ومن ثم $dx = du/30x^4$. وبالتعويض ،

$$\int \frac{15x^4}{\sqrt{6x^5-34}}\,dx = \int 15x^4 \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{30x^4} = \frac{1}{2}\int u^{-1/2}du$$

وبإجراء التكامل

$$\frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du = \frac{1}{2} \cdot 2u^{1/2} + c = u^{1/2} + c$$

وبالتعويض

$$\int \frac{15x^4}{\sqrt{6x^5-34}}\,dx = u^{1/2} + c = (6x^5-34)^{1/2} + c$$

$$= \sqrt{6x^5-34} + c$$

12.22. استخدم التكامل بالتعويض لإيجاد التكامل غير المحدد للدالة الأسية الطبيعية التالية :

12.22. Use integration by substitution to find the indefinite integral for the following natural exponential function.

$$\int 6xe^{3x^2}\,dx$$

بوضع $u = 3x^2$ إذاً $du / dx = 6x$ ومن ثم $dx = du / 6x$. وبالتعويض .

$$\int 6xe^{3x^2}\,dx = \int 6x \cdot e^u \cdot \frac{du}{6x} = \int e^u\,du$$

وبإجراء التكامل

$$\int e^u\,du = e^u + c$$

وبالتعويض $u = 3x^2$

$$\int 6xe^{3x^2}\,dx = e^u + c = e^{3x^2} + c$$

12.23. بالرجوع إلى المطلوب فى المسألة (12.22) إذا أعطيت :

12.23. Redo Problem 12.22, given

$$\int 36x^5e^{2x^6}\,dx$$

بوضع $u = 2x^6$ إذاً $du / dx = 12x^5$ ومن ثم $dx = du / 12x^5$. وبالتعويض ،

$$\int 36x^5e^{2x^6}\,dx = \int 36x^5 \cdot e^u \cdot \frac{du}{12x^5} = 3\int e^u\,du$$

وبإجراء التكامل

$$3\int e^u\,du = 3e^u + c$$

وبالتعويض

$$\int 36x^5e^{2x^6}\,dx = 3e^u + c = 3e^{2x^6} + c$$

Integration by Parts التكامل بالتجزئة

12.24. استخدم التكامل بالتجزئة لإيجاد التكامل غير المحدد لكل من الدوال التالية التى تنطوى على حاصل ضرب ، وتحقق من الحلول بمفردك علمًا بأننا فى حاجة لقاعدة حاصل الضرب للتحقق من الحل الذى نحصل عليه من خلال التكامل بالتجزئة .

12.24. Use integration by parts to find the indefinite integral for each of the following functions involving a product. Check your answers on your own, recalling that the product rule is needed to check an answer obtained through integration by parts.

(*a*)

$$\int x(x-8)^3\,dx$$

نختار الدالة الأبسط لـ $f(x)$ والدالة الأكثر تعقيداً لـ $g'(x)$. وبوضع $f(x) = x$ و $g'(x) = (x-8)^3$ فـإن $f'(x) = 1$.

$$g(x) = \int (x-8)^3\,dx = \tfrac{1}{4}(x-8)^4 + c_1$$

حيث c_1 ستحذف ويمكن تجاهلها كما شرحنا فى المثال 10 . الآن نعوض بالقيم المناسبة فى (12.6) .

$$\int x(x-8)^3\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int \left[g(x)\cdot f'(x)\right] dx$$

$$= x\cdot\frac{1}{4}(x-8)^4 - \int \left[\frac{1}{4}(x-8)^4\cdot(1)\right] dx$$

$$= \frac{x}{4}(x-8)^4 - \int \frac{1}{4}(x-8)^4\,dx$$

وبالتعويض بـ $\int \frac{1}{4}(x-8)^4\,dx = \frac{1}{20}(x-8)^5 + c$ إذاً

$$\int x(x-8)^3\,dx = \frac{x}{4}(x-8)^4 - \frac{1}{20}(x-8)^5 + c$$

(*b*)

$$\int 56x(x+11)^6\,dx$$

ويوضع $f(x)=56x$ و $g'(x)=(x+11)^6$ فإن $f'(x)=56$ وأن $g(x)=\left(\frac{1}{7}\right)(x+11)^7$ وبالتعويض في (12.6) .

$$\int 56x(x+11)^6\,dx = 56x\cdot\frac{1}{7}(x+11)^7 - \int \left[\frac{1}{7}(x+11)^7\cdot 56\right] dx$$

$$= 8x(x+11)^7 - \int 8(x+11)^7\,dx$$

وبإجراء التكامل مرة ثانية .

$$\int 56x(x+11)^6\,dx = 8x(x+11)^7 - (x+11)^8 + c$$

12.25. استخدم التكامل بالتجزئة لإيجاد التكامل غير المحدد لكل من الدوال التالية التى تنطوى على خارج قسمة .

12.25. Use integration by parts to find the indefinite integral for each of the following functions involving a quotient.

(*a*)

$$\int \frac{24x}{(x+7)^4}\,dx$$

ويوضع $f(x)=24x$ و $g'(x)=(x+4)^{-4}$ إذاً $f'(x)=24$ وأن $g(x)=\int (x+7)^{-4}\,dx = -\frac{1}{3}(x+7)^{-3}$ وبالتعويض

$$\int \frac{24x}{(x+7)^4}\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int \left[g(x)\cdot f'(x)\right] dx$$

$$= 24x\left[-\frac{1}{3}(x+7)^{-3}\right] - \int \left[-\frac{1}{3}(x+7)^{-3}\cdot 24\right] dx$$

$$= -8x(x+7)^{-3} + 8\int (x+7)^{-3}\,dx$$

وبالتعويض بـ $8\int (x+7)^{-3}\,dx = -4(x+7)^{-2} + c$ إذاً

$$\int \frac{24x}{(x+7)^4}\,dx = -8x(x+7)^{-3} - 4(x+7)^{-2} + c$$

$$= \frac{-8x}{(x+7)^3} - \frac{4}{(x+7)^2} + c$$

(*b*)

$$\int -\frac{22x}{(x+4)^3}\,dx$$

بوضع $f(x)=-22x$ وأن $g'(x)=(x+4)^{-3}$ إذاً $f'(x)=-22$ وأن $g(x)=-\frac{1}{2}(x+4)^{-2}$ وبالتعويض فى (12.6) .

$$\int \frac{-22x}{(x+4)^3}\,dx = -22x\left[-\frac{1}{2}(x+4)^{-2}\right] - \int\left[-\frac{1}{2}(x+4)^{-2}\cdot(-22)\right]dx$$

$$= 11x(x+4)^{-2} - \int 11(x+4)^{-2}\,dx$$

وبإجراء التكامل مرة ثانية .

$$\int \frac{-22x}{(x+4)^3}\,dx = 11x(x+4)^{-2} + 11(x+4)^{-1} + c$$

12.26. استخدم التكامل بالتجزئة لإيجاد التكامل غير المحدد لكل من الدوال التالية التى تنطوى على جذر .

12.26. Use integration by parts to find the indefinite integral for each of the following functions involving a radical.

(*a*)

$$\int 30x\sqrt{9+x}\,dx$$

بوضع $f(x)=30x$ وأن $g'(x)=(9+x)^{1/2}$ إذاً $f'(x)=30$ وأن $g(x)=\int(9+x)^{1/2}\,dx=\frac{2}{3}(9+x)^{3/2}$

وبالتعويض .

$$\int 30x\sqrt{9+x}\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int\left[g(x)\cdot f'(x)\right]dx$$

$$= 30x\cdot\frac{2}{3}(9+x)^{3/2} - \int\left[\frac{2}{3}(9+x)^{3/2}\cdot 30\right]dx$$

$$= 20x(9+x)^{3/2} - 20\int(9+x)^{3/2}\,dx$$

وبالتعويض $-20\int(9+x)^{3/2}\,dx = -8(9+x)^{5/2}+c$ إذاً

$$\int 30x\sqrt{9+x}\,dx = 20x(9+x)^{3/2} - 8(9+x)^{5/2} + c$$

(*b*)

$$\int \frac{9x}{\sqrt{x+23}}\,dx$$

بوضع $f(x)=9x$ وأن $g'(x)=(x+23)^{-1/2}$ إذاً $f'(x)=9$ وأن $g(x)=2(x+23)^{1/2}$ وبالتعويض فى (*12.6*) .

$$\int \frac{9x}{\sqrt{x+23}}\,dx = 9x\cdot 2(x+23)^{1/2} - \int\left[2(x+23)^{1/2}\cdot 9\right]dx$$

$$= 18x(x+23)^{1/2} - \int 18(x+23)^{1/2}\,dx$$

وبإجراء التكامل مرة ثانية .

$$\int \frac{9x}{\sqrt{x+23}}\,dx = 18x(x+23)^{1/2} - 12(x+23)^{3/2} + c$$

12.27. استخدم التكامل بالتجزئة لإيجاد التكامل غير المحدد لكل من الدوال الأسية الطبيعية التالية :

12.27. Use integration by parts to find the indefinite integral for each of the following natural exponential functions.

(*a*)
$$\int (x+5)e^x\,dx$$

بوضع $f(x)=x+5$ و $g'(x)=e^x$ فإن $f'(x)=1$ وأن $g(x)=\int e^x\,dx=e^x$ وبالتعويض :

$$\int (x+5)e^x\,dx = (x+5)e^x - \int e^x\,dx$$

وبالتعويض بـ $\int e^x\,dx = e^x + c$ إذاً

$$\int (x+5)e^x\,dx = (x+5)e^x - e^x + c$$

(*b*)
$$\int 24x^2 e^{6x}\,dx$$

بوضع $f(x)=24x^2$ و $g'(x)=e^{6x}$ فإن $f'(x)=48x$ وأن $g(x)=\frac{1}{6}e^{6x}$ وبالتعويض فى (*12.6*) :

$$\int 24x^2 e^{6x}\,dx = 24x^2\cdot\tfrac{1}{6}e^{6x} - \int\left[\tfrac{1}{6}e^{6x}\cdot 48x\right]dx$$
$$= 4x^2 e^{6x} - \int 8xe^{6x}\,dx$$

وباستخدام التكامل بالتجزئة مرة ثانية

$$\int 24x^2 e^{6x}\,dx = 4x^2 e^{6x} - \left[8x\cdot\tfrac{1}{6}e^{6x} - \int\left(\tfrac{1}{6}e^{6x}\cdot 8\right)dx\right]$$
$$= 4x^2 e^{6x} - \tfrac{4}{3}xe^{6x} + \int \tfrac{4}{3}e^{6x}\,dx$$
$$= 4x^2 e^{6x} - \tfrac{4}{3}xe^{6x} + \tfrac{2}{9}e^{6x} + c$$

تطبيقات عملية Practical Application

12.28. دالة التكلفة الحدية لإحدى المنشآت هى $\mathrm{MC} = x^2 - 6x + 125$. حيث x تمثل عدد الوحدات المنتجة والتكاليف الثابتة 280 دولاراً . أوجد التكاليف الكلية TC للوحدات المنتجة x .

12.28. A firm's marginal cost function is $\mathrm{MC} = x^2 - 6x + 125$, where x is the number of units produced. Fixed costs are $280. Find the total cost TC of producing x units.

$$\mathrm{TC} = \int \mathrm{MC}\,dx = \int (x^2 - 6x + 125)\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 125x + c$$

وبالتعويض بقيمة التكلفة الثابتة : $\mathrm{TC}(0) = 280$.

$$280 = \tfrac{1}{3}(0)^3 - 3(0)^2 + 125(0) + c \qquad c = 280$$

ومن ثم
$$\mathrm{TC} = \tfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 125x + 280$$

لاحظ أنه عند إجراء التكامل لدالة التكلفة الحدية للحصول على دالة التكاليف الكلية فإن التكلفة الثابتة FC ستكون دائمًا تساوى ثابت التكامل .

12.29. أوجد دالة التكاليف الكلية TC إذا علمت أن دالة التكلفة الحدية هى $\mathrm{MC} = x^2 - 5x + 89$ والتكاليف الثابتة 225 دولاراً .

12.29. Find the total cost function TC given the marginal cost function $\mathrm{MC} = x^2 - 5x + 89$ and fixed costs of $225.

$$\mathrm{TC} = \int (x^2 - 5x + 89)\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 - 2.5x^2 + 89x + c$$

وبالتعويض $C = \mathrm{FC} = 225$.

$$\mathrm{TC} = \tfrac{1}{3}x^3 - 2.5x^2 + 89x + 225$$

12.30. دالة التكلفة الحدية لأحد المنتجين هى $\mathrm{MC} = \frac{1}{8}x^2 - x + 320$. ما هى التكلفة الكلية TC لإنتاج وحدتين إضافيتين إذا كانت عدد الوحدات المنتجة حاليًا 6 وحدات ؟

12.30. A producer's marginal cost is $\mathrm{MC} = \frac{1}{8}x^2 - x + 320$. What is the total cost TC of producing 2 extra units if 6 units are currently being produced?

$$\mathrm{TC}(8) - \mathrm{TC}(6) = \int_6^8 \mathrm{MC}\,dx = \int_6^8 \left(\tfrac{1}{8}x^2 - x + 320\right)dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{24}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 320x\right]_6^8 = 2549\tfrac{1}{3} - 1911 = 638\tfrac{1}{3}$$

12.31. دالة الإيراد الحدى لإحدى المنشآت هى : $\mathrm{MR} = 425 - 0.5x - 0.15x^2$. أوجد الإيراد الكلى TR .

12.31. A firm's marginal revenue is $\mathrm{MR} = 425 - 0.5x - 0.15x^2$. Find the total revenue TR.

$$\mathrm{TR} = \int \mathrm{MR}\,dx = \int (425 - 0.5x - 0.15x^2)\,dx$$

$$\mathrm{TR} = 425x - 0.25x^2 - 0.05x^3 + c$$

وحيث إنه لا يوجد إيراد عندما لا توجد مبيعات فإن $\mathrm{TR}(0) = 0$ وعند إجراء التكامل إلى دالة الإيراد الحدى MR لإيجاد دالة الإيراد الكلى TR فإن ثبات التكامل دائمًا يساوى صفرًا . ولذلك .

$$\mathrm{TR} = 425x - 0.25x^2 - 0.05\,x^3$$

12.32. أوجد دالة الإيراد الكلى TR إذا علمت أن دالة الإيراد الحدى $\mathrm{MR} = 185 - 0.4x - 0.3x^2$.

12.32. Find TR, given $\mathrm{MR} = 185 - 0.4x - 0.3x^2$.

$$\mathrm{TR} = \int (185 - 0.4x - 0.3x^2)\,dx = 185x - 0.2x^2 - 0.1x^3$$

12.33. أوجد الإيراد الكلى الإضافى الناتج من زيادة المبيعات من 5 وحدات إلى 9 وحدات يوميًا إذا علمت أن $\mathrm{MR} = 270 - 8x$.

12.33. Find the additional total revenue derived from increasing daily sales from 5 to 9 units, given $\mathrm{MR} = 270 - 8x$.

$$\mathrm{TR}(9) - \mathrm{TR}(5) = \int_5^9 \mathrm{MR}\,dx = \int_5^9 (270 - 8x)\,dx$$

$$= \left[270x - 4x^2\right]_5^9 = 2106 - 1250 = 856$$

12.34. أوجد الإيراد الكلى الإضافى الناتج من زيادة المبيعات من 100 وحدة إلى 250 وحدة لمنتج يعمل فى سوق المنافسة الكاملة ودالة إيراده الحدى $\mathrm{MR} = 15$.

12.34. Find the additional total revenue from increasing sales from 100 to 250 units for the producer in pure competition for whom $\mathrm{MR} = 15$.

$$\mathrm{TR}(250) - \mathrm{TR}(100) = \int_{100}^{250} \mathrm{MR}\,dx = \int_{100}^{250} 15\,dx$$

$$= [15x]_{100}^{250} = 3750 - 1500 = 2250$$

12.35. إذا كانت دالة الأرباح الحدية لأحد المصنعين هى $\pi' = -3x^2 + 80x + 140$. أوجد الربح الإضافى π الناتج من زيادة الإنتاج من 2 وحدة إلى 4 وحدات .

12.35. A manufacturer's marginal profit is $\pi' = -3x^2 + 80x + 140$. Find the additional profit π earned by increasing production from 2 units to 4 units.

$$\pi(4) - \pi(2) = \int_2^4 (-3x^2 + 80x + 140)\,dx$$

$$= \left(-x^3 + 40x^2 + 140x\right)_2^4 = 704$$

12.36. تكاليف الصيانة $M(t)$ لأحد المصانع تزداد كلما تقادمت الآلات والمعدات . وإذا علمت أن معدل الزيادة فى تكاليف الصيانة بالدولار لكل سنة هى $M'(t) = 75t^2 + 9000$ حيث تمثل t عدد السنوات ، أوجد تكاليف الصيانة الكلية للمصنع من 4 سنوات إلى 6 سنوات .

12.36. Maintenance costs $M(t)$ in a factory increase as plant and equipment get older. Given the rate of increase in maintenance costs in dollars per year $M'(t) = 75t^2 + 9000$, where t is the number of years, find the total maintenance costs of the factory from 4 to 6 years.

$$M(6) - M(4) = \int_4^6 (75t^2 + 9000)\,dt$$

$$= \left(25t^3 + 9000t\right)_4^6 = 21,800$$

12.37. سيارة ما تهلك قيمتها بسرعة فى سنواتها الأولى القليلة ثم تهلك بشكل أكثر بطئًا فى السنوات الأخيرة . وإذا علمت أن المعدل الذى تهلك به قيمة السيارة خلال السنوات هو $V'(t) = 300(t-8)$ حيث $0 \le t \le 8$ وأن السعر الملصق عليها هو 12,000 دولار . أوجد (a) قيمة السيارة $V(t)$ و (b) قيمة إهلاك السيارة خلال السنوات الأربع الأولى و (c) وقيمة إهلاك السيارة خلال السنوات الأربع الأخيرة . و (d) استخدم الحل فى (a) للتقدير عند $t = 4$ لتتحقق من الحل فى (b) .

12.37. A car depreciates rapidly in value in its first few years and more slowly in later years. Given the rate at which the value of a car depreciates over the years, $V'(t) = 300(t-8)$ for $0 \le t \le 8$, and a sticker price of $12,000, find (*a*) the value of the car $V(t)$, (*b*) the total amount by which the car depreciates in the first 4 years, and (*c*) the total amount by which it depreciates in the next 4 years. (*d*) Use the answer in (*a*) evaluated at $t = 4$ to check your answer in (*b*).

(*a*)

$$V(t) = \int 300(t-8)\,dt = 150t^2 - 2400t + c$$

ومع $V(0) = 12000$

$$V(t) = 150t^2 - 2400t + 12,000 \qquad (12.10)$$

(*b*)

$$V(4) - V(0) = \int_0^4 300(t-8)\,dt$$

$$= \left(150t^2 - 2400t\right)_0^4 = 2400 - 9600 = -\$7200$$

تنخفض قيمة السيارة أى تهلك بمقدار 7200 فى السنوات الأربع الأولى .

(*c*)

$$V(8)-V(4)=\int_4^8 300(t-8)\,dt$$

$$=(150t^2-2400t)\Big|_4^8=-\$2400$$

تهلك السيارة بمقدار 2400 دولار فى السنوات الأربع الأخيرة .

(*d*) وعند تقدير (12.10) عند $t=4$.

$$V(4)=150(4)^2-2400(4)+12{,}000=4800$$

$$V(0)-V(4)=12{,}000-4800=\$7200$$

السيارة تهلك بمقدار 7200 دولار كما وجد فى (*b*) .

12.38. أوجد القيمة الحالية لمبلغ 7500 دولار يدفع كل سنة لمدة أربع سنوات عندما يكون معدل الفائدة 10% يحسب بشكل مستمر .

12.38. Find the present value of $7500 to be paid each year for 4 years when the interest rate is 10 percent compounded continuously.

$$P=\frac{A}{r}\left(1-e^{-rn}\right)$$

$$P=\frac{7500}{0.1}\left(1-e^{-(0.1)(4)}\right)$$

من (*12.7*)

$$P=75{,}000(0.32968)=\$24{,}726$$

بالتعويض

12.39. أوجد القيمة الحالية لمبلغ 15,000 دولار يدفع كل سنة لمدة 8 سنوات عندما يكون معدل الفائدة 7.5% ويحسب بشكل مستمر .

12.39. Find the present value of $15,000 to be paid each year for 8 years when the interest rate is 7.5 percent compounded continuously.

بالتعويض فى (*12.7*) .

$$P=\frac{15{,}000}{0.075}\left(1-e^{-(0.075)(8)}\right)$$

$$=200{,}000(0.45119)=\$90{,}238$$

12.40. أوجد فائض المستهلك *CS* لكل من منحنيات الطلب التالية عند المستوى المحدد .

12.40. Find the consumers' surplus CS for each of the following demand curves at the level indicated.

(*a*) $P=375-3Q^2;\ Q_0=10,\ P_0=75$

$$\text{CS}=\int_0^{Q_0} f(Q)\,dQ-Q_0P_0$$

من (*12.8*)

$$\text{CS}=\int_0^{10}(375-3Q^2)\,dQ-10(75)$$

$$\text{CS}=(375Q-Q^3)\Big|_0^{10}-750$$

$$\text{CS}=3750-1000-750=2000$$

(*b*) $P = \dfrac{350}{Q+5}$; $Q_0 = 20$, $P_0 = 12$

$$\text{CS} = \int_0^{20} \left[350(Q+5)^{-1}\right] dQ - 12(20)$$

$$\text{CS} = [350 \ln(Q+5)]_0^{20} - 240$$

$$\text{CS} = [350(3.21888 - 1.60944)] - 240 \approx 323.30$$

12.41. أوجد فائض المنتج PS لكل من منحنيات العرض التالية عند المستوى المحدد .

12.41. Find the producers' surplus PS for each of the following supply curves at the level indicated.

(*a*) $P = Q^2 + 4Q + 60$; $Q_0 = 5$, $P_0 = 85$

$$\text{PS} = Q_0 P_0 - \int_0^{Q_0} g(Q)\, dQ$$

من (*12.9*)

$$\text{PS} = 5(85) - \int_0^5 (Q^2 + 4Q + 60)\, dQ$$

$$\text{PS} = 425 - \left(\tfrac{1}{3}Q^3 + 2Q^2 + 60Q\right)\Big|_0^5 = 425 - 391.67 = 33.33$$

(*b*) $P = 5 + \frac{1}{4}\sqrt{Q}$; $Q_0 = 144$, $P_0 = 8$

$$\text{PS} = 144(8) - \int_0^{144} \left(5 + \tfrac{1}{4}Q^{1/2}\right) dQ$$

$$\text{PS} = 1152 - \left[5Q + \tfrac{1}{6}Q^{3/2}\right]_0^{144} = 1152 - 720 - 288 = 144$$

مسائل إضافية

Indefinite Integral التكامل غير المحدد

12.42. أوجد التكاملات غير المحددة التالية :

12.42. Find the following indefinite integrals:

(*a*) $\int (24x^5 + 35x^4 - 64x^3)\, dx$

(*b*) $\int (8x^{-5} - x^{-3} + 5x^{-2})\, dx$

(*c*) $\int 21x^{3/4}\, dx$

(*d*) $\int 8x^{-1/3}\, dx$

(*e*) $\int 6\sqrt{x}\, dx$

(*f*) $\int 9\sqrt{x-13}\, dx$

(*g*) $\int 28e^{-1.75t}\, dt$

(*h*) $\int \dfrac{5}{x-6}\, dx$

12.43. أوجد التكاملات غير المحددة لكل من التالى إذا أعطيت الشرط المبدئى أو الشرط الحدودى .

12.43. Find the indefinite integrals for each of the following, given an initial condition or a boundary condition.

(*a*) $\int (16x^3 - 21x^{2/5})\, dx$, إذا أعطيت $F(0) = 13$.

(*b*) $\int (18x^5 + 4x^{-3})\, dx$, إذا أعطيت $F(1) = 8$.

(*c*) $\int (3x^8 - 2x^{-4})\, dx$, إذا أعطيت $F(1) = -4$.

(*d*) $\int (28e^{4t} - 18e^{-6t})\, dt$, إذا أعطيت $F(0) = 2$.

Definite Integral التكامل المحدد

12.44. Evaluate each of the following definite integrals:

12.44. قدر كل من التكاملات المحددة التالية :

(*a*) $\int_1^4 9x^2\,dx$ (*b*) $\int_5^{15} -60x^{-2}\,dx$ (*c*) $\int_4^{64} 2.5x^{-1/2}\,dx$

(*d*) $\int_1^7 8x^{-1}\,dx$ (*e*) $\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ (*f*) $\int_0^2 3e^{t/5}\,dt$

(*g*) $\int_{-0.5}^0 -42e^{-6t}\,dt$ (*h*) $\int_{16}^{36} 15\sqrt{x}\,dx$

12.45. Evaluate each of the following definite integrals:

12.45. قدر كل من التكاملات المحددة التالية :

(*a*) $\int_2^5 (8x+7)\,dx$ (*b*) $\int_2^4 (15x^2-6x)\,dx$

(*c*) $\int_8^{125} (4x^{-1/3}-x^{-2/3})\,dx$ (*d*) $\int_8^{12} 20(x-7)^3\,dx$

(*e*) $\int_{-2}^2 (6x^2+10x+3)\,dx$ (*f*) $\int_0^{0.25} (12e^{-3t}-8e^{-2t})\,dt$

Area Between Curves المساحة بين المنحنيات

12.46. المطلوب تقدير المساحة بين المنحنيات فى الفترة المحددة لكل من مجموعات الدوال التالية بعد القيام برسم المنحنيات بمفردك .

12.46. Evaluate the area between the curves over the stated interval for each of the following sets of functions, after having drawn the curves on your own:

(*a*) $y_1 = 2x^2 - 8$ و $y_2 = -2x + 4$ من $x = -3$ إلى $x = -2$

(*b*) $y_1 = -4x^2 + 64$ و $y_2 = 4x + 16$ من $x = -4$ إلى $x = 3$

(*c*) $y_1 = 7x^2 - 14x + 13$ و $y_2 = -3x^2 + 6x - 2$ من $x = 0$ إلى $x = 2$

(*d*) $y_1 = -3x^2 + 24x - 2$ و $y_2 = -17x + 68$ من $x = 0$ إلى $x = 4$

Integration by Substitution التكامل بالتعويض

12.47. استخدم التكامل بالتعويض لتحديد التكامل غير المحدد لكل من الدوال التالية :

12.47. Use integration by substitution to determine the indefinite integral for each of the following functions:

(*a*) $\int 252x^2(7x^3-12)^2\,dx$ (*b*) $\int 90x^3(3x^4+19)^4\,dx$

(*c*) $\int 672x(8x^2-9)^5\,dx$ (*d*) $\int \frac{120x^3}{(5x^4-18)^4}\,dx$

(*e*) $\int \frac{-576x^2}{(8x+13)^5}\,dx$ (*f*) $\int \frac{30x^4}{6x^5-21}\,dx$

(*g*) $\int \frac{18x^3}{\sqrt{9x^4-5}}\,dx$ (*h*) $\int 99x^2\sqrt{22x^3+19}\,dx$

(*i*) $\int 96x^2e^{4x^3}\,dx$ (*j*) $\int 120x^3e^{-6x^4}\,dx$

Integration by Parts التكامل بالتجزئة

12.48. استخدم التكامل بالتجزئة لتحديد التكاملات غير المحددة التالية :

12.48. Use integration by parts to determine each of the following indefinite integrals:

(*a*) $\int 20x(x+9)^4\,dx$ (*b*) $\int 42x(x-3)^5\,dx$

(*c*) $\int \frac{36x}{(x+8)^5}\,dx$

(*d*) $\int \frac{-18x}{(x-7)^3}\,dx$

(*e*) $\int \frac{6x}{\sqrt{x+13}}\,dx$

(*f*) $\int 45x\sqrt{x+21}\,dx$

(*g*) $\int 7xe^{x-3}\,dx$

(*h*) $\int 32x^2e^{4x}\,dx$

12.49. إذا علمت أن دالة التكلفة الحدية لإحدى المنشآت هى $\mathrm{MC} = x^2 - 11x + 385$ وأن تكاليفها الثابتة 450 دولاراً . أوجد دالة التكلفة الكلية TC .

12.49. A firm's marginal cost function is $\mathrm{MC} = x^2 - 11x + 385$. Its fixed costs are \$450. Find the total cost TC function.

12.50. أوجد التكلفة الكلية عند إنتاج 3 وحدات إضافية عندما تزيد المنشأة الإنتاج من 4 وحدات إلى 7 وحدات إذا علمت أن دالة التكلفة الحدية هى : $\mathrm{MC} = 3x^2 - 4x + 525$.

12.50. Find a firm's total cost of producing 3 extra units as a firm moves from a production level of 4 units to 7 units, given $\mathrm{MC} = 3x^2 - 4x + 525$.

12.51. أوجد دالة الإيراد الكلى TR للمنشأة إذا علمت أن دالة الإيراد الحدى هى $\mathrm{MR} = -0.24x^2 - 1.5x + 660$.

12.51. Find a firm's total revenue TR function, given the marginal revenue function $\mathrm{MR} = -0.24x^2 - 1.5x + 660$.

12.52. قدر الإيراد الكلى الإضافى الذى تحصل عليه من زيادة المبيعات من 10 وحدات إلى 12 وحدة إذا علمت أن $\mathrm{MR} = 104 - 6x$.

12.52. Estimate the additional total revenue received from increasing sales from 10 to 12 units, given $\mathrm{MR} = 104 - 6x$.

12.53. إحدى السيارات قيمتها 6000 دولار وتهلك خلال الزمن عند معدل $V'(t) = 250(t-6)$ حيث $0 \leq t \leq 6$. أوجد حجم الإهلاك للسيارة (*a*) فى السنوات الثلاث الأولى و (*b*) فى السنوات الثلاث الأخيرة .

12.53. A car worth \$6000 depreciates over the years at the rate $V'(t) = 250(t-6)$ for $0 \leq t \leq 6$. Find the total amount by which the car depreciates in (*a*) the first 3 years and (*b*) the last three years.

12.54. أوجد فائض المستهلك عند $x_0 = 5$ و $P_0 = 125$ إذا علمت أن دالة الطلب هى $P = -6x^2 + 275$.

12.54. Find the consumers' surplus at $x_0 = 5$ and $p_0 = 125$, given the demand function $p = -6x^2 + 275$.

12.55. أوجد فائض المنتج عند $x_0 = 6$ و $P_0 = 83.4$ إذا علمت أن دالة العرض هى $P = 0.15x^2 + 8x + 30$.

12.55. Find the producers' surplus at $x_0 = 6$ and $p_0 = 83.4$, given the supply function $p = 0.15x^2 + 8x + 30$.

حل المسائل الإضافية

12.42.

(*a*) $F(x) = 4x^6 + 7x^5 - 16x^4 + c$

(*b*) $F(x) = -2x^{-4} + \frac{1}{2}x^{-2} - 5x^{-1} + c$

(*c*) $F(x) = 12x^{7/4} + c$

(*d*) $F(x) = 12x^{2/3} + c$

(*e*) $F(x) = 4x^{3/2} + c$

(*f*) $F(x) = 6(x-13)^{3/2} + c$

(*g*) $F(t) = -16e^{-1.75t} + c$

(*h*) $F(x) = 5\ln|x-6| + c$

12.43.

(*a*) $F(x) = 4x^4 - 15x^{7/5} + 13$

(*b*) $F(x) = 3x^6 - 2x^{-2} + 7$

(*c*) $F(x) = \frac{1}{3}x^9 + \frac{2}{3}x^{-3} - 5$

(*d*) $F(t) = 7e^{4t} + 3e^{-6t} - 8$

12.44. (a) $F(x) = 3x^3\Big|_1^4 = 189$ (b) $F(x) = \dfrac{60}{x}\Big|_5^{15} = -8$

(c) $F(x) = 5x^{1/2}\Big|_4^{64} = 30$ (d) $F(x) = 8\ln x\Big|_1^7 = 8\ln 7$

(e) $F(x) = \frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_8^{27} = 7.5$ (f) $F(x) = 15e^{t/5}\Big|_0^2 = 15(e^{2/5} - 1)$

(g) $F(x) = 7e^{-6t}\Big|_{-0.5}^0 = 7(1 - e^3)$ (h) $F(x) = 10x^{3/2}\Big|_{16}^{36} = 1520$

12.45. (a) $F(x) = (4x^2 + 7x)\Big|_2^5 = 105$ (b) $F(x) = (5x^3 - 3x^2)\Big|_2^4 = 244$

(c) $F(x) = (6x^{2/3} - 3x^{1/3})\Big|_8^{125} = 117$ (d) $F(x) = 5(x - 7)^4\Big|_8^{12} = 3120$

(e) $F(x) = (2x^3 + 5x^2 + 3x)\Big|_{-2}^2 = 44$ (f) $F(x) = 4(e^{-2t} - e^{-3t})\Big|_0^{0.25} = 0.5366564$

12.46. (a) $F(x) = \left(-\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 12x\right)\Big|_{-3}^2 = 41.67$ (b) $F(x) = \left(-\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 48x\right)\Big|_{-4}^3 = 228.67$

(c) $F(x) = \left(3\frac{1}{3}x^3 - 10x^2 + 15x\right)\Big|_0^2 = 16.67$

(d) $F(x) = (x^3 - 20.5x^2 + 70x)\Big|_0^2 + (-x^3 + 20.5x^2 - 70x)\Big|_2^4 = 116$

12.47. (a) $F(x) = 4(7x^3 - 12)^3 + c$ (b) $F(x) = 1.5(3x^4 + 19)^5 + c$

(c) $F(x) = 7(8x^2 - 9)^6 + c$ (d) $F(x) = -2(5x^4 - 18)^{-3} + c$

(e) $F(x) = 6(8x^3 + 13)^{-4} + c$ (f) $F(x) = \ln\left|6x^5 - 21\right| + c$

(g) $F(x) = \sqrt{9x^4 - 5} + c$ (h) $F(x) = (22x^3 + 19)^{3/2} + c$

(i) $F(x) = 8e^{4x^3} + c$ (j) $F(x) = -5e^{-6x^4} + c$

12.48. (a) $F(x) = 4x(x + 9)^5 - \frac{2}{3}(x + 9)^6 + c$ (b) $F(x) = 7x(x - 3)^6 - (x - 3)^7 + c$

(c) $F(x) = -9x(x + 8)^{-4} - 3(x + 8)^{-3} + c$ (d) $F(x) = 9x(x - 7)^{-2} + 9(x - 7)^{-1} + c$

(e) $F(x) = 12x(x + 13)^{1/2} - 8(x + 13)^{3/2} + c$ (f) $F(x) = 30x(x + 21)^{3/2} - 12(x + 21)^{5/2} + c$

(g) $F(x) = 7xe^{x-3} - 7e^{x-3} + c$ (h) $F(x) = 8x^2e^{4x} - 4xe^{4x} + e^{4x} + c$

12.49. $\text{TC} = \frac{1}{3}x^3 - 5.5x^2 + 385x + 450$

12.50. $\text{TC} = (x^3 - 2x^2 + 525x)\Big|_4^7 = 1788$

12.51. $\text{TR} = -0.08x^3 - 0.75x^2 + 660x$

12.52. $\text{TR} = (104x - 3x^2)\Big|_{10}^{12} = 76$

12.53. (a) $(125t^2 - 1500t)\Big|_0^3 = -\$3375$ (b) $(125t^2 - 1500t)\Big|_3^6 = -\$1125$

12.54. $\text{CS} = (-2x^3 + 275x)\Big|_0^5 - 625 = 500$

12.55. $\text{PS} = 500.4 - (0.05x^3 + 4x^2 + 30x)\Big|_0^6 = 165.6$

الفصل الثالث عشر

تفاضل الدوال متعددة المتغيرات

Calculus of Multivariable Functions

13.1 الدوال عديدة المتغيرات المستقلة

Functions of Several Independent Variables

دراسة المشتقة فى الفصل التاسع والعاشر كانت مقصورة بدوال ذات متغير مستقل وحيد مثل $y=f(x)$. وطالما أن العديد من الأنشطة الاقتصادية تتطلب أكثر من متغير مستقل لذلك سنأخذ فى الاعتبار الدوال التى لها متغيرين مستقلين أو أكثر . وبالتعريف فإن $z=f(x, y)$ هى دالة لمتغيرين مستقلين إذا وجدت قيمة واحدة فقط لـ z فى مجال f لكل زوج من الأعداد الحقيقية (x, y) فى نطاق f . ووفقاً لما تم التعارف عليه فإن z متغير تابع و x ، y متغيرات مستقلة .

مثال 1 : منشأة تنتج السلعة x ودالة تكلفتها هى $c(x) = 125 + 7x$ وتنتج السلعة y ودالة تكلفتها هى $c(y) = 305 + 9y$ ويجمع التكاليف الفردية فإن التكاليف الكلية للمنشأة يمكن التعبير عنها كما يلى :

EXAMPLE 1. A firm produces one good x for which the cost function is $C(x) = 125 + 7x$ and another good y for which the cost function is $C(y) = 305 + 9y$. By adding individual costs, the total cost to the firm can be expressed simply as

$$C(x, y) = 125 + 7x + 305 + 9y$$

$$C(x, y) = 430 + 7x + 9y$$

والأمثلة الأخرى للدوال متعددة المتغيرات تشمل :

$$f(x, y) = x^2 + 5xy + y^2$$

$$Q(K, L) = -2K^2 + 78KL - 3L^2$$

مثال 2 : الدوال متعددة المتغيرات يمكن أن تقدر عند قيم معينة لـ x و y مثل $x=2$ ، $y=4$ من خلال استبدال x و y بالقيم المرغوبة . وباستخدام الدوال من المثال 1 .

EXAMPLE 2. Multivariable functions can be evaluated for specific values of x and y, such as $x = 2$, $y = 4$, by replacing x and y with the desired values. Using the functions from Example 1,

$$C(2, 4) = 430 + 7(2) + 9(4) = 480$$

$$f(2, 4) = (2)^2 + 5(2)(4) + (4)^2 = 60$$

$$Q(2, 4) = -2(2)^2 + 78(2)(4) - 3(4)^2 = 568$$

13.2 المشتقات الجزئية Partial Derivatives

إذا أعطيت دالة متعددة المتغيرات مثل $z=f(x, y)$ من أجل قياس أثر التغير فى أحد المتغيرات المستقلة (x أو y)

على المتغير التابع (z) فإننا بحاجة إلى المشتقة الجزئية . وتوجد مشتقة جزئية مميزة لكل متغير مستقل . فالمشتقة الجزئية لـ z بالنسبة إلى x تقيس معدل التغير اللحظى فى z بالنسبة إلى x عندما تظل y ثابتة . وتكتب بأحد الصور التالية : $\partial z/\partial x$ ، $\partial f/\partial x$ ، $f_x(x, y)$ ، f_x ، z_x ، f_1 أو z_1 . وتعرف كما يلى :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \qquad (13.1a)$$

وبالمثل فالمشتقة الجزئية لـ z بالنسبة إلى y تقيس معدل التغير لـ z بالنسبة إلى y عندما تظل x ثابتة . وتكتب بأحد الصور التالية : : $\partial z/\partial y$ ، $\partial f/\partial y$ ، $f_y(x, y)$ ، f_y ، z_y ، f_2 أو z_2 . وتعرف كما يلى :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \qquad (13.1b)$$

لإيجاد المشتقة الجزئية للدالة بالنسبة لأحد المتغيرات المستقلة فإننا نعامل المتغير المستقل الآخر باعتباره حدًا ثابتًا ونطبق القواعد العادية للتفاضل . انظر الأمثلة 3 و 4 والمسائل 13.1 إلى 13.8 .

مثال 3 : المشتقات الجزئية لدالة متعددة المتغيرات مثل $z = 8x^3 y^5$ وجدت كما يلى :

EXAMPLE 3. The partial derivatives of a multivariable function such as $z = 8x^3y^5$ are found as follows.

(a) عندما نفاضل بالنسبة إلى x تعامل الحد y كثابت من خلال وضعه ذهنيًا مع المعامل بين قوسين .

$$z = [8y^5] \cdot x^3$$

ومن ثم نأخذ مشتقة الحد x ونحتفظ بالحد y ثابتًا .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = [8y^5] \cdot \frac{d}{dx}(x^3)$$
$$= [8y^5] \cdot 3x^2$$

وتذكر أن الثابت المضروب يبقى عند عملية التفاضل ونحصل بعد الضرب وإعادة الترتيب على :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = 24x^2y^5$$

(b) وعندما نفاضل بالنسبة إلى y نعامل الحد x كثابت من خلال وضعه مع الثابت بين قوسين ومن ثم نأخذ المشتقة بالنسبة إلى y :

$$z = [8x^3] \cdot y^5$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y = [8x^3] \cdot \frac{d}{dy}(y^5)\cdot$$
$$= [8x^3] \cdot 5y^4 = 40x^3y^4$$

مثال 4 : أوجد المشتقات الجزئية للدالة :

EXAMPLE 4. To find the partial derivatives for

$$z = 12x^4 - 10x^2y^3 + 15y^6$$

(a) عندما نفاضل بالنسبة إلى x نضع جميع حدود y بين قوسين ونعاملها على أساس أنها ثوابت .

$$z = 12x^4 - [10y^3]x^2 + [15y^6]$$

نأخذ المشتقة بالنسبة إلى x ، وتذكر أنه عند التفاضل فإن الثوابت المضروبة تبقى بينما تحذف ثوابت الجمع لأن مشتقة الثابت تساوى صفرًا .

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{d}{dx}(12x^4) - \left[10y^3\right]\cdot\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}\left[15y^6\right]\\ &= 48x^3 - \left[10y^3\right]\cdot 2x + 0\\ &= 48x^3 - 20xy^3\end{aligned}$$

(*b*) عندما نفاضل بالنسبة إلى y فإننا نجمد جميع حدود x ونفاضل بالنسبة إلى y

$$\begin{aligned}z &= \left[12x^4\right] - \left[10x^2\right]y^3 + 15y^6\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{d}{dy}\left[12x^4\right] - \left[10x^2\right]\cdot\frac{d}{dy}(y^3) + \frac{d}{dy}(15y^6)\\ &= 0 - \left[10x^2\right]\cdot 3y^2 + 90y^5\\ &= -30x^2y^2 + 90y^5\end{aligned}$$

انظر المسألة 13.1 .

13.3 قواعد التفاضل الجزئى Rules of Partial Differentiation

قواعد التفاضل الجزئى لها بنية قواعد التفاضل العادى التى عرضت فى القسم 9.7 . والقواعد الأساسية معطاة أدناه ومبينة فى الأمثلة من 5 إلى 9 ومعالجة فى المسائل من 13.2 إلى 13.45 .

13.3.1 قاعدة الضرب Product Rule

إذا أعطيت : $z = g(x, y) . h(x, y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = g(x, y)\cdot\frac{\partial h}{\partial x} + h(x, y)\cdot\frac{\partial g}{\partial x} \qquad (13.2a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = g(x, y)\cdot\frac{\partial h}{\partial y} + h(x, y)\cdot\frac{\partial g}{\partial y} \qquad (13.2b)$$

مثال 5 : إذا أعطيت $z = (4x + 9)(8x + 5y)$ باستخدام قاعدة الضرب .

EXAMPLE 5. Given $z = (4x + 9)(8x + 5y)$, by the product rule,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (4x + 9)(8) + (8x + 5y)(4) = 64x + 72 + 20y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (4x + 9)(5) + (8x + 5y)(0) = 20x + 45$$

13.3.2 قاعدة خارج القسمة Quotient Rule

إذا أعطيت : $z = \dfrac{g(x, y)}{h(x, y)} \quad h(x, y) \neq 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{h(x, y)\cdot\partial g/\partial x - g(x, y)\cdot\partial h/\partial x}{[h(x, y)]^2} \qquad (13.3a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{h(x, y)\cdot\partial g/\partial y - g(x, y)\cdot\partial h/\partial y}{[h(x, y)]^2} \qquad (13.3b)$$

مثال 6 : إذا أعطيت $z = (2x + 9y)/(8x + 5y)$ باستخدام قاعدة خارج القسمة .

EXAMPLE 6. Given $z = (2x + 9y)/(8x + 7y)$, by the quotient rule,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(8x + 7y)(2) - (2x + 9y)(8)}{(8x + 7y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{16x + 14y - 16x - 72y}{(8x + 7y)^2} = \frac{-58y}{(8x + 7y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(8x + 7y)(9) - (2x + 9y)(7)}{(8x + 7y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{72x + 63y - 14x - 63y}{(8x + 7y)^2} = \frac{58x}{(8x + 7y)^2}$$

13.3.3 قاعدة دالة القوى العامة Generalized Power Function Rule

إذا أعطيت $z = [g(x, y]^n$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = n\,[g(x, y)]^{n-1} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \qquad (13.4a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = n\,[g(x, y)]^{n-1} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \qquad (13.4b)$$

مثال 7 : إذا أعطيت $z = (4x^2 + 9y^3)^5$ باستخدام قاعدة دالة القوى العامة .

EXAMPLE 7. Given $z = \left(4x^2 + 9y^3\right)^5$, by the generalized power function rule,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5\left(4x^2 + 9y^3\right)^4 \cdot (8x) = 40x\left(4x^2 + 9y^3\right)^4$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5\left(4x^2 + 9y^3\right)^4 \cdot (27y^2) = 135y^2\left(4x^2 + 9y^3\right)^4$$

13.3.4 قاعدة الدالة الأسية الطبيعية Natural Exponential Function Rule

إذا أعطيت : $z = e^{g(x, y)}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{g(x,y)} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \qquad (13.5a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{g(x,y)} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \qquad (13.5b)$$

مثال 8 : إذا أعطيت $z = e^{4x^2y^3}$ باستخدام قاعدة الدالة الأسية الطبيعية .

EXAMPLE 8. Given $z = e^{4x^2y^3}$, by the natural exponential function rule,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{4x^2y^3} \cdot 8xy^3 = 8xy^3e^{4x^2y^3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{4x^2y^3} \cdot 12x^2y^2 = 12x^2y^2e^{4x^2y^3}$$

13.3.5 قاعدة الدالة اللوغاريتمية الطبيعية Natural Logarithmic Function Rule

إذا أعطيت : $z = \ln |g(x, y)|$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{g(x, y)} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \tag{13.6a}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{g(x, y)} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \tag{13.6b}$$

مثال 9 : إذا أعطيت $z = \ln |3x^3 + 4y^2|$ باستخدام قاعدة الدالة اللوغاريتمية الطبيعية .

EXAMPLE 9. Given $z = \ln|3x^3 + 4y^2|$, by the natural logarithmic function rule,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3x^3 + 4y^2} \cdot 9x^2 = \frac{9x^2}{3x^3 + 4y^2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3x^3 + 4y^2} \cdot 8y = \frac{8y}{3x^3 + 4y^2}$$

13.4 المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية Second-Order Partial Derivatives

إذا أعطيت $z = f(x, y)$ فإن المشتقة الجزئية من الرتبة الثانية تعنى أن الدالة قد تـم تفاضلـها جزئيًا بالنسـبة لأحد المتغيرات المستقلة مرتين بينما ظل المتغير المستقل الآخر ثابتًا :

$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \qquad f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

وفى الواقع فإن f_{xx} تقيس معدل التغير للمشتقة الجزئية من الرتبة الأولى f_x بالنسبة إلى x بينما تبقى y ثابتة . و f_{yy} تقيس معدل التغير للمشتقة الجزئية من الرتبة الأولى f_y بالنسبة إلى y بينما تبقى x ثابتـة . انظـر المسـائل 13.9 إلى 13.10 .

والمشتقات الجزئية التقاطعية (المختلطة) ، f_{xy} و f_{yx} تبين أن الدالة الأولية تم تفاضلـها أولاً بالنسـبة لأحـد المتغيرات المستقلة ومن ثم فإن المشتقة الجزئية بدورها قد تم تفاضلها جزئيًا بالنسبة للمتغير المستقل الآخر .

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} \qquad f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$$

وباختصار فإن المشتقة الجزئية التقاطعية تقيس معدل تغير المشتقة الجزئية من الرتبة الأولى بالنسبة إلى المتغـير المستقل الآخر . لاحظ كيف تتغير رتبة المتغيرات المستقلة فى الصيـغ المختلفـة للرمـوز . انظـر المسـائل مـن 13.11 إلى 13.12 .

مثال 10 : أوجد (*a*) المشتقة الجزئية الأولى و (*b*) المشتقة الجزئية الثانية و (*c*) المشتقة الجزئية التقاطعية .

EXAMPLE 10. The (*a*) first, (*b*) second, and (*c*) cross partial derivatives are taken as shown below for

$$z = 4x^5 + 7xy + 8y^4$$

(*a*)
$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 20x^4 + 7y \qquad z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 7x + 32y^3$$

(*b*)
$$z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 80x^3 \qquad z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 96y^2$$

(*c*)
$$z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(20x^4 + 7y) = 7$$

$$z_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(7x + 32y^3) = 7$$

مثال 11 : (*a*) المشتقة الجزئية الأولى و (*b*) المشتقة الجزئية الثانية و (*c*) المشتقة الجزئية التقاطعية وقد قدرت عند $x = 1$ و $y = 2$.

EXAMPLE 11. The (*a*) first, (*b*) second, and (*c*) cross partial derivatives are found and evaluated below at $x = 1$, $y = 2$ for

$$z = 2x^3y^4$$

(*a*) $z_x = 6x^2y^4$ $\qquad$ $z_y = 8x^3y^3$

$z_x(1,2) = 6(1)^2(2)^4 = 96$ $\qquad$ $z_y(1,2) = 8(1)^3(2)^3 = 64$

(*b*) $z_{xx} = 12xy^4$ $\qquad$ $z_{yy} = 24x^3y^2$

$z_{xx}(1,2) = 12(1)(2)^4 = 192$ $\qquad$ $z_{yy}(1,2) = 24(1)^3(2)^2 = 96$

(*c*) $z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(6x^2y^4) = 24x^2y^3$ $\qquad$ $z_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(8x^3y^3) = 24x^2y^3$

$z_{xy}(1,2) = 24(1)^2(2)^3 = 192$ $\qquad$ $z_{yx}(1,2) = 24(1)^2(2)^3 = 192$

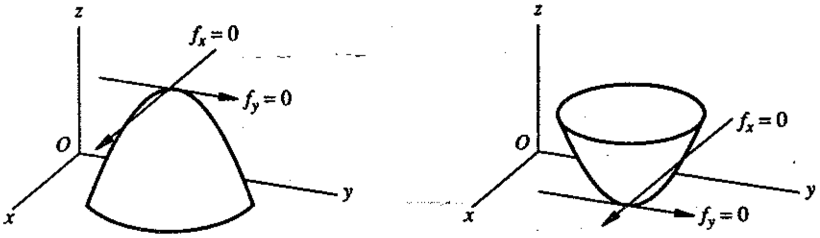
ووفقًا لنظرية يونج إذا كانت كلتا المشتقتين الجزئيتين مستمرتين فإنهما ستكونان متماثلتين . انظر المسائل 13.11 و 13.12 .

13.5 أمثلية الدوال متعددة المتغيرات

Optimization of Multivariable Functions

من أجل أن تكون الدالة متعددة المتغيرات مثل $z = f(x, y)$ عند نهاية نسبية صغرى أو عظمى فلابد أن تتحقق ثلاثة شروط هى :

1. المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى يجب أن تساوى صفرًا فى آن واحد . وهذا يعنى أنه عند نقطة معينة (a, b) وتسمى النقطة الحرجة فإن الدالة لن تكون متزايدة أو متناقصة بالنسبة إلى المحاور الرئيسية ولكنها تكون عند حالة استقرار نسبى (relative Plateau) .
2. عندما تقدر المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية عند النقطة الحرجة (a, b) فكلتاهما يجب أن تكونا موجبتين فى حالة النهاية الصغرى وسالبتين فى حالة النهاية العظمى . وهذا يضمن أنه من حالة الاستقرار النسبى عند (a, b) فإن الدالة تتحرك إلى أعلى بالنسبة للمحاور الرئيسية فى حالة النهاية الصغرى وتتحرك إلى أسفل بالنسبة للمحاور الرئيسية فى حالة النهاية العظمى .
3. إن الناتج المقدر للمشتقات الجزئية من الرتبة الثانية عند النقطة الحرجة يجب أن يزيد عن الناتج المقدر للمشتقات الجزئية التقاطعية عند النقطة الحرجة . وعلى العموم وكما نرى فى الشكل (1–13) فعندما نقدر عند النقطة الحرجة (a, b) فإن القيم تنطبق على النهاية النسبية العظمى والنهاية النسبية الصغرى .



شكل (13–1)

نهاية نسبية صغرى	نهاية نسبية عظمى
$f_x = f_y = 0$	$f_x = f_y = 0$
$f_{xx}, f_{yy} > 0$	$f_{xx}, f_{yy} < 0$
$f_{xx} \cdot f_{yy} > (f_{xy})^2$	$f_{xx} \cdot f_{yy} > (f_{xy})^2$

إن المشاهدات التالية جديرة بالملاحظة :

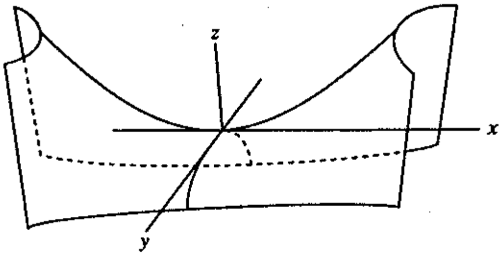
1. طالما ـ وفقاً لنظرية يونج ـ أن $f_{xy} = f_{yx}$ فإن $f_{xy} \cdot f_{yx} = (f_{yx})^2$ ومن ثم يمكن كتابة الشرط الثالث كما يلى :

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$$

2. إذا كانت $f_{xx} \cdot f_{yy} < (f_{xy})^2$ (*a*) عندما f_{xx} و f_{yy} لهما نفس الإشارات فإن الدالة تكون عند نقطة تحول و (*b*) وعندما f_{xx} و f_{yy} لهما إشارات مختلفة فإن الدالة تكون عند نقطة سراجية (Saddle Point) كما نرى في الشكل (13–2) حيث تكون الدالة عند نهاية صغرى عندما ننظر من أحد المحاور (المحور *x*) ولكنها تكون عند نهاية عظمى عندما ننظر من المحور الآخر (المحور *y*) .

3. إذا كانت $f_{xx} \cdot f_{yy} = (f_{xy})^2$ فإن الاختبار غير حاسم .

انظر المثال 12 والمسائل من 13.13 إلى 13.20 ، ولنقاط التحول انظر المسائل 13.15 ، 13.18 و 13.19 ولنقاط السراج انظر المسائل 13.16 و 13.17 . 13.20 .



نقطة السراج (سَرْج)

شكل (13–2)

مثال 12 : (*a*) أوجد النقاط الحرجة . (*b*) واختبر لترى ما إذا كانت الدالة عند نهاية نسبية عظمى أو نهاية نسبية صغرى لو أعطيت :

EXAMPLE 12. (*a*) Find the critical points and (*b*) test to see if the function is at a relative maximum or minimum, given

$$z = 3x^3 + 2y^3 + 9x^2 - 12y^2 - 72x - 126y + 19$$

(*a*) نأخذ المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى ثم نضعها مساوية للصفر ونوجد قيم x و y .

$$z_x = 9x^2 + 18x - 72 = 0 \qquad z_y = 6y^2 - 24y - 126 = 0 \qquad (13.7)$$

$$9(x^2 + 2x - 8) = 0 \qquad 6(y^2 - 4y - 21) = 0$$

$$9(x - 2)(x + 4) = 0 \qquad 6(y + 3)(y - 7) = 0$$

$$x = 2 \quad x = -4 \qquad y = -3 \quad y = 7$$

ولهذا توجد أربع مجموعات متميزة للنقاط الحرجة : $(2, -3)$ و $(2, 7)$ و $(-4, -3)$ و $(-4, 7)$.

(*b*) نأخذ المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية من (13.7) ونقدرها عند النقاط الحرجة ونتحقق من الإشارات .

$$z_{xx} = 18x + 18 \qquad z_{yy} = 12y - 24$$

(1) $z_{xx}(2, -3) = 18(2) + 18 = 54 > 0$ $\qquad z_{yy}(2, -3) = 12(-3) - 24 = -60 < 0$

(2) $z_{xx}(2, 7) = 18(2) + 18 = 54 > 0$ $\qquad z_{yy}(2, 7) = 12(7) - 24 = 60 > 0$

(3) $z_{xx}(-4, -3) = 18(-4) + 18 = -54 < 0$ $\qquad z_{yy}(-4, -3) = 12(-3) - 24 = -60 < 0$

(4) $z_{xx}(-4, 7) = 18(-4) + 18 = -54 < 0$ $\qquad z_{yy}(-4, 7) = 12(7) - 24 = 60 > 0$

طالما توجد إشارات مختلفة لكل من المشتقات الجزئية الثانية فى (1) و (4) فإن الدالة لا يمكن أن تكون عند نهاية نسبية عظمى أو صغرى عند $(2, -3)$ أو $(-4, 7)$. وعندما تكون إشارات f_{xx} و f_{yy} مختلفة فإن f_{yy} . f_{xx} لا يمكن أن تكون أكبر من $(f_{xy})^2$ والدالة تكون عند نقطة السراج . وعندما تكون إشارات كِلا المشتقات الثانية موجبة كما فى (2) أو سالبة كما فى (3) فإن الدالة يمكن أن تكون نهاية نسبية صغرى عند $(2, 7)$ وعند نهاية نسبية عظمى عند $(-4, -3)$ ولكن يجب أولاً اختبار الشرط الثالث لنتأكد من إمكانية نقطة التحول .

(*c*) من (13.7) نأخذ المشتقات الجزئية التقاطعية ونتحقق من أن $z_{xx}(a, b) \cdot z_{yy}(a, b) > [z_{xy}(a, b)]^2$.

$$z_{xy} = 0 \qquad z_{yx} = 0$$

$$z_{xx}(a, b) \cdot z_{yy}(a, b) > [z_{xy}(a, b)]^2$$

من (2) $\qquad (54) \quad (60) \quad > (0)^2$

$$3240 > 0$$

ومن (3) $\qquad (-54) \quad (-60) \quad > (0)^2$

$$3240 > 0$$

ولهذا تتحقق الشروط الثلاثة للنهاية النسبية الصغرى عند $(2, 7)$ والنهاية النسبية العظمى عند $(-4, -3)$. ووجدنا سابقًا أن الدالة كانت عند نقطة السراج عند $(2, -3)$ و $(-4, 7)$. والأمثلة على نقاط التحول انظر المسائل 13.15 و 13.18 و 13.19 .

13.6 الأمثلية المقيدة ومضاعفات لاجرانج

Constrained Optimization With Lagrange Multipliers

يمكن أن نستخدم أيضًا حساب التفاضل فى تعظيم أو تصغير الدالة الخاضعة لقيد . فإذا أعطيت الدالة $f(x, y)$ الخاضعة للقيد $g(x, y) = k$ (k ثابت) فإنه يمكن تكوين دالة جديدة F من خلال (1) وضع القيد مساويًا للصفر و (2) ضربه فى λ (مضاعف لاجرانج) و (3) إضافة الناتج إلى الدالة الأصلية .

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\,[k - g(x, y)] \tag{13.8}$$

وتسمى الدالة $F(x, y, \lambda)$ دالة لاجرانج و $f(x, y)$ هى الدالة الأصلية أو دالة الهدف و $k - g(x, y)$ هو القيد وقد وضع مساويًا للصفر . وطالما القيد دائمًا يعاد كتابته ليساوى صفرًا فإن الناتج $\lambda\,[k - g(x, y)]$ أيضًا يساوى صفرًا وإضافة الحد لا تغير قيمة دالة الهدف . أما القيم الحرجة λ_0 ، y_0 ، x_0 التى عندها يتم تعظيم الدالة فيمكن إيجادها عن طريق أخذ المشتقات الجزئية لـ F بالنسبة إلى كل المتغيرات المستقلة الثلاثة بوضعها مساوية للصفر وحلها آنيًا .

$$F_x(x, y, \lambda) = 0$$
$$F_y(x, y, \lambda) = 0$$
$$F_\lambda(x, y, \lambda) = 0$$

ملاحظة : طالما أنه فى (13.8) أن $\lambda\,[k - g(x, y)] = 0 = \lambda\,[g(x, y) - k]$ فإن أى صيغة منهما يمكن أن تضاف أو تطرح من دالة الهدف دون تغيير القيم الحرجة لـ x و y . فقط إشارة λ سوف تتأثر . فمضاعف لاجرانج λ يقيس الأثر على دالة الهدف لتغير بسيط فى ثابت القيد . انظر مثال 13 .

مثال 13 : استخدم طريقة مضاعف لاجرانج لتعظيم الدالة .

EXAMPLE 13. Use the Lagrange multiplier method to optimize the function

$$z = 6x^2 + 5xy + 2y^2$$

شرط القيد $2x + y = 96$.

1. نبدأ بوضع القيد مساويًا للصفر .

$$96 - 2x - y = 0$$

ثم نضرب القيد بـ λ ونضيفه إلى دالة الهدف لنكون دالة لاجرانج Z .

$$Z = 6x^2 + 5xy + 2y^2 + \lambda(96 - 2x - y) \tag{13.9}$$

2. نأخذ مشتقات الرتبة الأولى ونضعها مساوية للصفر ونحل آنيًا :

$$Z_x = 12x + 5y - 2\lambda = 0 \tag{13.10}$$
$$Z_y = 5x + 4y - \lambda = 0 \tag{13.11}$$
$$Z_\lambda = 96 - 2x - y = 0 \tag{13.12}$$

بحذف λ من خلال طرح 2 مضروبة فى (13.11) من 13.10 .

$$2x - 3y = 0 \qquad x = 1.5y$$

وبالتعويض بقيمة $x = 1.5y$ فى (13.12) .

$$96 - 2(1.5y) - y = 0 \qquad y_0 = 24$$

ومن ثم نعوض بقيمة $y_0 = 24$ فى (13.12) لإيجاد x_0 .

$$96 - 2x - 24 = 0 \qquad x_0 = 36$$

لإيجاد λ نعوض $x_0 = 36$ و $y_0 = 24$ فى (13.11) أو (13.10) .

$$5(36) + 4(24) - \lambda = 0 \qquad \lambda_0 = 276$$

وأخيرًا نعوض بالقيم الحرجة فى (13.9) .

$$Z = 6(36)^2 + 5(36)(24) + 2(24)^2 + (276)\,[96 - 2(36) - 24]$$

$$Z = 6(1296) + 5(864) + 2(576) + 276(0) = 13{,}248$$

لاحظ بأن وضع القيد مساويًا للصفر عند القيم الحرجة فإن دالة لاجرانج Z تساوى بالضبط دالة الهدف z . لاحظ أيضًا بأنه مع $\lambda_0 = 276$ فالزيادة فى ثابت القيد من 96 إلى 97 سوف تؤدى إلى زيادة فى Z بمقدار 276 تقريبًا . انظر المسائل 13.21 إلى 13.24 .

13.7 مضاعفات تحديد الدخل Income Determination Multipliers

يستخدم التفاضل الجزئى فى اشتقاق المضاعفات المختلفة لنموذج تحديد الدخل . فإذا أعطيت :

$$Y = C + I \qquad C = C_0 + bY_d \qquad T = T_0 + tY \qquad Y_d = Y - T \qquad I = I_0$$

فإننا سنجد فى المعادلة (*4.52*) للمسألة (4.19) أن

$$Y_e = \frac{1}{1 - b + bt}(C_0 + I_0 - bT_0) \tag{13.13}$$

وبأخذ المشتقة الجزئية لـ (*13.13*) بالنسبة لأى من المتغيرات المستقلة أو المعلّمات فإنها تعطى المضاعف لهذا المتغير أو المعلّم . ولهذا تذكر بأن الكسر $1/(1 - b + bt)$ مضروبًا فى كل حد داخل القوس ، فمضاعف الاستهلاك الذاتى (التلقائى) .

$$\frac{\partial Y_e}{\partial C_0} = \frac{1}{1 - b + bt}$$

ومضاعف الضرائب التلقائية

$$\frac{\partial Y_e}{\partial T_0} = \frac{-b}{1 - b + bt}$$

وباستخدام قاعدة خارج القسمة فإن المضاعف لتغير ما فى معدل الضريبة هو :

$$\frac{\partial Y_e}{\partial t} = \frac{(1 - b + bt)(0) - (C_0 + I_0 - bT_0)(b)}{(1 - b + bt)^2} = \frac{-b(C_0 + I_0 - bT_0)}{(1 - b + bt)^2}$$

وباستخدام (*13.13*) والاختصار .

$$\frac{\partial Y_e}{\partial t} = \frac{-bY_e}{(1 - b + bt)}$$

ومن أجل حساب $\frac{\partial Y_e}{\partial b}$ ، المضاعف لتغير ما فى الميل الحدى للاستهلاك MPC . انظر المسائل 13.25 و 13.26 .

13.8 أمثلية الدوال متعددة المتغيرات فى الإدارة والاقتصاد

Optimizing Multivariable Functions In Business And Economics

فى نظام المنافسة الاحتكارية حيث يسيطر المنتجون على الأسعار فإن الشركات عادة تصنع أكثر من خط واحد من نفس المنتج : أسماء ماركات منوعة لمعجون الأسنان والصابون وعطور الجسم ، خطوط متنوعة لأدوات زينة المرأة ونوعيات مختلفة من الأجهزة السمعية والإلكترونية وعند إيجاد الأسعار فإن المؤسسة الاحتكارية يجب أن تفرض ثمنًا لمنتجين اثنين من أجل أن تعظم أرباحها الكلية عندما يكون الطلب على منتجاتها معطى بالآتى :

$$P_1 = 105 - 3Q_1 \tag{13.14}$$

$$P_2 = 86 - 2Q_2 \tag{13.15}$$

وأن دالة التكلفة الكلية هى :

$$\text{TC} = 2Q_1^2 + 4Q_1Q_2 + Q_2^2$$

نوجد أولاً دالة الأرباح الكلية $\pi = \text{TR} - \text{TC}$ حيث $\text{TR} = P_1Q_1 + P_2Q_2$. ومن ثم نعوض بالمعلومات المعطاة ونتذكر أن نطرح كل حد فى دالة التكلفة الكلية .

$$\pi = (105 - 3Q_1)Q_1 + (86 - 2Q_2)Q_2 - (2Q_1^2 + 4Q_1Q_2 + Q_2^2)$$
$$\pi = 105Q_1 - 5Q_1^2 + 86Q_2 - 3Q_2^2 - 4Q_1Q_2$$

ثم نقوم بتعظيم الدالة .

$$\pi_1 = \frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 105 - 10Q_1 - 4Q_2 = 0$$
$$\pi_2 = \frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 86 - 4Q_1 - 6Q_2 = 0$$

ونحل المعادلات آنيًا لإيجاد القيم الحرجة .

$$\overline{Q}_1 = 6.5 \qquad \overline{Q}_2 = 10$$

ثم تحقق من شروط الرتبة الثانية .

$$\pi_{11} = -10 \qquad \pi_{22} = -6 \qquad \pi_{12} = -4 = \pi_{21}$$

وحيث إن المشتقتين الجزئيتين من الرتبة الثانية كلتاهما سالبتين وأن $\pi_{11}\pi_{22} > (\pi_{12})^2$ فإن الدالة تعظم عند القيمة الحرجة .

وأخيرًا نعوض بقيم $\overline{Q}_1 = 6.5$ و $\overline{Q}_2 = 10$ (13.14) و (13.15) على التوالى لإيجاد الأسعار التى تعظم الأرباح .

$$\overline{P}_1 = 105 - 3(6.5) = 85.5$$
$$\overline{P}_2 = 86 - 2(10) = 66$$

$$\pi = 105(6.5) - 5(6.5)^2 + 86(10) - 3(10)^2 - 4(6.5)(10) = 771.25$$

انظر المسائل 13.27 إلى 13.32 .

13.9 الأمثلية المقيدة للدوال الاقتصادية متعددة المتغيرات

Constrained Optimization of Multivariable Economic Functions

يحتاج الأفراد فى الإدارة والاقتصاد إلى تعظيم أو تدنية الدوال تحت قيود معينة فأحياناً يرغبون فى تعظيم المنفعة الخاضعة لقيد الميزانية ، وأحياناً أخرى فإنهم ينادون بتدنية التكاليف الخاضعة لبعض المتطلبات الدنيا من الناتج مثل حصة الإنتاج . افترض أن مؤسسة ما تعهدت بمنهج هبة مكونة من سلعتين x و y بقيمة سوقية إجمالية قدرها 140 دولاراً . وإذا أعطيت $P_x = 2$ و $P_y = 3$ فالمطلوب تدنية تكلفة التعهد فى ظل القيد عندما تكون التكلفة غير مقيدة .

$$c = 18x^2 - 6xy + 20.5y^2$$

نكون دالة لاجرانج المندمجة بالقيد $2x + 3y = 140$.

$$C = 18x^2 - 6xy + 20.5y^2 + \lambda(140 - 2x - 3y)$$

وبأخذ المشتقة الجزئية بالنسبة للمتغيرات الثلاثة وحل المعادلات آنيًا لإيجاد القيم الحرجة نجد .

$$C_x = 36x - 6y - 2\lambda = 0 \qquad (13.16)$$

$$C_y = -6x + 41y - 3\lambda = 0 \qquad (13.17)$$

$$C_\lambda = 140 - 2x - 3y = 0 \qquad (13.18)$$

وبطرح 1.5 ضرب (13.16) من (13.17) لحذف λ .

$$-60x + 50y = 0 \qquad y = 1.2x$$

وبالتعويض فى (13.18) :

$$140 - 2x - 3(1.2x) = 0 \qquad x_0 = 25$$

وبالتعويض المتعاقب نجد أن : $\lambda_0 = 360$ ، $y_0 = 30$. انظر أيضًا المسائل من 13.33 إلى 13.38 .

13.10 الأمثلية المقيدة لدوال كوب ـ دوجلاس للإنتاج

Constrained Optimization of Cobb - Douglas Production Functions

الدالة التى تستخدم على نطاق واسع فى التحليل الاقتصادى لخواصها المفضلة هى دالة إنتاج كوب ـ دوجلاس وتأخذ هذه الصيغة .

$$q = AK^\alpha L^\beta \qquad (A > 0; \quad 0 < \alpha, \beta < 1)$$

حيث تمثل q كمية الناتج بالوحدات المادية و k كمية رأس المال و L كمية العمل . و α تمثل مرونة الناتج بالنسبة لرأس المال وتقيس التغير النسبى فى q عندما تتغير K بنسبة 1% بينما تظل L ثابتة ، و β تمثل مرونة الناتج بالنسبة للعمل وتقيس التغير النسبى فى q عندما تتغير L بنسبة 1% بينما تظل K ثابتة . و A تمثل معامل الكفاءة وتعكس مستوى التقدم التقنى . فإذا كانت $\alpha + \beta = 1$ فإن دالة كوب ـ دوجلاس تظهر مقياس ثبات الغلة . وتكتب عادة كالآتى :

$$q = AK^\alpha L^{1-\alpha} \quad (0 < \alpha < 1) .$$

إن دالة كوب ـ دوجلاس العامة حيث $\alpha+\beta \neq 1$ يخضع الإنتاج لمقياس تزايد الغلة إذا كانت $\alpha+\beta > 0$ ويخضع الإنتاج لمقياس تناقص الغلة إذا كانت $\alpha+\beta < 1$.

إذا أعطيت مؤسسة تعمل فى ظل ثبات الغلة ودالة إنتاج كوب دوجلاس لهذه المؤسسة هى :

$$q = 3K^{0.2}L^{0.8}$$

ومعالم الميزانية هى :

$$P_K = 9 \qquad P_L = 4 \qquad B = 450$$

ومن ثم فإن دالة لاجرانج التى يجب أن تعظم هى :

$$Q = 3K^{0.2}L^{0.8} + \lambda(450 - 9K - 4L)$$

وبأخذ المشتقات الجزئية للتعظيم .

$$Q_K = 0.6K^{-0.8}L^{0.8} - 9\lambda = 0 \qquad (13.19)$$

$$Q_L = 2.4K^{0.2}L^{-0.2} - 4\lambda = 0 \qquad (13.20)$$

$$Q_\lambda = 450 - 9K - 4L = 0 \qquad (13.21)$$

وبإعادة الترتيب وقسمة *(13.19)* على *(13.20)*

$$\frac{0.6K^{-0.8}L^{0.8}}{2.4K^{0.2}L^{-0.2}} = \frac{9\lambda}{4\lambda}$$

ونتذكر أنه عند القسمة نطرح الأسس .

$$0.25K^{-1}L^{1} = 2.25$$

$$\frac{L}{K} = 9 \qquad L = 9K$$

وبالتعويض $L = 9K$ فى *(13.21)* .

$$450 - 9K - 4(9K) = 0 \qquad K_0 = 10$$

وأخيرًا بالتعويض عن $K_0 = 10$ فى *(13.21)* .

$$L_0 = 90$$

انظر المسائل 13.39 إلى 13.42 .

13.11 قواعد الدوال الضمنية والعكسية Implicit and Inverse Function Rules

وكما ناقشنا فى القسم 4.9 فالدوال فى الصيغة $y = f(x)$ تعنى أن y معبر عنها صراحة بدلالة x وهذه الدوال تسمى بالدوال الصريحة . أما الدوال فى الصيغة $f(x, y) = 0$ فتعنى أن y غير معبر عنها صراحة بدلالة x وهذه الدوال تسمى بالدوال الضمنية . وبمساعدة قواعد الدالة الضمنية فيمكن أن نجد المشتقة dy/dx للدالة الضمنية دون أن نوجد y أولاً بدلالة x . فقاعدة الدالة الضمنية حددت أنه إذا وجدت الدالة الضمنية $f(x, y)$ وكانت $f_y \neq 0$ عند نقطة التى تعرف عندها الدالة الضمنية فإن :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} \qquad (13.22)$$

إذا أعطيت الدالة $y=f(x)$ فإن الدالة المعكوسة $x=f^{-1}(y)$ تنشأ إذا أنتجت كل قيمة لـ y قيمة واحدة فقط لـx . وبافتراض أن الدالة المعكوسة موجودة لأن أغلب الدوال الاقتصادية لها دوال معكوسة فإن قاعدة الدالة المعكوسة تحدد أن مشتقة الدالة المعكوسة هو مقلوب مشتقة الدالة الأصلية . ولهذا إذا كانت $Q = f(P)$ هى الدالة الأصلية فإن مشتقة الدالة الأصلية هى dQ/dP ومشتقة الدالة المعكوسة $[P=f^{-1}(Q)]$ هى dp/dQ وأن

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{dQ/dP} \qquad \frac{dQ}{dP} \neq 0 \qquad (13.23)$$

انظر الأمثلة 14 و 15 والمسائل 13.43 و 13.44 .

مثال 14 : أوجد المشتقة dy/dx لكل من الدوال الضمنية التالية :

EXAMPLE 14. Find the derivative dy/dx for each of the following implicit functions:

(a)

$$9x^2 - y = 0$$

ومن (13.22)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

وهنا $f_x = 18x$ و $f_y = -1$ وبالتعويض أعلاه .

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{18x}{(-1)} = 18x$$

ولقد بقيت الدالة مبسطة ولهذا فيمكن من السهل التحقق من الحل من خلال إيجاد y بدلالة x ومن ثم أخذ المشتقة مباشرة وطالما أن $y = 9x^2$ فإن $dy/dx = 18x$.

(b)

$$5x^4 - 3y^5 - 49 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{20x^3}{-15y^4} = \frac{4x^3}{3y^4}$$

لاحظ أن المشتقة dy/dx هى دائمًا سالب مقلوب المشتقة المقابلة $-f_x/f_y$.

مثال 15 : أوجد مشتقة المعكوس لكل من الدوال التالية :

EXAMPLE 15. Find the derivative for the inverse of each of the following functions:

(a)

$$Q = 94 - 3P$$

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{dQ/dP}$$

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

(b)

$$Q = 14 + 4P^3$$

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{dQ/dP} = \frac{1}{12P^2} \qquad (P \neq 0)$$

مسائل محلولة

First-Order Partial derivatives المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى

13.1. أوجد المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى لكل من الدوال الآتية :

13.1. Find the first-order partial derivatives for each of the following functions.

(*a*) $z = 7x^2 - 13xy + 5y^2$

$$z_x = 14x - 13y$$
$$z_y = -13x + 10y$$

(*b*) $z = 5x^4 + 3x^2y^5 - 9y^3$

$$z_x = 20x^3 + 6xy^5$$
$$z_y = 15x^2y^4 - 27y^2$$

(*c*) $z = 8w^3 + 6wx + 4x^2 - 9xy - 5y^2$

$$z_w = 24w^2 + 6x$$
$$z_x = 6w + 8x - 9y$$
$$z_y = -9x - 10y$$

(*d*) $z = 3w^4 + 7wxy - 4x^2 + y^3$

$$z_w = 12w^3 + 7xy$$
$$z_x = 7wy - 8x$$
$$z_y = 7wx + 3y^2$$

13.2. استخدم قاعدة الضرب من المعادلة (*13.2*) لإيجاد المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى لكل من الدوال التالية :

13.2. Use the product rule from equation (*13.2*) to find the first-order partial derivatives for each of the following functions:

(*a*) $z = (8x + 15y)(12x - 7y)$

$$z_x = (8x + 15y)(12) + (12x - 7y)(8)$$
$$z_x = 96x + 180y + 96x - 56y$$
$$z_x = 192x + 124y$$

$$z_y = (8x + 15y)(-7) + (12x - 7y)(15)$$
$$z_y = -56x - 105y + 180x - 105y$$
$$z_y = 124x - 210y$$

(*b*) $z = (4x^2 - 5y)(3x + 2y^3)$

$$z_x = (4x^2 - 5y)(3) + (3x + 2y^3)(8x)$$
$$z_x = 12x^2 - 15y + 24x^2 + 16xy^3$$
$$z_x = 36x^2 - 15y + 16xy^3$$

$$z_y = (4x^2 - 5y)(6y^2) + (3x + 2y^3)(-5)$$
$$z_y = 24x^2y^2 - 30y^3 - 15x - 10y^3$$
$$z_y = 24x^2y^2 - 15x - 40y^3$$

(*c*) $z = (5w - 3x + 8y)(7w^2 + 9x^4 - 2y^5)$

$$z_w = (5w - 3x + 8y)(14w) + (7w^2 + 9x^4 - 2y^5)(5)$$
$$z_w = 105w^2 - 42wx + 112wy + 45x^4 - 10y^5$$
$$z_x = (5w - 3x + 8y)(36x^3) + (7w^2 + 9x^4 - 2y^5)(-3)$$
$$z_x = 180wx^3 - 135x^4 + 288x^3y - 21w^2 + 6y^5$$
$$z_y = (5w - 3x + 8y)(-10y^4) + (7w^2 + 9x^4 - 2y^5)(8)$$
$$z_y = -50wy^4 + 30xy^4 - 96y^5 + 56w^2 + 72x^4$$

13.3. استخدم قاعدة خارج القسمة من المعادلة (*13.3*) لإيجاد مشتقات الرتبة الأولى لكل من الدوال التالية :

13.3. Use the quotient rule from equation (*13.3*) to find the first-order partials of each of the following functions:

(*a*)

$$z = \frac{14x}{9x - 4y}$$

$$z_x = \frac{(9x-4y)(14) - (14x)(9)}{(9x-4y)^2} = \frac{-56y}{(9x-4y)^2}$$

$$z_y = \frac{(9x-4y)(0) - (14x)(-4)}{(9x-4y)^2} = \frac{56x}{(9x-4y)^2}$$

(*b*)

$$z = \frac{4x^2 + 3y^3}{5x - 2y}$$

$$z_x = \frac{(5x-2y)(8x) - (4x^2+3y^3)(5)}{(5x-2y)^2} = \frac{20x^2 - 16xy - 15y^3}{(5x-2y)^2}$$

$$z_y = \frac{(5x-2y)(9y^2) - (4x^2+3y^3)(-2)}{(5x-2y)^2} = \frac{45xy^2 - 12y^3 + 8x^2}{(5x-2y)^2}$$

(*c*)

$$z = \frac{4w + 9x - 2y}{7w - 2x + 3y}$$

$$z_w = \frac{(7w-2x+3y)(4) - (4w+9x-2y)(7)}{(7w-2x+3y)^2} = \frac{-71x + 26y}{(7w-2x+3y)^2}$$

$$z_x = \frac{(7w-2x+3y)(9) - (4w+9x-2y)(-2)}{(7w-2x+3y)^2} = \frac{71w + 23y}{(7w-2x+3y)^2}$$

$$z_y = \frac{(7w-2x+3y)(-2) - (4w+9x-2y)(3)}{(7w-2x+3y)^2} = \frac{-26w - 23x}{(7w-2x+3y)^2}$$

13.4. أوجد المشتقة الجزئية من الرتبة الأولى لكل من الدوال التالية باستخدام قاعدة دالة القوى العامة من المعادلة (*13.4*) .

13.4. Find the first-order partial derivatives for each of the following functions by using the generalized power function rule from Equation (*13.4*):

(*a*)

$$z = (6x - 7y)^3$$

$$z_x = 3(6x-7y)^2(6) = 18(6x-7y)^2$$

$$z_y = 3(6x-7y)^2(-7) = -21(6x-7y)^2$$

(*b*)

$$z = (2x^4 + 9y^2)^5$$

$$z_x = 5(2x^4+9y^2)^4(8x^3) = 40x^3(2x^4+9y^2)^4$$

$$z_y = 5(2x^4+9y^2)^4(18y) = 90y(2x^4+9y^2)^4$$

(*c*)

$$z = (4w^3 - 7x^5 + 8y^2)^4$$

$$z_w = 4(4w^3-7x^5+8y^2)^3(12w^2) = 48w^2(4w^3-7x^5+8y^2)^3$$

$$z_x = 4(4w^3-7x^5+8y^2)^3(-35x^4) = -140x^4(4w^3-7x^5+8y^2)^3$$

$$z_y = 4(4w^3-7x^5+8y^2)^3(16y) = 64y(4w^3-7x^5+8y^2)^3$$

13.5. أوجد المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للدوال الأسية الطبيعية التالية باستخدام المعادلة (*13.5*) .

13.5. Find the first-order partial derivatives for the following natural exponential functions, using Equation (*13.5*).

(*a*)

$$z = 9e^{4xy}$$

$$z_x = 9e^{4xy} \cdot 4y = 36ye^{4xy} \qquad z_y = 9e^{4xy} \cdot 4x = 36xe^{4xy}$$

(b)
$$z = e^{(2x+7y)}$$
$$z_x = e^{(2x+7y)} \cdot 2 = 2e^{(2x+7y)} \qquad z_y = e^{(2x+7y)} \cdot 7 = 7e^{(2x+7y)}$$

(c)
$$z = 25e^{(5w-8x+3y)}$$
$$z_w = 25e^{(5w-8x+3y)} \cdot 5 = 125e^{(5w-8x+3y)}$$
$$z_x = 25e^{(5w-8x+3y)} \cdot (-8) = -200e^{(5w-8x+3y)}$$
$$z_y = 25e^{(5w-8x+3y)} \cdot 3 = 75e^{(5w-8x+3y)}$$

13.6. استخدم المعادلة (13.6) لإيجاد المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للدوال اللوغاريتمية الطبيعية التالية :

13.6. Use Equation (*13.6*) to find the first-order partial derivatives for the following natural logarithmic functions:

(a)
$$z = \ln|4x + 9y|$$
$$z_x = \frac{1}{4x+9y} \cdot 4 = \frac{4}{4x+9y}$$
$$z_y = \frac{1}{4x+9y} \cdot 9 = \frac{9}{4x+9y}$$

(b)
$$z = \ln|x^3 + y^2|$$
$$z_x = \frac{1}{x^3+y^2} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{x^3+y^2}$$
$$z_y = \frac{1}{x^3+y^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^3+y^2}$$

(c)
$$z = \ln|w^4x^5y^3|$$
$$z_w = \frac{1}{w^4x^5y^3} \cdot 4w^3x^5y^3 = \frac{4}{w} \qquad z_x = \frac{1}{w^4x^5y^3} \cdot 5w^4x^4y^3 = \frac{5}{x}$$
$$z_y = \frac{1}{w^4x^5y^3} \cdot 3w^4x^5y^2 = \frac{3}{y}$$

13.7. استخدم أى توليفة من القواعد تعتبر ضرورية لإيجاد المشتقات الجزئية من الرتبة لأولى لكل من الدوال التالية :

13.7. Use whatever combination of rules is necessary to find the first-order partials for each of the following functions:

(a)
$$z = \frac{(8x+15y)^4}{3x+7y}$$

باستخدام قاعدة خارج القسمة وقاعدة دالة القوى العامة

$$z_x = \frac{(3x+7y)\left[4(8x+15y)^3(8)\right] - (8x+15y)^4(3)}{(3x+7y)^2} = \frac{(96x+224y)(8x+15y)^3 - 3(8x+15y)^4}{(3x+7y)^2}$$
$$z_y = \frac{(3x+7y)\left[4(8x+15y)^3(15)\right] - (8x+15y)^4(7)}{(3x+7y)^2} = \frac{(180x+420y)(8x+15y)^3 - 7(8x+15y)^4}{(3x+7y)^2}$$

(b)
$$z = \frac{(9x+4y)(3x-8y)}{5x-2y}$$

باستخدام قاعدة خارج القسم وقاعدة الضرب

$$z_x = \frac{(5x-2y)\,[(9x+4y)(3)+(3x-8y)(9)]-(9x+4y)(3x-8y)(5)}{(5x-2y)^2}$$

$$z_x = \frac{(5x-2y)(27x+12y+27x-72y)-(9x+4y)(15x-40y)}{(5x-2y)^2}$$

$$z_x = \frac{135x^2-108xy+280y^2}{(5x-2y)^2}$$

$$z_y = \frac{(5x-2y)\,[(9x+4y)(-8)+(3x-8y)(4)]-(9x+4y)(3x-8y)(-2)}{(5x-2y)^2}$$

$$z_y = \frac{(5x-2y)(-72x-32y+12x-32y)-(9x+4y)(-6x+16y)}{(5x-2y)^2}$$

$$z_y = \frac{-246x^2-320xy+64y^2}{(5x-2y)^2}$$

(*c*) $$z = (3x-5y)^3(6x+7y)$$

باستخدام قاعدة الضرب وقاعدة دالة القوى العامة

$$z_x = (3x-5y)^3(6)+(6x+7y)\left[3(3x-5y)^2(3)\right] = 6(3x-5y)^3+(54x+63y)(3x-5y)^2$$

$$z_y = (3x-5y)^3(7)+(6x+7y)\left[3(3x-5y)^2(-5)\right] = 7(3x-5y)^3-(90x+105y)(3x-5y)^2$$

(*d*) $$z = \left(\frac{2x+9y}{5x+4y}\right)^2$$

باستخدام قاعدة دالة القوى العامة وقاعدة خارج القسمة

$$z_x = 2\left(\frac{2x+9y}{5x+4y}\right)\left[\frac{(5x+4y)(2)-(2x+9y)(5)}{(5x+4y)^2}\right] = \frac{4x+18y}{5x+4y}\left[\frac{-37y}{(5x+4y)^2}\right]$$

$$z_x = \frac{-(148xy+666y^2)}{(5x+4y)^3}$$

$$z_y = 2\left(\frac{2x+9y}{5x+4y}\right)\left[\frac{(5x+4y)(9)-(2x+9y)(4)}{(5x+4y)^2}\right] = \frac{4x+18y}{5x+4y}\left[\frac{37x}{(5x+4y)^2}\right]$$

$$z_y = \frac{666xy+148x^2}{(5x+4y)^3}$$

13.8. استخدم أى توليفة من القواعد تعتبر ضرورية لإيجاد المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى لكل من الدوال اللوغاريتمية الطبيعية التالية :

13.8. Redo Problem 13.7 for the following natural exponential and logarithmic functions:

(*a*) $$z = 7x^3e^{5xy}$$

باستخدام قاعدة الضرب وقاعدة الدالة الأسية الطبيعية

$$z_x = 7x^3\cdot 5ye^{5xy}+e^{5xy}\cdot 21x^2 \qquad z_y = 7x^3\cdot 5xe^{5xy}+e^{5xy}\cdot 0$$

$$z_x = 7x^2e^{5xy}(5xy+3) \qquad z_y = 35x^4e^{5xy}$$

(*b*) $$z = \ln|3x+8y|\cdot e^{2xy}$$

باستخدام قاعدة الضرب وقواعد الدالة الأسية واللوغاريتمية

$$z_x = \ln|3x+8y| \cdot 2ye^{2xy} + e^{2xy}\left[\frac{1}{3x+8y} \cdot 3\right] = e^{2xy}\left[2y(\ln|3x+8y|) + \frac{3}{3x+8y}\right]$$

$$z_y = \ln|3x+8y| \cdot 2xe^{2xy} + e^{2xy}\left(\frac{1}{3x+8y} \cdot 8\right) = e^{2xy}\left[2x(\ln|3x+8y|) + \frac{8}{3x+8y}\right]$$

(*c*)

$$z = \frac{6xy}{e^{5x+2}}$$

باستخدام قاعدة خارج القسمة وقاعدة الدالة الأسية الطبيعية

$$z_x = \frac{e^{5x+2}(6y) - 6xy(5e^{5x+2})}{(e^{5x+2})^2} \qquad z_y = \frac{e^{5x+2}(6x) - 6xy(0)}{(e^{5x+2})^2}$$

$$z_x = \frac{6ye^{5x+2}(1-5x)}{(e^{5x+2})^2} \qquad z_y = \frac{6xe^{5x+2}}{(e^{5x+2})^2}$$

$$z_x = \frac{6y(1-5x)}{e^{5x+2}} \qquad z_y = \frac{6x}{e^{5x+2}}$$

(*d*)

$$z = 6xye^{-(5x+2)}$$

هذه هى نفس الدالة كما فى (c) . باستخدام قاعدة الضرب وقاعدة الدالة الأسية الطبيعية

$$z_x = 6xy\left(-5e^{-(5x+2)}\right) + e^{-(5x+2)}(6y) \qquad z_y = 6xy(0) + e^{-(5x+2)}(6x)$$

$$z_x = 6ye^{-(5x+2)}(-5x+1) \qquad z_y = 6xe^{-(5x+2)}$$

$$z_x = \frac{6y(1-5x)}{e^{5x+2}} \qquad z_y = \frac{6x}{e^{5x+2}}$$

المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية Second-Order Partial derivatives

13.9. أوجد المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية z_{xx} و z_{yy} لكل من الدوال التالية :

13.9. Find the second-order direct partial derivatives z_{xx} and z_{yy} for each of the following functions:

(*a*)

$$z = 6x^4 - 17xy + 4y^5$$

$$z_x = 24x^3 - 17y \qquad z_y = -17x + 20y^4$$

$$z_{xx} = 72x^2 \qquad z_{yy} = 80y^3$$

(*b*)

$$z = 7x^6 - 2x^3y^2 + 9xy^4 - 13y^5$$

$$z_x = 42x^5 - 6x^2y^2 + 9y^4 \qquad z_y = -4x^3y + 36xy^3 - 65y^4$$

$$z_{xx} = 210x^4 - 12xy^2 \qquad z_{yy} = -4x^3 + 108xy^2 - 260y^3$$

(*c*)

$$z = 5w^3x^6y^4$$

$$z_w = 15w^2x^6y^4 \qquad z_x = 30w^3x^5y^4 \qquad z_y = 20w^3x^6y^3$$

$$z_{ww} = 30wx^6y^4 \qquad z_{xx} = 150w^3x^4y^4 \qquad z_{yy} = 60w^3x^6y^2$$

(*d*)

$$z = (4x - 7y)^3$$

$$z_x = 3(4x-7y)^2(4) \qquad z_y = 3(4x-7y)^2(-7)$$

$$= 12(4x-7y)^2 \qquad = -21(4x-7y)^2$$

$$z_{xx} = 24(4x - 7y)(4) \qquad z_{yy} = -42(4x - 7y)(-7)$$

$$= 96(4x - 7y) \qquad = 294(4x - 7y)$$

13.10. أوجد المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية لدوال كوب ـ دوجلاس التالية :

13.10. Find the second-order direct partial derivatives z_{xx} and z_{yy} for each of the following Cobb-Douglas functions:

(*a*)

$$z = x^{0.1}y^{0.9}$$

$$z_x = 0.1x^{-0.9}y^{0.9} \qquad z_y = 0.9x^{0.1}y^{-0.1}$$

$$z_{xx} = -0.09x^{-1.9}y^{0.9} \qquad z_{yy} = -0.09x^{0.1}y^{-1.1}$$

(*b*)

$$z = 2x^{0.6}y^{0.3}$$

$$z_x = 1.2x^{-0.4}y^{0.3} \qquad z_y = 0.6x^{0.6}y^{-0.7}$$

$$z_{xx} = -0.48x^{-1.4}y^{0.3} \qquad z_{yy} = -0.42x^{0.6}y^{-1.7}$$

(*c*)

$$z = 3x^{0.4}y^{0.5}$$

$$z_x = 1.2x^{-0.6}y^{0.5} \qquad z_y = 1.5x^{0.4}y^{-0.5}$$

$$z_{xx} = -0.72x^{-1.6}y^{0.5} \qquad z_{yy} = -0.75x^{0.4}y^{-1.5}$$

13.11. أوجد المشتقات الجزئية التقاطعية z_{xy} و z_{yx} لكل من الدوال التالية :

13.11. Find the cross partial derivatives z_{xy} and z_{yx} for each of the following functions:

(*a*)

$$z = 7x^4 - 15xy + 2y^5$$

$$z_x = 28x^3 - 15y \qquad z_y = -15x + 10y^4$$

$$z_{xy} = -15 \qquad z_{yx} = -15$$

(*b*)

$$z = 8x^3 - 11x^6y^4 - 6y^2$$

$$z_x = 24x^2 - 66x^5y^4 \qquad z_y = -44x^6y^3 - 12y$$

$$z_{xy} = -264x^5y^3 \qquad z_{yx} = -264x^5y^3$$

(*c*)

$$z = 10(9x - 4y)^5$$

$$z_x = 50(9x - 4y)^4(9) \qquad z_y = 50(9x - 4y)^4(-4)$$

$$z_x = 450(9x - 4y)^4 \qquad z_y = -200(9x - 4y)^4$$

$$z_{xy} = 1800(9x - 4y)^3(-4) \qquad z_{yx} = -800(9x - 4y)^3(9)$$

$$z_{xy} = -7200(9x - 4y)^3 \qquad z_{yx} = -7200(9x - 4y)^3$$

(*d*)

$$z = w^3x^{-5}y^4$$

$$z_w = 3w^2x^{-5}y^4 \qquad z_x = -5w^3x^{-6}y^4 \qquad z_y = 4w^3x^{-5}y^3$$

$$z_{wx} = -15w^2x^{-6}y^4 \qquad z_{xw} = -15w^2x^{-6}y^4 \qquad z_{yw} = 12w^2x^{-5}y^3$$

$$z_{wy} = 12w^2x^{-5}y^3 \qquad z_{xy} = -20w^3x^{-6}y^3 \qquad z_{yx} = -20w^3x^{-6}y^3$$

ولاحظ من خلال نظرية يونج أن $z_{xy} = z_{yx}$ فى الأجزاء من (*a*) إلى (*b*) وفى الجزء (*d*) $z_{wx} = z_{xw}$ و $z_{wy} = z_{yw}$
و $z_{xy} = z_{yx}$.

13.12. أوجد المشتقات الجزئية التقاطعية لكل من دوال كوب - دوجلاس التالية :

13.12. Find the cross partial derivatives for each of the following Cobb-Douglas functions.

(*a*)
$$z = 1.25x^{0.4}y^{0.6}$$
$$z_x = 0.5x^{-0.6}y^{0.6} \qquad z_y = 0.75x^{0.4}y^{-0.4}$$
$$z_{xy} = 0.3x^{-0.6}y^{-0.4} \qquad z_{yx} = 0.3x^{-0.6}y^{-0.4}$$

(*b*)
$$z = 1.4x^{0.2}y^{0.7}$$
$$z_x = 0.28x^{-0.8}y^{0.7} \qquad z_y = 0.98x^{0.2}y^{-0.3}$$
$$z_{xy} = 0.196x^{-0.8}y^{-0.3} \qquad z_{yx} = 0.196x^{-0.8}y^{-0.3}$$

(*c*)
$$Q = 2.5K^{0.3}L^{0.9}$$
$$Q_K = 0.75K^{-0.7}L^{0.9} \qquad Q_L = 2.25K^{0.3}L^{-0.1}$$
$$Q_{KL} = 0.675K^{-0.7}L^{-0.1} \qquad Q_{LK} = 0.675K^{-0.7}L^{-0.1}$$

أمثلية الدوال متعددة المتغيرات Optimization Multivariable Functions

13.13. للدالة التربيعية التالية : (1) أوجد النقاط الحرجة التى تكون عندها الدالة فى وضع أمثل و (2) حدد ما إذا كانت الدالة عند هذه النقاط عند نهاية نسبية عظمى أو نهاية نسبية صغرى أو نقطة تحول أو نقطة سراج .

13.13. For the following quadratic function, (1) find the critical points where the function may be at an optimum and (2) determine whether at these points the function is at a relative maximum, relative minimum, inflection point, or saddle point.

$$z = 5x^2 - 8x - 2xy - 6y + 4y^2 + 27 \qquad (13.24)$$

(1) بأخذ المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى ومساواتهم بالصفر وحل المعادلات آنيًا باستخدام الطرق من القسم 13.5 .

$$z_x = 10x - 8 - 2y = 0 \qquad (13.25)$$
$$z_y = -2x - 6 + 8y = 0 \qquad (13.26)$$
$$x = 1 \qquad y = 1 \qquad (1, 1)$$

(2) بأخذ المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية من (13.25) و (13.26) وإيجاد تقديرهم عند النقطة الحرجة ثم نتحقق من الإشارات .

$$z_{xx} = 10 \qquad z_{yy} = 8$$
$$z_{xx}(1, 1) = 10 > 0 \qquad z_{yy}(1, 1) = 8 > 0$$

المشتقتان الجزئيتان من الرتبة الثانية كلتاهما موجبتين ولذلك فإن الدالة من المحتمل أن تكون عند نهاية نسبية صغرى . ونأخذ المشتقة الجزئية التقاطعية من (13.25) أو (13.26) .

$$z_{xy} = -2 = z_{yx}$$

نقدرها عند النقطة الحرجة

$$z_{xy}(1, 1) = -2 = z_{yx}(1, 1)$$

نختبر الشرط الثالث لنتأكد من أن $z_{xx} \cdot z_{yy} > (z_{xy})^2$ وهنا نجد

$$10 \cdot 8 > (-2)^2$$

وحيث إن $z_{yy} > 0$ و z_{xx} وإن $z_{xx} \cdot z_{yy} > (z_{xy})^2$ فإن الدالة بالفعل عند نهاية نسبية صغرى عند النقطة (1, 1) . وفى (*13.24*) نجد أن $z = 20$.

13.14. Redo Problem 13.13, given

13.14. بالرجوع إلى المطلوب فى المسألة 13.13. إذا أعطيت :

$$f(x, y) = -7x^2 + 88x - 6xy + 42y - 2y^2 + 4$$

(1) بأخذ المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى ثم مساواتها بالصفر ثم حلها آنيًا .

$$f_x = -14x + 88 - 6y = 0 \tag{13.27}$$

$$f_y = -6x + 42 - 4y = 0 \tag{13.28}$$

$$x = 5 \qquad y = 3 \qquad (5, 3)$$

النقطة الحرجة هى (5, 3) .

(2) بأخذ المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية وإيجاد قيمتها عند النقطة الحرجة والتحقق من الإشارات .

$$f_{xx} = -14 \qquad\qquad f_{yy} = -4$$

$$f_{xx}(5, 3) = -14 < 0 \qquad\qquad f_{yy}(5, 3) = -4 < 0$$

وبأخذ المشتقات الجزئية التقاطعية (*13.27*) أو (*13.28*) وإيجاد قيمتها عند النقطة الحرجة .

$$f_{xy} = -6 = f_{yx}$$

$$f_{xy}(5, 3) = -6 = f_{yx}(5, 3)$$

ومن ثم نتحقق من الشرط الثالث $f_{xx} f_{yy} > (f_{xy})^2$ وهنا نجد أن :

$$(-14) \cdot (-4) > (-6)^2$$

وحيث إن $f_{xx} f_{yy} > 0$ وإن $f_{xx} f_{yy} > (f_{xy})^2$ فإننا متأكدين بأن الدالة عند نهاية عظمى عند (5, 3) .

13.15. Redo Problem 13.13, given

13.15. بالرجوع إلى المطلوب فى المسألة 13.13. إذا أعطيت :

$$z = 4x^2 + 128x - 12xy + 96y + 3y^2 + 17$$

(1)

$$z_x = 8x + 128 - 12y = 0$$

$$z_y = -12x + 96 + 6y = 0$$

$$x = 20 \qquad y = 24 \qquad (20, 24)$$ النقطة الحرجة

هى (20, 24) .

(2) اختبر المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية عند النقطة الحرجة .

$$z_{xx} = 8 \qquad\qquad z_{yy} = 6$$

$$z_{xx}(20, 24) = 8 > 0 \qquad z_{yy}(20, 24) = 6 > 0$$

ومع $z_{xx} > 0$ و $z_{yy} > 0$ عند النقطة الحرجة فإن الدالة ربما تكون عند نهاية نسبية صغرى . ونتحقق من المشتقات التقاطعية .

$$z_{xy} = -12 = z_{yx}$$

$$z_{xy}(20, 24) = -12 = z_{yx}(20, 24)$$

نختبر الشرط الثالث .

$$8 \cdot 6 \not> (-12)^2$$

وحيث إن z_{xx} و z_{yy} لهما نفس الإشارة وأن $z_{xx} \cdot z_{yy} < (z_{xy})^2$ فإن الدالة بالفعل عند نقطة تحول عند (20, 24) .

13.16. بالرجوع إلى المطلوب فى المسألة 13.13. إذا أعطيت :

13.16. Redo Problem 13.13, given

$$f(x, y) = 6x^2 - 108x + 4xy + 12y - 2y^2 - 19$$

(1)

$$f_x = 12x - 108 + 4y = 0$$

$$f_y = 4x + 12 - 4y = 0$$

$$x = 6 \qquad y = 9$$

النقطة الحرجة هى (6, 9)

(2)

$$f_{xx} = 12 \qquad f_{yy} = -4$$

$$f_{xx}(6, 9) = 12 > 0 \qquad f_{yy}(6, 9) = -4 < 0$$

وبأخذ المشتقات التقاطعية

$$f_{xy} = 4 = f_{yx}$$

$$f_{xy}(6, 9) = 4 = f_{yx}(6, 9)$$

وباختبار الشرط الثالث .

$$(12) \cdot (-4) \neq (4)^2$$

وحيث إن f_{xx} و f_{yy} لها إشارات مختلفة وأن $f_{xx} f_{yy} < (f_{xy})^2$ فإن الدالة تكون عند نقطة سراج . وطالما أن f_{xx} و f_{yy} لها إشارات مختلفة فإن $f_{xx} \cdot f_{yy}$ لا يمكن أن تكون أكبر من $(f_{xy})^2$ ومن ثم فإن الدالة ستكون عند نقطة سراج .

13.17. إذا أعطيت الدالة التكعيبية التالية : (1) أوجد النقاط الحرجة و (2) حدد ما إذا كانت الدالة عند هذه النقاط نهاية نسبية عظمى أو نهاية نسبية صغرى أو نقطة تحول أو نقطة سراج .

13.17. Given the following cubic function, (1) find the critical points and (2) determine whether at these points the function is at a relative maximum, relative minimum, inflection point, or saddle point.

$$z(x, y) = 2y^3 - 15x^2 + 60x - 384y + 95$$

(1) بأخذ المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى ومساواتها بالصفر .

$$z_x = -30x + 60 = 0 \tag{13.29}$$

$$z_y = 6y^2 - 384 = 0 \tag{13.30}$$

وبإيجاد النقاط الحرجة .

$$-30x + 60 = 0 \qquad 6y^2 - 384 = 0$$

$$x = 2 \qquad y^2 = 64$$

$$y = \pm 8$$

النقاط الحرجة هى : $(2,-8)$ و $(2,8)$.

(2) ومن *(13.29)* و *(13.30)* نوجد المشتقات من الرتبة الثانية .

$$z_{xx} = -30 \qquad z_{yy} = 12y$$

ومن ثم نقدر هذه المشتقات عند النقاط الحرجة ونلاحظ الإشارات .

$$z_{xx}(2,8) = -30 < 0 \qquad z_{yy}(2,8) = 12(8) = 96 > 0$$
$$z_{xx}(2,-8) = -30 < 0 \qquad z_{yy}(2,-8) = 12(-8) = -96 < 0$$

ثم نوجد المشتقات التقاطعية من *(13.29)* و *(13.30)* .

$$z_{xy} = 0 = z_{yx}$$

ونقدرها عند النقاط الحرجة ومن ثم نختبر الشرط الثالث .

$$z_{xx}(a,b)\cdot z_{yy}(a,b) > \left[z_{xy}(a,b)\right]^2 A$$

عند $(2,8)$ $\qquad -30 \cdot \quad 96 \quad < 0$

عند $(2,-8)$ $\qquad -30 \cdot \quad -96 \quad > 0$

وحيث إن f_{xx} و f_{yy} لها إشارات مختلفة وأن $f_{xx}\cdot f_{yy} < (f_{xy})^2$ عند $(2,8)$ فإن الدالة عند النقطة $(2,8)$ تكون عند نقطة سراج وحيث إن $f_{xx} ، f_{yy} < 0$ و $f_{xx}\cdot f_{yy} > (f_{xy})^2$ عند $(2,-8)$ فإن الدالة عند $(2,-8)$ تكون عند نهاية نسبية عظمى .

13.18. Redo Problem 13.17, given

13.18. بالرجوع إلى المطلوب فى المسألة 13.17. إذا أعطيت :

$$f(x,y) = 4x^3 - 60xy + 5y^2 + 297$$

(1) ضع المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى مساوية للصفر

$$f_x = 12x^2 - 60y = 0 \tag{13.31}$$
$$f_y = 10y - 60x = 0 \tag{13.32}$$

ثم نوجد القيم الحرجة

$$60y = 12x^2 \qquad 10y = 60x$$
$$y = \tfrac{1}{5}x^2 \qquad y = 6x \tag{13.33}$$

بوضع $y = y$.

$$\tfrac{1}{5}x^2 = 6x$$
$$x^2 - 30x = 0$$
$$x(x-30) = 0$$
$$x = 0 \qquad x = 30$$

وبالتعويض $x = 0$ و $x = 30$ فى $y = 6x$ من *(13.33)* .

$$y = 6(0) = 0$$
$$y = 6(30) = 180$$

ومن ثم فإن النقاط الحرجة هى (30, 180) و (0, 0) .

(2) بأخذ المشتقات من الرتبة الثانية من (*13.31*) و (*13.32*) .

$$f_{xx} = 24x \qquad f_{yy} = 10$$

ثم نقدرها عند النقاط الحرجة ونلاحظ الإشارات .

$$f_{xx}(0,0) = 24(0) \ = 0 \qquad f_{yy}(0,0) \ = 10 > 0$$

$$f_{xx}(30,180) = 24(30) = 720 > 0 \qquad f_{yy}(30,180) = 10 > 0$$

ومن ثم نأخذ المشتقات التقاطعية من (*13.31*) و (*13.32*) .

$$f_{xy} = -60 = f_{yx}$$

ثم نقدرها عند النقاط الحرجة ونختبر الشرط الثالث .

$$f_{xx}(a,b) \cdot f_{yy}(a,b) > \left[f_{xy}(a,b)\right]^2$$

عند (0, 0) $\quad 0 \cdot \ 10 \ < (-60)^2$

عند (30, 180) $\quad 720 \cdot \ 10 \ > (-60)^2$

$$7200 > 3600$$

وحيث أن f_{xx} و f_{yy} لها نفس الإشارات وأن $f_{xx} \cdot f_{yy} < (f_{xy})^2$ عند النقطة (0, 0) فإن $f\ (0,\ 0)$ هى نقطة تحول . وحيث إن $f_{xx}\ ,\ f_{yy} > 0$ وأن $f_{xx} \cdot f_{yy} > (f_{xy})^2$ عند (30, 180) فإن $f(30,\ 180)$ هى نهاية نسبية صغرى .

13.19. Redo Problem 13.17, given

13.19. بالرجوع إلى المطلوب فى المسألة 13.17. إذا أعطيت :

$$z = 8x^3 + 96xy - 8y^3$$

(1)

$$z_x = 24x^2 + 96y = 0 \qquad (13.34)$$

$$z_y = 96x - 24y^2 = 0 \qquad (13.35)$$

من (*13.34*) .

$$96y = -24x^2$$

$$y = -\tfrac{1}{4}x^2$$

بالتعويض $y = -\frac{1}{4}x^2$ فى (*13.35*) وحل المعادلة جبريًا

$$96x - 24\left(-\tfrac{1}{4}x^2\right)^2 = 0$$

$$96x - \tfrac{3}{2}x^4 = 0$$

$$3x(64 - x^3) = 0$$

$$3x = 0 \quad \text{or} \quad 64 - x^3 = 0$$

$$x = 0 \qquad\qquad x^3 = 64$$

$$x = 4$$

وبالتعويض بهذه القيم فى (13.34) نجد أنه إذا $x=0$ فإن $y=0$ وإذا كانت $x=4$ فإن $y=-4$. ولهذا فإن النقاط الحرجة هى $(4, -4)$ و $(0, 0)$.

(2) نختبر شروط الرتبة الثانية من (13.34) و (13.35) .

$$z_{xx} = 48x \qquad z_{yy} = -48y$$

$$z_{xx}(0,0) = 48(0) = 0 \qquad z_{yy}(0,0) = -48(0) = 0$$

$$z_{xx}(4,-4) = 48(4) = 192 > 0 \qquad z_{yy}(4,-4) = -48(-4) = 192 > 0$$

$$z_{xy} = 96 = z_{yx}$$

$$z_{xx}(a,b) \cdot z_{yy}(a,b) > \left[z_{xy}(a,b)\right]^2$$ عند $(0, 0)$

$$0 \cdot \quad 0 \quad < (96)^2$$ عند $(4, -4)$

$$192 \cdot \quad 192 \quad > (96)^2$$

وحيث إن z_{xx} و z_{yy} لها نفس الإشارة عند $(0, 0)$ و $z_{xx} \cdot z_{yy} < (z_{xy})^2$ فإن الدالة تكون عند نقطة تحول $(0, 0)$ ومع $z_{xx} > 0$ و $z_{yy} > 0$ و $z_{xx} \cdot z_{yy} > (z_{xy})^2$ عند $(4, -4)$ فإن الدالة تكون عند نهاية نسبية صغرى عند $(4, -4)$.

13.20. Redo Problem 13.17, given

13.20. بالرجوع إلى المطلوب فى المسألة 13.17. إذا أعطيت :

$$f(x,y) = 3x^3 - 9x^2 + 2y^3 + 24y^2 - 432x - 54y + 127$$

(1)
$$f_x = 9x^2 - 18x - 432 = 0 \qquad f_y = 6y^2 + 48y - 54 = 0 \qquad (13.36)$$

$$9(x^2 - 2x - 48) = 0 \qquad 6(y^2 + 8y - 9) = 0$$

$$(x+6)(x-8) = 0 \qquad (y-1)(y+9) = 0$$

$$x = -6 \quad x = 8 \qquad y = 1 \quad y = -9$$

ومن ثم فإن النقاط الحرجة هى : $(8, -9)$ ، $(8, 1)$ ، $(-6, -9)$ ، $(-6, 1)$.

(2) نختبر المشتقات من الرتبة الثانية عند كل من النقاط الحرجة . من (13.36)

$$f_{xx} = 18x - 18 \qquad f_{yy} = 12y + 48$$

(i) $$f_{xx}(-6,1) = -126 < 0 \qquad f_{yy}(-6,1) = 60 > 0$$

(ii) $$f_{xx}(-6,-9) = -126 < 0 \qquad f_{yy}(-6,-9) = -60 < 0$$

(iii) $$f_{xx}(8,1) = 126 > 0 \qquad f_{yy}(8,1) = 60 > 0$$

(iv) $$f_{xx}(8,-9) = 126 > 0 \qquad f_{yy}(8,-9) = -60 < 0$$

مع الإشارات المختلفة فى (i) و (ii) فإن $(-6, 1)$ و $(8, -9)$ يمكن تجاهلها ـ إذا رغبنا ـ كنقاط سراج . والآن نأخذ المشتقات التقاطعية من (13.36) ونختبر الشرط الثالث .

$$f_{xy} = 0 = f_{yx}$$

$$f_{xx}(a,b) \cdot f_{yy}(a,b) > \left[f_{xy}(a,b)\right]^2$$

$$(-126) \cdot (-60) \quad > (0)^2$$ عند (ii)

$$(126) \cdot (60) \quad > (0)^2$$ عند (iii)

الدالة تكون عند نهاية نسبية عظمى عند (−6, −9) وتكون عند نهاية نسبية صغرى عند (8, 1) وتكون عند نقاط سراج عند (−6, 1) و (8, −9) .

الأمثلية المقيدة ومضاعفات لاجرانج

Constrained Optimization and Lagrange Multipliers

13.21. استخدم طريقة مضاعف لاجرانج لإيجاد القيم الحرجة عندما تعظم الدالة التالية المقيدة بالشرط المعطى .

13.21. Use the Lagrange multiplier method to find the critical values at which the following function is optimized subject to the given constraint.

$$z = 5x^2 - 2xy + 8y^2$$

وخاضعة للقيد $x + y = 60$.

(1) بوضع القيد مساويًا للصفر وضربه بـ λ ومن ثم إضافته إلى دالة الهدف نحصل على :

$$Z = 5x^2 - 2xy + 8y^2 + \lambda(60 - x - y)$$

المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى هى :

$$Z_x = 10x - 2y - \lambda = 0 \qquad (13.37)$$

$$Z_y = -2x + 16y - \lambda = 0 \qquad (13.38)$$

$$Z_\lambda = 60 - x - y = 0 \qquad (13.39)$$

وبطرح (13.38) من (13.37) لحذف λ

$$12x - 18y = 0 \qquad x = 1.5y$$

وبالتعويض عن $x = 1.5y$ فى (13.39) وإعادة الترتيب

$$1.5y + y = 60 \qquad y_0 = 24$$

وبعد ذلك نعوض بقيمة $y_0 = 24$ فى (13.39) وإعادة الترتيب

$$x + 24 = 60 \qquad x_0 = 36$$

وأخيرًا بالتعويض عن $x_0 = 36$ و $y_0 = 24$ فى (13.37) أو (13.38) نجد أن $\lambda_0 = 312$. ومن أجل أن نرى كيف يمكن أن يستخدم جبر المصفوفات فى إيجاد شروط الرتبة الأولى للقيم الحرجة . انظر المسألة (6.13) حيث استخدمت قاعدة كرامر لإيجاد نفس الحل .

13.22. استخدم طريقة مضاعف لاجرانج لتعظيم الدالة التالية الخاضعة للقيد المعطى .

13.22. Use the Lagrange multiplier method to optimize the following function subject to the given constraint:

$$f(x, y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2$$

الخاضعة للقيد : $2x + y = 104$.

دالة لاجرانج هى :

$$F = 4x^2 - 6xy + 9y^2 + \lambda(104 - 2x - y)$$

شروط الرتبة هى

$$F_x = 8x - 6y - 2\lambda = 0 \qquad (13.40)$$

$$F_y = -6x + 18y - \lambda = 0 \qquad (13.41)$$

$$F_\lambda = 104 - 2x - y = 0 \qquad (13.42)$$

بضرب *(13.14)* فى 2 ثم طرحها من *(13.40)* لحذف λ

$$20x - 42y = 0 \qquad x = 2.1y$$

وبالتعويض بقيمة $x = 2.1y$ فى *(13.42)* وإعادة الترتيب .

$$2(2.1y) + y = 104 \qquad y_0 = 20$$

ومن ثم بالتعويض عن $y_0 = 20$ فى (13.42) وإعادة الترتيب .

$$2x + 20 = 104 \qquad x_0 = 42$$

وأخيرًا نعوض عن $x_0 = 42$ و $y_0 = 20$ فى *(13.40)* أو *(13.41)* لنجد أن $\lambda_0 = 108$.

13.23. المطلوب تعظيم الدالة التالية الخاضعة للقيد .

13.23. Optimize the following function subject to the constraint:

$$z = 120x - 4x^2 + 2xy - 3y^2 + 96y - 102$$

الخاضعة للقيد : $x + 3y = 69$.

وبإدخال القيد والتعظيم .

$$Z = 120x - 4x^2 + 2xy - 3y^2 + 96y - 102 + \lambda(69 - x - 3y)$$

$$Z_x = 120 - 8x + 2y - \lambda = 0 \qquad (13.43)$$

$$Z_y = 96 + 2x - 6y - 3\lambda = 0 \qquad (13.44)$$

$$Z_\lambda = 69 - x - 3y = 0 \qquad (13.45)$$

بضرب *(13.43)* فى 3 وطرحها من *(13.44)* لحذف λ

$$-264 + 26x - 12y = 0 \qquad (13.46)$$

بضرب *(13.45)* فى 4 وطرحها من *(13.46)* لحذف y

$$-540 + 30x = 0$$

$$x_0 = 18$$

وبالتعويض عن $x_0 = 18$ فى *(13.45)* لإيجاد y

$$y_0 = 17$$

وبالتعويض عن $x_0 = 18$ و $y_0 = 17$ فى *(13.43)* أو *(13.44)* فإن $\lambda_0 = 10$.

13.24. المطلوب تعظيم الدالة التالية الخاضعة للقيد .

13.24. Optimize the following function subject to the constraint:

$$f(x, y) = 120x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 160y + 7$$

الخاضعة للقيد : $3x + y = 480$

وبتكوين دالة لاجرانج ومن ثم تعظيمها .

$$F = 120x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 160y + 7 + \lambda(480 - 3x - y)$$

$$F_x = 120 - 4x - y - 3\lambda = 0 \tag{13.47}$$

$$F_y = 160 - x - 6y - \lambda = 0 \tag{13.48}$$

$$F_\lambda = 480 - 3x - y = 0 \tag{13.49}$$

وبضرب (*13.48*) فى 3 وطرحها من (*13.37*) لحذف λ .

$$-360 - x + 17y = 0 \tag{13.50}$$

وبضرب (*13.50*) فى 3 وطرحها من (*13.49*) لحذف x .

$$1560 - 52y = 0$$

$$y_0 = 30$$

وبالتعويض عن $y_0 = 30$ فى (*13.49*) لإيجاد x .

$$x_0 = 150$$

ومن ثم نعوض عن $x_0 = 150$ و $y_0 = 30$ فى (*13.47*) أو (*13.48*) فإن $\lambda_0 = -170$. وحيث إن λ سالبة فإن $f(x, y)$ تكون عند نهاية نسبية صغرى .

Income Determination Multipliers مضاعفات تحديد الدخل

13.25. إذا أعطيت معادلة الصيغة المختزلة فى (*4.53*) من المسألة 4.20 .

13.25. Given the reduced form equation in (*4.53*) from Problem 4.20,

$$Y_e = \frac{1}{1 - b + z}(C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0) \tag{13.51}$$

أوجد (1) مضاعف الاستثمار التلقائى I_0 و (2) مضاعف الواردات التلقائية z_0 و (3) المضاعف للميل الحدى للاستهلاك b .

(1) لإيجاد أى من المضاعفات المختلفة فإننا ببساطة نوجد المشتقة الجزئية لـ y_e بالنسبة إلى المتغير أو المعامل المرغوب فيه . علمًا بإن الكسر مضروبًا فى كل حد من حدود القوس على نحو منفصل .

$$\frac{\partial Y_e}{\partial I_0} = \frac{1}{1 - b + z}$$

(2)

$$\frac{\partial Y_e}{\partial Z_0} = \frac{-1}{1 - b + z}$$

(3) باستخدام قاعدة خارج القسمة

$$\frac{\partial Y_e}{\partial b} = \frac{(1 - b + z)(0) - (C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0)(-1)}{(1 - b + z)^2}$$

$$\frac{\partial Y_e}{\partial b} = \frac{1(C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0)}{(1 - b + z)^2} = \frac{1}{(1 - b + z)}\left(\frac{C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0}{(1 - b + z)}\right)$$

وباستخدام (13.51) .

$$\frac{\partial Y_e}{\partial b} = \frac{Y_e}{(1-b+z)}$$

13.26. إذا أعطيت معادلة الصيغة المختزلة فى (4.52) من المسألة 4.19 .

13.26. Given the reduced form equation in (4.52) from Problem 4.19,

$$Y_e = \frac{1}{1-b+bt}(C_0 + I_0 - bT_0) \qquad (13.52)$$

أوجد المضاعف للميل الحدى للاستهلاك b . باستخدام قاعدة خارج القسمة

$$\frac{\partial Y_e}{\partial b} = \frac{(1-b+bt)(-T_0) - (C_0 + I_0 - bT_0)(-1+t)}{(1-b+bt)^2}$$

بالضرب وإعادة الترتيب

$$\frac{\partial Y_e}{\partial b} = \frac{-(1-b+bt)T_0 + (1-t)(C_0 + I_0 - bT_0)}{(1-b+bt)^2}$$

$$\frac{\partial Y_e}{\partial b} = \frac{-(1-b+bt)T_0 - t(C_0 + I_0 - bT_0) + (C_0 + I_0 - bT_0)}{(1-b+bt)^2}$$

وحيث إن المقام مقسومًا على الحدود الثلاثة فى البسط على نحو منفصل وباستخدام (13.52) للاختصار .

$$\frac{\partial Y_e}{\partial b} = \frac{-T_0}{1-b+bt} - \frac{tY_e}{1-b+bt} + \frac{Y_e}{1-b+bt}$$

وبإعادة الترتيب والاختصار مرة ثانية

$$\frac{\partial Y_e}{\partial b} = \frac{1}{1-b+bt}[Y_e - (T_0 + tY_e)] = \frac{1}{1-b+bt}(Y_e - T_e)$$

وحيث إن $y_d = y - T$ أو الدخل المتاح فإن

$$\frac{\partial Y_e}{\partial b} = \frac{1}{1-b+bt}Y_d$$

Optimization of Business and Economic Functions أمثلية الدوال الاقتصادية والإدارية

13.27. لمنشأة تنتج السلعتين x و y (a) أوجد مستويات x و y التى عندها تعظم الأرباح . (b) اختبر شروط الرتبة الثانية و (c) قدر الدالة عند القيمة الحرجة لـ x_0 و y_0 إذا أعطيت دالة الأرباح التالية :

13.27. For a firm producing two goods x and y (a) find the levels of x and y at which profit is maximized, (b) test the second-order conditions, and (c) evaluate the function at the critical values x_0 and y_0, given the following profit function:

$$\pi = 120x - 2x^2 - 3xy - 3y^2 + 165y - 250$$

(a) نأخذ المشتقات الأولى ثم نضعها مساوية للصفر .

$$\pi_x = 120 - 4x - 3y = 0 \qquad (13.53)$$

$$\pi_y = 165 - 3x - 6y = 0 \qquad (13.54)$$

بضرب (*13.53*) فى 2 وطرحها من (*13.54*) لحذف y .

$$-75 + 5x = 0$$

$$x_0 = 15$$

وبالتعويض بقيمة $x_0 = 15$ فى (*13.53*) أو (*13.54*) لإيجاد y_0 .

$$y_0 = 20$$

(*b*) نأخذ المشتقات الثانية من (*13.54*) و (*13.54*) .

$$\pi_{xx} = -4 \qquad \pi_{yy} = -6 \qquad \pi_{xy} = -3$$

وحيث إن π_{xx} و π_{yy} سالبتان وأن $\pi_{xx}\,\pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$ فإن π قد تم تعظيمها .

(*c*) وبالتعويض بقيمة $x_0 = 15$ و $y_0 = 20$ فى الدالة الأصلية .

$$\pi = 2300$$

13.28. Redo Problem 13.27, given

13.28. بالرجوع إلى المطلوب فى المسألة 13.27. إذا أعطيت :

$$\pi = 324x - 5x^2 - 2xy - 4y^2 + 308y - 1240$$

(*a*)

$$\pi_x = 324 - 10x - 2y = 0 \qquad (13.55)$$

$$\pi_y = 308 - 2x - 8y = 0 \qquad (13.56)$$

وبضرب (*13.55*) فى 4 وطرحها من (*13.56*) لحذف y

$$-988 + 38x = 0$$

$$x_0 = 26$$

وبالتعويض بقيمة $x_0 = 26$ فى (*13.55*) أو (*13.56*) لإيجاد y_0

$$y_0 = 32$$

(*b*)

$$\pi_{xx} = -10 \qquad \pi_{yy} = -8 \qquad \pi_{xy} = -2$$

وحيث إن π_{xx} و π_{yy} سالبتان وأن $\pi_{xx}\,\pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$ فإن π قد تم تعظيمها .

(*c*)

$$\pi = 7900$$

13.29. محتكر ينتج السلعتين x و y وأن دوال الطلب هى :

13.29. A monopolist produces two goods x and y for which the demand functions are

$$P_x = 315 - 4x \qquad (13.57)$$

$$P_y = 260 - 3y \qquad (13.58)$$

ودالة التكاليف الكلية هى :

$$c = 2x^2 + 3xy + y^2 + 400$$

أوجد (*a*) مستوى الناتج الذى يعظم الربح لكل سلعة (*b*) السعر الذى يعظم الربح لكل سلعة (*c*) الربح الأعظم .

(*a*) إذا أعطيت أن $\pi = \text{TR} - \text{TC}$ حيث $\text{TR} = P_x \,.\, x + P_y \,.\, y$.

$$\pi = P_x \cdot x + P_y \cdot y - c$$

وبالتعويض بالمعلومات المعطاة ومن ثم التعظيم

$$\pi = (315 - 4x)x + (260 - 3y)y - (2x^2 + 3xy + y^2 + 400)$$

$$\pi = 315x - 6x^2 - 3xy - 4y^2 + 260y - 400$$

$$\pi_x = 315 - 12x - 3y = 0 \qquad (13.59)$$

$$\pi_y = 260 - 3x - 8y = 0 \qquad (13.60)$$

وبضرب *(13.60)* فى 4 وطرحها من *(13.59)* لحذف x

$$-725 + 29y = 0$$

$$y_0 = 25$$

وبالتعويض بقيمة $y_0 = 25$ فى *(13.59)* أو *(13.60)* لإيجاد x_0

$$x_0 = 20$$

اختبر شروط الرتبة الثانية لتتأكد من تعظيم الربح

$$\pi_{xx} = -12 \qquad \pi_{yy} = -8 \qquad \pi_{xy} = -3$$

وحيث إن π_{xx} و π_{yy} سالبتان وأن $\pi_{xx}\,\pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$ فإن π قد تم تعظيمها .

(*b*) وبالتعويض $x_0 = 20$ و $y_0 = 25$ فى *(13.57)* و *(13.58)*

$$P_x = 315 - 4(20) = 235 \qquad P_y = 260 - 3(25) = 185$$

(*c*) $\pi = 6000$

13.30. أوجد المستوى الذى يعظم الربح لكل من (*a*) الناتج ، (*b*) السعر و (*c*) ربح المحتكر لدوال الطلب .

13.30. Find the profit-maximizing level of (*a*) output, (*b*) price, and (*c*) profit for the monopolist with the demand functions

$$P_x = 92 - 2x \qquad (13.61)$$

$$P_y = 176 - 5y \qquad (13.62)$$

ودالة التكاليف هى : $c = 3x^2 + xy + 2y^2 + 424$.

(*a*) وبالتعويض فى دالة الربح ومن ثم التعظيم

$$\pi = (92 - 2x)x + (176 - 5y)y - (3x^2 + xy + 2y^2 + 424)$$

$$\pi = 92x - 5x^2 - xy - 7y^2 + 176y - 424$$

$$\pi_x = 92 - 10x - y = 0 \qquad (13.63)$$

$$\pi_y = 176 - x - 14y = 0 \qquad (13.64)$$

بضرب *(13.64)* فى 10 وطرحها من *(13.63)* لحذف x

$$-1668 + 139y = 0$$

$$y_0 = 12 \qquad x_0 = 8$$

ثم نختبر شروط الرتبة الثانية

$$\pi_{xx} = -10 \qquad \pi_{yy} = -14 \qquad \pi_{xy} = -1$$

وحيث إن π_{xx} و π_{yy} سالبتان وأن $\pi_{xx}\,\pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$ فإن π قد تم تعظيمها .

(*b*) وبالتعويض بقيمة $x_0 = 8$ و $y_0 = 12$ فى (*13.61*) و (*13.63*)

$$P_x = 76 \qquad P_y = 116$$

(*c*)

$$\pi = 1000$$

13.31. أوجد المستوى الذى يعظم الربح لكل من (*a*) الناتج (*b*) السعر (*c*) ربح المحتكر مع دوال الطلب .

13.31. Find the profit-maximizing level of (*a*) output, (*b*) price, and (*c*) profit for the monopolist with the demand functions

$$P_1 = 138 - 1.5Q_1 \tag{13.65}$$

$$P_2 = 202 - 3.5Q_2 \tag{13.66}$$

ودالة التكاليف الكلية هى : $c = 4Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 3Q_2^2 + 204$.

(*a*) بتكوين دالة الربح ومن ثم التعظيم

$$\pi = (138 - 1.5Q_1)Q_1 + (202 - 3.5Q_2)Q_2 - (4Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 3Q_2^2 + 204)$$

$$\pi = 138Q_1 - 5.5Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - 6.5Q_2^2 + 202Q_2 - 204$$

$$\pi_1 = 138 - 11Q_1 - 2Q_2 = 0 \tag{13.67}$$

$$\pi_2 = 202 - 2Q_1 - 13Q_2 = 0 \tag{13.68}$$

بضرب (*13.68*) فى 5.5 وطرحها من (*13.67*) لحذف Q_1

$$-973 + 69.5Q_2 = 0$$

$$\overline{Q}_2 = 14 \qquad \overline{Q}_1 = 10$$

ثم نتحقق من شروط الرتبة الثانية

$$\pi_{11} = -11 \qquad \pi_{22} = -13 \qquad \pi_{12} = -2$$

وحيث إن $\pi_{22} < 0$ و π_1 وأن $\pi_{11}\,\pi_{22} > (\pi_{12})^2$ فإن π قد تم تعظيمها

(*b*)

$$P_1 = 138 - 1.5(10) = 123 \qquad P_2 = 202 - 3.5(14) = 153$$

(*c*)

$$\pi = 1900$$

13.32. أوجد المستوى الذى يعظم الربح لكل من (*a*) الناتج ، (*b*) السعر ، (*c*) ربح المحتكر مع دوال الطلب :

13.32. Find the profit-maximizing level of (*a*) output, (*b*) price, and (*c*) profit for the monopolist with the demand functions

$$P_1 = 920 - 10Q_1 \tag{13.69}$$

$$P_2 = 950 - 6Q_2 \tag{13.70}$$

ودالة التكاليف الكلية هى : $c = 2Q_1^2 + 5Q_1Q_2 + 4Q_2^2 + 1800$.

(*a*) نكون دالة الربح ومن ثم نعظمها

$$\pi = (920 - 10Q_1)Q_1 + (950 - 6Q_2)Q_2 - (2Q_1^2 + 5Q_1Q_2 + 4Q_2^2 + 1800)$$

$$\pi = 920Q_1 - 12Q_1^2 - 5Q_1Q_2 - 10Q_2^2 + 950Q_2 - 1800$$

$$\pi_1 = 920 - 24Q_1 - 5Q_2 = 0 \tag{13.71}$$

$$\pi_2 = 950 - 5Q_1 - 20Q_2 = 0 \tag{13.72}$$

بضرب (*13.71*) فى 4 وطرحها من (*13.72*) لحذف Q_2 .

$$-2730 + 91Q_1 = 0$$

$$\overline{Q}_1 = 30 \qquad \overline{Q}_2 = 40$$

ثم نتحقق من شروط الرتبة الثانية .

$$\pi_{11} = -24 \qquad \pi_{22} = -20 \qquad \pi_{12} = -5$$

وحيث إن $\pi_{22}\pi_{11} < 0$ وأن $\pi_{11}\,\pi_{22} > (\pi_{12})^2$ فإن π قد تم تعظيمها .

(*b*) $$P_1 = 920 - 10(30) = 620 \qquad P_2 = 950 - 6(40) = 710$$

(*c*) $$\pi = 31,000$$

التطبيقات الاقتصادية لطريقة مضاعف لاجرانج

Economic Application of The Lagrange Multiplier Methods

13.33. تعاقد مصنع ملابس نسائية على تسليم 77 وحدة من القمصان x والبنطلونات y لأى توليفة من اختياره .

(*a*) أوجد التوليفة التى تدنى تكلفة التعاقد إذا أعطيت دالة التكاليف للمنشأة .

13.33. **A women's clothing manufacturer is under contract to deliver 77 units of skirts x and slacks y in any combination of its choosing. (*a*) Find the combination that minimizes the cost of fulfilling the contract given the firm's total cost function**

$$c = 7x^2 - 2xy + 5y^2 + 64$$

(*b*) ماذا يحدث للتكاليف إذا تزايد أو انخفض ثابت القيد بوحدة واحدة .

(*b*) What would happen to costs if the constant of the constraint were increased or decreased by one unit?

(*a*) نكون القيد : $x + y = 77$.

وبعدئذ نكون دالة لاجرانج ونوجد الأمثلية

$$C = 7x^2 - 2xy + 5y^2 + 64 + \lambda(77 - x - y)$$

$$C_x = 14x - 2y - \lambda = 0 \tag{13.73}$$

$$C_y = -2x + 10y - \lambda = 0 \tag{13.74}$$

$$C_\lambda = 77 - x - y = 0 \tag{13.75}$$

ويطرح (*13.74*) من (*13.73*) لحذف λ

$$16x - 12y = 0$$

$$y = \tfrac{4}{3}x$$

وبالتعويض فى (13.75) .

$$77 - x - \left(\tfrac{4}{3}x\right) = 0$$

$$x_0 = 33$$

وبالتعويض بقيمة $x_0 = 33$ فى (13.75) فإن $y_0 = 44$ وبعد ذلك نعوض بقيمة $x_0 = 33$ و $y_0 = 44$ فى (13.73) أو (13.74) لنجد أن $\lambda_0 = 374$.

(*b*) وحيث إن $\lambda_0 = 374$ فإنه إذا زاد ثابت القيد بمقدار واحد إلى 78 فإن التكاليف الكلية سوف تزيد بمقدار 374 دولاراً تقريباً . أما إذا انخفاض ثابت القيد بمقدار واحد إلى 76 فإن التكاليف الكلية ستنخفض بمقدار 374 دولاراً تقريباً . ولكى نرى شروط الرتبة الأولى لهذه المسألة التى حلت بجبر المصفوفة انظر المسألة 6.14 .

13.34. تعاقد مصنع أحذية على تسليم 36 زوجًا من أحذية اللوفر x وأحذية أوكسفورد y لأى توليفة مرغوبة .

(*a*) أوجد أقل التوليفات تكلفة بحيث تفى بالتعاقد إذا كانت

13.34. A shoe manufacturer is under contract to deliver 36 pairs of loafers x and oxfords y in any combination it wants. (*a*) Find the least-cost combination that fulfills the contract if

$$c = 2x^2 - xy + 3y^2 + 18$$

(*b*) ماذا يحدث لـ c إذا أضيف زوج إضافى إلى العقد ؟

(*b*) What happens to C if an extra pair of shoes is added to the contract?

(*a*) نكون دالة لاجرانج :

$$C = 2x^2 - xy + 3y^2 + 18 + \lambda(36 - x - y)$$

$$C_x = 4x - y - \lambda = 0 \tag{13.76}$$

$$C_y = -x + 6y - \lambda = 0 \tag{13.77}$$

$$C_\lambda = 36 - x - y = 0 \tag{13.78}$$

وبطرح (13.77) من (13.76) لحذف λ

$$5x - 7y = 0$$

$$y = \tfrac{5}{7}x$$

وبالتعويض فى (13.78)

$$36 - x - \left(\tfrac{5}{7}x\right) = 0$$

$$x_0 = 21$$

ومن ثم

$$y_0 = 15 \qquad \lambda_0 = 69$$

(*b*) وحيث إن $\lambda_0 = 69$ فإن c سوف تزيد بمقدار 69 دولاراً تقريباً .

13.35. (*a*) أوجد توليفة الناتج الذى سوف يعظم الأرباح لمنشأة طاقتها الإنتاجية القصوى 22 عندما تكون

13.35. (*a*) Find the output mix that will maximize profits for a firm with a maximum joint output capacity of 22 when

$$\pi = 160x - 4x^2 - xy - 3y^2 + 210y$$

(*b*) قيم الأثر على الأرباح إذا زادت الطاقة الإنتاجية بمقدار وحدة واحدة .

(*b*) Estimate the effect on profits if output capacity is expanded by one unit.

(*a*) بإدخال القيد ومن ثم التعظيم .

$$\Pi = 160x - 4x^2 - xy - 3y^2 + 210y + \lambda(22 - x - y)$$

$$\Pi_x = 160 - 8x - y - \lambda = 0 \tag{13.79}$$

$$\Pi_y = 210 - x - 6y - \lambda = 0 \tag{13.80}$$

$$\Pi_\lambda = 22 - x - y = 0 \tag{13.81}$$

بطرح (*13.80*) من (*13.79*) لحذف λ .

$$-50 - 7x + 5y = 0 \tag{13.82}$$

وبضرب (*13.81*) فى 5 وإضافتها إلى (*13.82*) لحذف λ .

$$60 - 12x = 0$$

$$x_0 = 5 \qquad y_0 = 17 \qquad \lambda_0 = 103$$

(*b*) وحيث إن $\lambda_0 = 103$ فإن π سوف تزيد بمقدار 103 دولار تقريبًا .

13.36. وجد محل تجارى أن قيمة مبيعاته z تعتمد على عدد الإعلانات فى الرسائل الشخصية x وفى الصحف y إذا أعطيت :

13.36. A department store has found that its value of sales z depends on the number of advertisements in circulars x and in newspapers y, given by

$$z = 420x - 2x^2 - 3xy - 5y^2 + 640y + 1725$$

فإذا كان سعر الإعلان فى الرسائل الشخصية دولار واحد وفى الصحف 4 دولارات وأن ميزانية الإعلان 180 دولاراً (*a*) أوجد عدد الإعلانات فى الرسائل الشخصية والصحف التى سوف تعظم المبيعات الخاضعة لقيد الميزانية . (*b*) قدر الأثر على المبيعات لزيادة ميزانية الإعلان بمقدار دولار واحد .

If the price per ad is $1 in circulars and $4 in newspapers, and the advertising budget is $180, (*a*) find the number of ads in circulars and newspapers that will maximize sales subject to the budget constraint. (*b*) Estimate the effect on sales of a $1 increase in the advertising budget.

(*a*) نكون دالة لاجرانج

$$Z = 420x - 2x^2 - 3xy - 5y^2 + 640y + 1725 + \lambda(180 - x - 4y)$$

$$Z_x = 420 - 4x - 3y - \lambda = 0 \tag{13.83}$$

$$Z_y = 640 - 3x - 10y - 4\lambda = 0 \tag{13.84}$$

$$Z_\lambda = 180 - x - 4y = 0 \tag{13.85}$$

بضرب (*13.83*) فى 4 وطرحها من (*13.84*) لحذف λ

$$-1040 + 13x + 2y = 0 \tag{13.86}$$

بضرب (13.86) فى 2 وإضافتها إلى (13.85) لحذف λ

$$-1900 + 25x = 0$$

$$x_0 = 76 \qquad y_0 = 26 \qquad \lambda_0 = 38$$

(*b*) وحيث إن $\lambda_0 = 38$ فإن المبيعات ستزيد بمقدار 38 دولارًا .

13.37. بسبب خفض مساحة المستودع نتيجة التجديدات الجارية فإن المنشأة بدالة الربح العادية .

13.37. Because of reduced warehouse space from current renovations, a firm with the normal profit function

$$\pi = 160x - 3x^2 - xy - 2y^2 + 240y - 665$$

قد خفضت مساحة التخزين مؤقتًا إلى 40 قدمًا مربعًا . فإذا كانت x تتطلب قدمًا واحدًا مربعًا من المساحة وy تتطلب قدمين مربعين (*a*) أوجد القيم الحرجة لـ x و y التى تعظم الربح والخاضعة لقيد التخزين المؤقت .

(*b*) قدر الأثر على الأرباح لزيادة مساحة التخزين بقدم مربع واحد .

has had storage space temporarily reduced to 40 square feet (ft^2). If x requires 1 ft^2 of space and y requires 2 ft^2, (*a*) find the critical values for x and y that will maximize profits subject to the temporary storage constraint. (*b*) Estimate the effect on profits of a 1-ft^2 increase in storage space.

(*a*) ندخل القيد ونأخذ المشتقات الأولى

$$\Pi = 160x - 3x^2 - xy - 2y^2 + 240y - 665 + \lambda(40 - x - 2y)$$

$$\Pi_x = 160 - 6x - y - \lambda = 0 \qquad (13.87)$$

$$\Pi_y = 240 - x - 4y - 2\lambda = 0 \qquad (13.88)$$

$$\Pi_\lambda = 40 - x - 2y = 0 \qquad (13.89)$$

بضرب (13.87) فى 2 وطرحها من (13.88) لحذف λ

$$-80 + 11x - 2y = 0 \qquad (13.90)$$

بطرح (13.90) من (13.89) لحذف λ

$$120 - 12x = 0$$

$$x_0 = 10 \qquad y_0 = 15 \qquad \lambda_0 = 85$$

(*b*) وحيث إن $\lambda_0 = 85$ فإن الأرباح سوف تزيد بمقدار 85 دولارًا تقريبًا .

13.38. محتكر ينتج تلفزيونات (Q_1) وفيديوهات (Q_2) فى دولة نامية صغيرة وطاقته الإنتاجية 40 وحدة فى اليوم .

(*a*) أوجد مستوى الناتج الذى يعظم الربح والخاضع لقيد الإنتاج إذا كانت دوال الطلب :

13.38. A monopolistic producer of TVs (Q_1) and VCRs (Q_2) in a small developing country has a maximum joint capacity of 40 items a day. Find the profit-maximizing level of output subject to the production constraint, given the demand functions

$$P_1 = 820 - 6Q_1$$

$$P_2 = 980 - 8Q_2$$

ودالة التكاليف الكلية هى : $c = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 4Q_2^2 + 225$

أولاً كون دالة الربح

$$\pi = (820 - 6Q_1)Q_1 + (980 - 8Q_2)Q_2 - (2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 4Q_2^2 + 225)$$

$$\pi = 820Q_1 - 8Q_1^2 - Q_1Q_2 - 12Q_2^2 + 980Q_2 - 225$$

وبعدئذ نكون دالة لاجرانج .

$$\Pi = 820Q_1 - 8Q_1^2 - Q_1Q_2 - 12Q_2^2 + 980Q_2 - 225 + \lambda(40 - Q_1 - Q_2)$$

$$\Pi_1 = 820 - 16Q_1 - Q_2 - \lambda = 0 \qquad (13.91)$$

$$\Pi_2 = 980 - Q_1 - 24Q_2 - \lambda = 0 \qquad (13.92)$$

$$\Pi_\lambda = 40 - Q_1 - Q_2 = 0 \qquad (13.93)$$

بطرح *(13.92)* من *(13.91)* لحذف λ .

$$-160 - 15Q_1 + 23Q_2 = 0 \qquad (13.94)$$

وبضرب *(13.93)* فى 15 وطرحها من *(13.94)* لحذف Q_1 .

$$-760 + 38Q_2 = 0$$

$$\bar{Q}_2 = 20 \qquad \bar{Q}_1 = 20 \qquad \bar{\lambda} = 480$$

أمثلية دوال كوب ـ دوجلاس فى ظل القيود

Optimizing Cobb-Douglas Functions Under Constraints

13.39. المطلوب تعظيم الناتج لمنشأة تعمل فى ظل غلة الإنتاج الثابتة حيث تكون دالة إنتاج كوب دوجلاس .

13.39. Maximize output for a firm operating at constant returns to scale for which the strict Cobb-Douglas production function is

$$q = 1.5K^{0.6}L^{0.4}$$

حيث $P_K = 6$ و $P_L = 2$ وميزانية الإنتاج تساوى 960 .

نكون دالة لاجرانج للأمثلية المقيدة ونضع المشتقات الأولى مساوية للصفر .

$$Q = 1.5K^{0.6}L^{0.4} + \lambda(960 - 6K - 2L)$$

$$Q_K = 0.9K^{-0.4}L^{0.4} - 6\lambda = 0 \qquad (13.95)$$

$$Q_L = 0.6K^{0.6}L^{-0.6} - 2\lambda = 0 \qquad (13.96)$$

$$Q_\lambda = 960 - 6K - 2L = 0 \qquad (13.97)$$

وبإعادة الترتيب ومن ثم قسمة *(13.95)* على *(13.96)* لحذف λ

$$\frac{0.9K^{-0.4}L^{0.4}}{0.6K^{0.6}L^{-0.6}} = \frac{6\lambda}{2\lambda}$$

تذكر أنه فى حالة القسمة فإننا نطرح الأسس

$$1.5K^{-1}L^{1} = 3$$

$$\frac{L}{K} = 2 \qquad L = 2K$$

وبالتعويض عن $L = 2K$ فى *(13.97)* .

$$960 - 6K - 2(2K) = 0 \qquad K_0 = 96$$

وأخيرًا بالتعويض عن $K_0 = 96$ فى (13.97) .

$$L_0 = 192$$

13.40. إنتاج منشأة تخضع لتناقص الغلة عبر عنه بدالة إنتاج كوب ـ دوجلاس العامة .

13.40. Production for a firm with decreasing returns to scale is given by the generalized Cobb-Douglas production function

$$q = K^{0.3}L^{0.5}$$

فإذا كان $P_K = 12$ و $P_L = 8$ وقيد الإنتاج يساوى 1280 فالمطلوب تعظيم الناتج الخاضع لقيد الميزانية .

نكون دالة لاجرانج

$$Q = K^{0.3}L^{0.5} + \lambda(1280 - 12K - 8L)$$

$$Q_K = 0.3K^{-0.7}L^{0.5} - 12\lambda = 0 \tag{13.98}$$

$$Q_L = 0.5K^{0.3}L^{-0.5} - 8\lambda = 0 \tag{13.99}$$

$$Q_\lambda = 1280 - 12K - 8L = 0 \tag{13.100}$$

وبإعادة الترتيب ومن ثم قسمة (13.98) على (13.99) لحذف λ

$$\frac{0.3K^{-0.7}L^{0.5}}{0.5K^{0.3}L^{-0.5}} = \frac{12\lambda}{8\lambda}$$

$$0.6\frac{L}{K} = 1.5 \qquad L = 2.5K$$

وبالتعويض عن $L = 2.5\ K$ فى (13.100)

$$K_0 = 40 \qquad L_0 = 100$$

13.41. المطلوب تعظيم منفعة المستهلك الذى دالة منفعته هى :

13.41. Maximize utility for the consumer whose utility function is

$$u = x^{0.8}y^{0.1}$$

حيث $P_x = 16$ و $P_y = 4$ وميزانيته B تساوى 864 دولارًا

نكون دالة لاجرانج

$$U = x^{0.8}y^{0.1} + \lambda(864 - 16x - 4y)$$

$$U_x = 0.8x^{-0.2}y^{0.1} - 16\lambda = 0 \tag{13.101}$$

$$U_y = 0.1x^{0.8}y^{-0.9} - 4\lambda = 0 \tag{13.102}$$

$$U_\lambda = 864 - 16x - 4y = 0 \tag{13.103}$$

وبإعادة الترتيب وبعدئذ نقسم (13.101) على (13.102) لحذف λ

$$\frac{0.8x^{-0.2}y^{0.1}}{0.1x^{0.8}y^{-0.9}} = \frac{16\lambda}{4\lambda}$$

$$8\frac{y}{x} = 4 \qquad y = \frac{1}{2}x$$

وبالتعويض عن $y=\frac{1}{2}x$ فى (13.103)

$$x_0 = 48 \qquad y_0 = 24$$

13.42. Maximize utility for the consumer, given

13.42. المطلوب تعظيم منفعة المستهلك إذا أعطيت :

$$u = x^{0.2}y^{0.7}$$

والخاضعة للقيد $P_x = 3$ و $P_y = 5$ و $B = 405$.

نكون دالة لاجرانج

$$U = x^{0.2}y^{0.7} + \lambda(405 - 3x - 5y)$$

$$U_x = 0.2x^{-0.8}y^{0.7} - 3\lambda = 0 \tag{13.104}$$

$$U_y = 0.7x^{0.2}y^{-0.3} - 5\lambda = 0 \tag{13.105}$$

$$U_\lambda = 405 - 3x - 5y = 0 \tag{13.106}$$

ويقسمة (13.104) على (13.105) لحذف λ .

$$\frac{0.2x^{-0.8}y^{0.7}}{0.7x^{0.2}y^{-0.3}} = \frac{3\lambda}{5\lambda}$$

$$\frac{0.2y}{0.7x} = 0.6 \qquad y = 2.1x$$

وبالتعويض فى (13.106) .

$$x_0 = 30 \qquad y_0 = 63$$

Implicit and Inverse Function Rules قواعد الدوال الضمنية والعكسية

13.43. أوجد المشتقة dy/dx لكل من الدوال الضمنية التالية :

13.43. Find the derivative dy/dx for each of the following implicit functions.

(*a*) $7x^6 + 4y^5 - 96 = 0$

من قاعدة الدالة الضمنية فى (13.22)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} \qquad (f_y \neq 0)$$

وهنا $f_x = 42x^5$ ، $f_y = 20y^4$ وبالتعويض

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{42x^5}{20y^4} = -\frac{21x^5}{10y^4}$$

(*b*) $6x^2 - 7xy + 2y^2 = 81$

وهنا $f_x = 12x - 7y$ و $f_y = 4y - 7x$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\left(\frac{12x - 7y}{4y - 7x}\right) = \frac{7y - 12x}{4y - 7x}$$

(*c*) $5x^3 + 8y^4 - 3y^3 - 109 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{15x^2}{32y^3 - 9y^2}$$

(*d*) $9x^5 - 2x^2y^2 + 7y^3 = 224$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{45x^4 - 4xy^2}{21y^2 - 4x^2y}$$

(*e*) $(13x - 7)^3 + 15y^5 = 1029$

باستخدام قاعدة دالة القوى العامة لـ f_x .

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{39(13x - 7)^2}{75y^4}$$

(*f*) $(4x^4 + 9y^2)^3 = 1645$

باستخدام قاعدة دالة القوى العامة لـ f_x و f_y .

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{48x^3(4x^4 + 9y^2)^2}{54y(4x^4 + 9y^2)^2} = -\frac{8x^3}{9y}$$

(*g*) $\sqrt{2x^3 + 3y^5} = 98$

علمًا بأن $\sqrt{2x^3 + 3y^5} = (2x^3 + 3y^5)^{1/2}$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{3x^2(2x^3 + 3y^5)^{-1/2}}{7.5y^4(2x^3 + 3y^5)^{-1/2}} = -\frac{x^2}{2.5y^4}$$

13.44. أوجد مشتقة الدالة العكسية dP/dQ لكل من الدوال الصريحة التالية Q .

13.44. Find the derivative of the inverse function dP/dQ for each of the following explicit functions of Q.

(*a*) $Q = 496 - 5P$

من قاعدة الدالة الصريحة فى (*13.23*) .

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{dQ/dP} \qquad \left(\frac{dQ}{dP} \neq 0\right)$$

وبالتعويض $dP/dQ = -5$ فى الصيغة .

$$\frac{dP}{dQ} = -\frac{1}{5}$$

(*b*) $Q = 87 - 0.4P$

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{-0.4} = -2.5$$

(*c*) $Q = 13 + 3P^2$

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{6P} \qquad (P \neq 0)$$

(*d*) $Q = 246 - P^2 + 3P$

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{3 - 2P} \qquad (P \neq 1.5)$$

Verification of The Rules of Partial Differentiation التحقق من قواعد التفاضل الجزئى

13.45. لكل من الدوال التالية استخدم (1) التعريف فى (*13.1a*) لإيجاد $\partial z/\partial x$ و (2) التعريف فى (*13.1b*)

لإيجاد $\partial 2 / \partial y$ من أجل تأكيد قواعد التفاضل .

13.45. For each of the following functions, use (1) the definition in (*13.1a*) to find $\partial z/\partial x$, and (2) the definition in (*13.1b*) to find $\partial z/\partial y$ in order to confirm the rules of differentiation.

(*a*) $z = 94 + 5x - 8y$

من (*13.1a*)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

وبالتعويض

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[94 + 5(x+\Delta x) - 8y] - (94 + 5x - 8y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{94 + 5x + 5\Delta x - 8y - 94 - 5x + 8y}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 5 = 5$$

من (*13.1b*)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

وبالتعويض

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[94 + 5x - 8(y+\Delta y)] - (94 + 5x - 8y)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{94 + 5x - 8y - 8\Delta y - 94 - 5x + 8y}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-8\Delta y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} (-8) = -8$$

(*b*) $z = 16x - 9xy + 13y$

(1)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[16(x+\Delta x) - 9(x+\Delta x)y + 13y] - (16x - 9xy + 13y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{16x + 16\Delta x - 9xy - 9y\,\Delta x + 13y - 16x + 9xy - 13y}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{16\Delta x - 9y\,\Delta x}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} (16 - 9y) = 16 - 9y$$

(2)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[16x - 9x(y+\Delta y) + 13(y+\Delta y)] - (16x - 9xy + 13y)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{16x - 9xy - 9x\,\Delta y + 13y + 13\Delta y - 16x + 9xy - 13y}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-9x\,\Delta y + 13\Delta y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} (-9x + 13) = -9x + 13$$

(*c*) $z = 7x^2y$

(1)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[7(x+\Delta x)^2 y\right] - (7x^2 y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7x^2y + 14xy\,\Delta x + 7y(\Delta x)^2 - 7x^2y}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{14xy\,\Delta x + 7y(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} (14xy + 7y\,\Delta x) = 14xy$$

(2)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\left[7x^2(y+\Delta y)\right] - (7x^2y)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{7x^2y + 7x^2\Delta y - 7x^2y}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{7x^2\,\Delta y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} 7x^2 = 7x^2$$

(*d*) $z = 3x^2y^2$

(1)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[3(x+\Delta x)^2y^2\right] - (3x^2y^2)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6y^2x\,\Delta x + 3y^2(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6xy^2 + 3y^2\,\Delta x) = 6xy^2$$

(2)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\left[3x^2(y+\Delta y)^2\right] - (3x^2y^2)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{3x^2y^2 + 6x^2y\,\Delta y + 3x^2(\Delta y)^2 - 3x^2y^2}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{6x^2y\,\Delta y + 3x^2(\Delta y)^2}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} (6x^2y + 3x^2\,\Delta y) = 6x^2y$$

مسائل إضافية

Partial Derivatives المشتقات الجزئية

13.46. أوجد المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى لكل من الدوال التالية :

13.46. Find the first-order partial derivatives for each of the following functions:

(*a*) $z = 15x^2 + 23xy - 14y^2$ (*b*) $z = 6x^5 - 13x^2y^3 + 8y^4$

(*c*) $z = 7w^3 - 2w^2x + 16x^2 + 11x^3y^4 + 20y^4$

13.47. استخدم قاعدة الضرب لإيجاد المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى لكل من الدوال التالية :

13.47. Use the product rule to find the first-order partial derivatives for each of the following functions:

(*a*) $z = (8x - 5y)(3x + 4y)$ (*b*) $z = (2x^3 + 5y)(6x^2 - 8y^2)$

(*c*) $z = (7w^2 - 4x^3 - 10y^4)(3w^2 + 8x^2 - 2y^3)$

13.48. استخدم قاعدة خارج القسمة لإيجاد المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى :

13.48. Use the quotient rule to find the first-order partial derivatives for each of the following functions:

(*a*) $z = \dfrac{8x - 7y}{18x}$ (*b*) $z = \dfrac{27y}{12x + 5y}$

(*c*) $z = \dfrac{5x^3 - 9y^2}{4x + 3y}$ (*d*) $z = \dfrac{6w - 4x - 9y}{8w - 3x + 2y}$

13.49. استخدم قاعدة دالة القوى العامة لإيجاد المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى لكل من الدوال التالية :

13.49. Use the generalized power function rule to find the first-order partial derivatives for each of the following functions:

(a) $z = (12x - 13y)^5$ (b) $z = (3x^2 + 5y^3)^4$
(c) $z = (14x^3 + 9y^2)^{1/2}$ (d) $z = (5x^4 - 2xy + 4y^2)^{-3}$
(e) $z = (3x^2 + 8xy + 5y^2)^{-1/2}$ (f) $z = (6w^2 - 7x^4 - 9y^5)^3$

13.50. استخدم القاعدة الأسية الطبيعية لإيجاد المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى لكل من الدوال التالية :

13.50. Use the natural exponential rule to find the first-order partial derivatives for each of the following functions:

(a) $z = 6e^{3xy}$ (b) $z = -15e^{-3x^2y^2}$
(c) $z = 7e^{(2x+5y)}$ (d) $z = e^{w^2x^3y^2}$

13.51. استخدم القاعدة اللوغاريتمية الطبيعية لإيجاد المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى لكل من الدوال التالية :

13.51. Use the natural logarithmic rule to find the first-order partial derivatives for each of the following functions:

(a) $z = \ln|8x + 11y|$ (b) $z = \ln|5x^3 + 4y^2|$
(c) $z = \ln|6x^4y^5|$ (d) $z = \ln|7w^3 + 4x^2 + 5y^4|$

13.52. استخدم أى توليفة من القواعد تكون ضرورية لإيجاد المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى لكل من الدوال التالية :

13.52. Use whatever combination of rules is necessary to find the first-order partials for each of the following functions:

(a) $z = (9x + 2y)(3x - 7y)^3$ (b) $z = \dfrac{(5x + 8y)^5}{4x - 3y}$
(c) $z = \dfrac{(2x - 9y)(8x - 5y)}{3x + 11y}$ (d) $z = 6x^2y^3e^{5xy}$

Second-Order Partial derivatives المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية

13.53. أوجد المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية لكل من الدوال التالية :

13.53. Find all the second-order partial derivatives for each of the following functions:

(a) $z = 7x^3 - 4xy + 12y^4$ (b) $z = 9x^5 + 6x^2y^4 - 3x^3y^5 - 13y^3$
(c) $z = 16x^3y^2$ (d) $z = (5x + 12y)^4$
(e) $z = x^{0.6}y^{0.4}$ (f) $z = 8x^{0.5}y^{0.7}$

Optimization of Multivariable Function أمثلية الدوال متعددة المتغيرات

13.54. أوجد القيم الحرجة التى يتم عندها تعظيم الدوال التربيعية التالية ثم اختبر شروط الرتبة الثانية لترى ما إذا كانت الدالة عند نهاية نسبية عظمى أو نهاية نسبية صغرى أو نقطة تحول أو نقطة سراج .

13.54. Find the critical values at which each of the following quadratic functions is optimized and test the second-order conditions to see if the function is at a relative maximum, relative minimum, inflection point, or saddle point.

(a) $z = -8x^2 + 148x - 4xy + 118y - 5y^2 + 6$

(b) $z = 6x^2 - 51x - 9xy + 182y - 11y^2 - 17$

(c) $z = 7x^2 - 78x - 6xy - 48y + 4y^2 - 23$

(d) $z = -3x^2 - 6x + 14xy - 158y - 2y^2 + 37$

13.55. أوجد القيم الحرجة التى يتم عندها تعظيم الدوال التكعيبية التالية ثم اختبر شروط الرتبة الثانية لترى ما إذا كانت الدالة عند نهاية نسبية عظمى أو نهاية نسبية صغرى أو نقطة تحول أو نقطة سراج .

13.55. Find the critical values at which each of the following cubic functions is optimized and test the second-order conditions to see if the function is at a relative maximum, relative minimum, inflection point, or saddle point.

(*a*) $z = 5x^3 + 7y^2 - 240x - 154y + 61$

(*b*) $z = -9x^2 - 4y^3 + 324x + 108y - 37$

(*c*) $z = 8x^2 - 6y^3 + 144xy - 323$

(*d*) $z = 6x^3 + 6y^3 + 54xy - 195$

(*e*) $z = 4x^3 + 5y^3 + 18x^2 - 52.5y^2 - 336x - 270y + 189$

(*f*) $z = 3x^3 - 7y^3 + 22.5x^2 - 10.5y^2 - 216x + 630y - 231$

Constrained Optimization الأمثلية المقيدة

13.56. أوجد القيم الحرجة التى يتم عندها تعظيم الدوال التالية الخاضعة للقيود المعطاة .

13.56. Find the critical values at which each of the following functions is optimized subject to the given constraints:

(*a*) $z = 4x^2 - 5xy + 6y^2$, والقيد $x + y = 30$

(*b*) $z = -7x^2 + 6xy + -9y^2$, والقيد $2x + y = 165$

(*c*) $z = 8x^2 - 70x - 4xy - 50y + 5y^2$, والقيد $x + y = 35$

(*d*) $z = -3x^2 + 40x + 8xy + 288y - 10y^2$, والقيد $x + 2y = 58$

Optimization of Business and Economic Function أمثلية الدوال الاقتصادية والإدارية

13.57. أوجد القيم الحرجة التى يتم عندها تعظيم أرباح المنشأة π إذا أعطيت دوال الطلب ودوال التكاليف الكلية التالية :

13.57. Find the critical values at which each firm's profit π is maximized, given the following profit functions:

(*a*) $\pi = 422x - 4x^2 - 7xy - 6y^2 + 522y - 167$

(*b*) $\pi = 496x - 9x^2 - 11xy - 7y^2 + 405y - 235$

(*c*) $\pi = 406x - 5x^2 - 8xy - 9y^2 + 522y - 237$

(*d*) $\pi = 685x - 12x^2 - 13xy - 8y^2 + 595y - 305$

13.58. أوجد القيم الحرجة التى يتم عندها تعظيم أرباح المنشأة π إذا أعطيت دوال الطلب ودوال التكاليف الكلية التالية :

13.58. Find the critical values at which each firm's profit π is maximized, given the following demand functions and total cost functions:

(*a*) $P_x = 712 - 5x,\ P_y = 976 - 9y,\ C = 3x^2 + 4xy + 2y^2 + 375$

(*b*) $P_x = 1173 - 9x,\ P_y = 1200 - 11y,\ C = 3x^2 + 5xy + 4y^2 + 222$

(*c*) $P_x = 1532 - 13x,\ P_y = 1396 - 8y,\ C = 4x^2 + 7xy + 5y^2 + 624$

(*d*) $P_x = 2501 - 15x,\ P_y = 1648 - 14y,\ C = 5x^2 + 11xy + 3y^2 + 535$

13.59. أوجد القيم الحرجة التى يتم عندها تدنية التكاليف الكلية c إذا أعطيت حصص الإنتاج التى تحقق ذلك .

13.59. Find the critical values at which each firm's total cost C is minimized, given the production quotas that must be fulfilled:

(*a*) $C = 8x^2 - 3xy + 11y^2 + 1055,$ والقيد $x + y = 88$

(*b*) $C = 12x^2 - 4xy + 7y^2 + 945,$ والقيد $x + y = 69$

(*c*) $C = 9x^2 - 6xy + 13y^2 + 775,$ والقيد $x + 4y = 362$

(*d*) $C = 14x^2 - 9xy + 16y^2 + 835,$ والقيد $3x + y = 148$

13.60. أوجد القيمة الحرجة التى يتم عندها تعظيم الأرباح π إذا أعطيت قيود الإنتاج داخل الأقواس والتى لا يمكن تجاوزها .

13.60. Find the critical values at which each firm's profit π is maximized, given the production limitations in parentheses that cannot be exceeded:

(*a*) $\pi = 145x - 5x^2 - 2xy - 8y^2 + 201y - 325 \qquad (x + y = 37)$

(*b*) $\pi = 440x - 7x^2 - 3xy - 4y^2 + 445y - 295 \qquad (x + y = 49)$

(*c*) $\pi = 210x - 11x^2 - 5xy - 9y^2 + 182y - 435 \qquad (2x + y = 36)$

(*d*) $\pi = 494x - 6x^2 - 2xy - 15y^2 + 240y - 565 \qquad (x + 3y = 81)$

حل المسائل الإضافية

13.46. (*a*) $z_x = 30x + 23y, \qquad z_y = 23x - 28y$

(*b*) $z_x = 30x^4 - 26xy^3, \qquad z_y = -39x^2y^2 + 32y^3$

(*c*) $z_w = 21w^2 - 4wx, \qquad z_x = -2w^2 + 32x + 33x^2y^4, \qquad z_y = 44x^3y^3 + 80y^3$

13.47. (*a*) $z_x = 48x + 17y, \qquad z_y = 17x - 40y$

(*b*) $z_x = 60x^4 - 48x^2y^2 + 60xy, \qquad z_y = -32x^3y + 30x^2 - 120y^2$

(*c*) $z_w = 84w^3 + 112wx^2 - 28wy^3 - 24wx^3 - 60wy^4$

$z_x = 112w^2x - 36w^2x^2 - 160x^4 + 24x^2y^3 - 160xy^4$

$z_y = -42w^2y^2 + 24x^3y^2 - 120w^2y^3 - 320x^2y^3 + 140y^6$

13.48. (*a*) $z_x = \dfrac{126y}{(18x)^2} \qquad z_y = \dfrac{-7}{18x}$

(*b*) $z_x = \dfrac{-324y}{(12x + 5y)^2} \qquad z_y = \dfrac{324x}{(12x + 5y)^2}$

(*c*) $z_x = \dfrac{40x^3 + 45x^2y + 36y^2}{(4x + 3y)^2} \qquad z_y = \dfrac{-15x^3 - 72xy - 27y^2}{(4x + 3y)^2}$

(*d*) $z_w = \dfrac{14x + 84y}{(8w - 3x + 2y)^2} \qquad z_x = \dfrac{-14w - 35y}{(8w - 3x + 2y)^2}$

$$z_y = \frac{-84w + 35x}{(8w - 3x + 2y)^2}$$

13.49. (*a*) $z_x = 60(12x - 13y)^4 \qquad z_y = -65(12x - 13y)^4$

(*b*) $z_x = 24x(3x^2 + 5y^3)^3 \qquad z_y = 60y^2(3x^2 + 5y^3)^3$

(*c*) $z_x = 21x^2(14x^3 + 9y^2)^{-1/2} \qquad z_y = 9y(14x^3 + 9y^2)^{-1/2}$

(*d*) $z_x = (-60x^3 + 6y)(5x^4 - 2xy + 4y^2)^{-4} \qquad z_y = (6x - 24y)(5x^4 - 2xy + 4y^2)^{-4}$

(*e*) $z_x = (-3x - 4y)(3x^2 + 8xy + 5y^2)^{-3/2} \qquad z_y = (-4x - 5y)(3x^2 + 8xy + 5y^2)^{-3/2}$

(*f*) $z_w = 36w(6w^2 - 7x^4 - 9y^5)^2 \qquad z_x = -84x^3(6w^2 - 7x^4 - 9y^5)^2$

$$z_y = -135y^4(6w^2 - 7x^4 - 9y^5)^2$$

13.50. (*a*) $z_x = 18ye^{3xy} \qquad z_y = 18xe^{3xy}$

(*b*) $z_x = 90xy^2e^{-3x^2y^2} \qquad z_y = 90x^2ye^{-3x^2y^2}$

(*c*) $z_x = 14e^{(2x+5y)} \qquad z_y = 35e^{(2x+5y)}$

(*d*) $z_w = 2wx^3y^2e^{w^2x^3y^2} \qquad z_x = 3w^2x^2y^2e^{w^2x^3y^2} \qquad z_y = 2w^2x^3ye^{w^2x^3y^2}$

13.51. (*a*) $z_x = \dfrac{8}{8x + 11y} \qquad z_y = \dfrac{11}{8x + 11y}$

(*b*) $z_x = \dfrac{15x^2}{5x^3 + 4y^2} \qquad z_y = \dfrac{8y}{5x^3 + 4y^2}$

(*c*) $z_x = \dfrac{4}{x} \qquad z_y = \dfrac{5}{y}$

(*d*) $z_w = \dfrac{21w^2}{7w^3 + 4x^2 + 5y^4} \qquad z_x = \dfrac{8x}{7w^3 + 4x^2 + 5y^4}$

$$z_y = \frac{20y^3}{7w^3 + 4x^2 + 5y^4}$$

13.52. (*a*) $z_x = 9(3x - 7y)^3 + (81x + 18y)(3x - 7y)^2 \qquad z_y = 2(3x - 7y)^3 - (189x + 42y)(3x - 7y)^2$

(*b*) $z_x = \dfrac{-4(5x + 8y)^5 + (100x - 75y)(5x + 8y)^4}{(4x - 3y)^2} \qquad z_y = \dfrac{3(5x + 8y)^5 + (160x - 120y)(5x + 8y)^4}{(4x - 3y)^2}$

(*c*) $z_x = \dfrac{48x^2 + 353xy - 1037y^2}{(3x + 11y)^2} \qquad z_y = \dfrac{-422x^2 + 270xy + 495y^2}{(3x + 11y)^2}$

(*d*) $z_x = 30x^2y^4e^{5xy} + 12xy^3e^{5xy} \qquad z_y = 30x^3y^3e^{5xy} + 18x^2y^2e^{5xy}$

13.53. (*a*) $z_{xx} = 42x \qquad z_{yy} = 144y^2 \qquad z_{xy} = -4 = z_{yx}$

(*b*) $z_{xx} = 180x^3 + 12y^4 - 18xy^5 \qquad z_{yy} = 72x^2y^2 - 60x^3y^3 - 78y \qquad z_{xy} = 48xy^3 - 45x^2y^4 = z_{yx}$

(*c*) $z_{xx} = 96xy^2 \qquad z_{yy} = 32x^3 \qquad z_{xy} = 96x^2y = z_{yx}$

(*d*) $z_{xx} = 300(5x + 12y)^2 \qquad z_{yy} = 1728(5x + 12y)^2 \qquad z_{xy} = 720(5x + 12y)^2 = z_{yx}$

(*e*) $z_{xx} = -0.24x^{-1.4}y^{0.4} \qquad z_{yy} = -0.24x^{0.6}y^{-1.6} \qquad z_{xy} = 0.24x^{-0.4}y^{-0.6} = z_{yx}$

(*f*) $z_{xx} = -2x^{-1.5}y^{0.7} \qquad z_{yy} = -1.68x^{0.5}y^{-1.3} \qquad z_{xy} = 2.8x^{-0.5}y^{-0.3} = z_{yx}$

13.54. (*a*) (7, 9) نهاية نسبية عظمى (*b*) (8, 5) نقطة سراج
(*c*) (12, 15) نهاية نسبية صغرى (*d*) (13, 6) نقطة تحول

13.55. (*a*) (−4, 11) نقطة سراجية , (4, 11) نهاية نسبية صغرى
(*b*) (18, 3) نهاية نسبية عظمى , (18, −3) نقطة سراج
(*c*) (0, 0) نقطة تحول , (648, −72) نهاية نسبية صغرى
(*d*) (0, 0) نقطة تحول , (−3, −3) نهاية نسبية عظمى
(*e*) (−7, −2) نهاية نسبية عظمى , (−7, 9) نقطة سراجية , (4, −2) نقطة سراجية , (4, 9) نهاية نسبية صغرى
(*f*) (−8, −6) نقطة سراجية , (−8, 5) نهاية نسبية عظمى , (3, −6) نهاية نسبية صغرى , (3, 5) نقطة سراج

13.56. (*a*) (17, 13) (*b*) (63, 39) (*c*) (15, 20) (*d*) (22, 18)

13.57. (*a*) (30, 26) (*b*) (19, 14) (*c*) (27, 17) (*d*) (15, 25)

13.58. (*a*) (35, 38) (*b*) (42, 33) (*c*) (36, 44) (*d*) (54, 31)

13.59. (*a*) (50, 38) (*b*) (27, 42) (*c*) (50, 78) (*d*) (42, 22)

13.60. (*a*) (21, 16) (*b*) (15, 34) (*c*) (13, 10) (*d*) (45, 12)

تم اعادة الرفع بواسطة

مكتبة عسكر

ask2pdf.blogspot.com